

Lycée Bilingue de BAMYANGA , ANNEE SCOLAIRE 2021-2022
TRAVAUX DIRIGES N°1 SUR LES NOMBRES COMPLEXES APPROCHE
ALGEBRIQUE TieC-D.
PROPOSES PAR M. NOUMSSI

ÉTUDE ALGÈBRE DES NOMBRES COMPLEXES

- 1** On considère le nombre complexe $Z = x^2 + x - 2 + (x + 2)i$ où x est un nombre réel. Pour quelles valeurs de x :
- Z est-il réel ?
 - Z est-il nul ?
 - Z a pour partie réelle 4 ?

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

- 2** Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :
- $$z_1 = \left(\frac{3}{2} - 4i\right) + (9 + 2i); \quad z_2 = (5 - i\sqrt{3})(3i);$$
- $$z_3 = (3 - i)(2i - 1)^2; \quad z_4 = (1 + i\sqrt{3})^3; \quad z_6 = \frac{2-i}{3i-1}$$
- $$z_5 = \frac{i(1-7i)}{(2+3i)^2}.$$

- 3** f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
- $$f(z) = (2-i)z^2 - (1+3i)z + 5.$$

Calculer $f(i)$, $f\left(\frac{1}{i}\right)$ et $f\left(\frac{3-i}{3+i}\right)$.

- 4** Z est un nombre complexe distinct de i de la forme $x + iy$ (x, y réels). Déterminer dans les deux cas suivants, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe Z :

a) $Z = -2z^2 + 3iz - 7$; b) $Z = \frac{2iz}{z-i}$.

NOMBRE COMPLEXE CONJUGUÉ

- 5** Donnez la forme algébrique du nombre complexe conjugué de chacun des complexes suivants :
- $3 - 11i$;
 - $i(9 + 2i)$;
 - $(3 + i)(-13 - 2i)$;
 - $\frac{2-3i}{8+5i}$;
 - $\frac{2}{1+i} - \frac{3}{1-i}$.

- 6** f est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par
- $$f(z) = z^2 - 7z + 9.$$

- Démontrer que pour tout complexe z , $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

- Calculer $f(1+i)$. En déduire $f(1-i)$.

- 7** Soit z un nombre complexe non nul. Pourquoi peut-on affirmer que chacun des nombres complexes suivants est soit réel, soit imaginaire pur ?

$$A = z^2 + \bar{z}^2; \quad B = \frac{z-\bar{z}}{z^3+\bar{z}^3}; \quad C = \frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+2}.$$

- 8** On considère le nombre complexe $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$ où $z \neq i$.
- Déterminer tous les complexes z distincts de i pour que le complexe Z soit réel.
 - Montrer que Z est imaginaire pur si et seulement si $z\bar{z} = 1$.

- 9** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

- 10** Calculer le module de chacun des complexes suivants :
- $5 - 12i$;
 - $i\sqrt{2}(-1 + i)$;
 - $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i)}$;
 - $\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^2$;
 - $z = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{1988}$

- 11** Soit $z = -\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$ un nombre complexe.

- Calculer z^2 .
- Déduire le module de z^2 , puis celui de z .

- 12** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + |z|^2 - 8 = 0$.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$: RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

- 13** Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a. $z^2 + z + 1 = 0$; b. $z^2 + 2z + 2 = 0$

c. $(z+1)^3 = z^3$; d. $z^3 - 1 = 0$;

e. $z^4 + z^2 + 1 = 0$; f. $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$.

- 14** (E) désigne l'équation suivantes :

$$z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0 \text{ où } \theta \text{ est un réel de l'intervalle }]0, \frac{\pi}{2}[.$$

- a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
 b. On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation. Calculer en fonction de θ $z_1^2 + z_2^2$; $z_1^3 + z_2^3$; $z_1^4 + z_2^4$.

15 On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par $P(z) = z^3 - 3z^2 - iz + 4 - i$.

- Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
- Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

16 P est le polynôme de variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 - 27z^3 + 6z^2 - 27z + 5$$

- Établir que pour tout nombre complexe z , $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$
- En déduire que si z_0 est une racine de P, alors $\bar{z}_0$ l'est aussi.
- Calculer $P(i)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

17 1. u est un nombre complexe tel que $|u| = 1$, $u \neq 1$ et z est un nombre complexe quelconque.

- Montrer que $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel.
- Montrer que si $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel, alors z est réel ou $|u| = 1$.

18 P est le polynôme défini dans θ par :

$$P(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1$$

- Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ et en déduire que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0, \frac{1}{z_0}, \frac{1}{\bar{z}_0}$ sont aussi des solutions de cette équation.
- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine de la forme $a + i$ où a est réel à déterminer.
- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

19 $\mathcal{P}$ est le polynôme défini par : $\mathcal{P}(z) = z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2 + 2i$.

- vérifier que $\mathcal{P}$ admet une racine réelle α .
- Déterminer les nombres complexes a et b tels que $\mathcal{P}(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$.

- Résoudre alors l'équation $\mathcal{P}(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 48 + 14i$.

21 Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan en posant $z = x + iy$ tels que:

- $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 3$;
- $\left| \bar{z} + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{5}$;
- $|z + \bar{z} - 1| = 4$;
- $|z + 5 - i| = |\bar{z} - 2 - i|$;
- $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$;
- $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$;
- $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$.
- $\frac{z\bar{z}-1}{z^2}$ est un nombre réel ;
- $\frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ est un nombre réel ;
- $\frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ est un nombre imaginaire pur ;
- $\left| \frac{z-2+4i}{z+1-2i} \right| = 1$;
- $\frac{z+i}{z-1}$ soit un réel strictement positif.

22 Soit l'équation (E) :
 $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$ ($z \in \mathbb{C}$)

- Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\bar{z}_0$ est solution de (E).

2.a) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0.$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation (E).

23 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

- $z^2 - 4z + 5 + i(z + 1) = 0$
- $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$.

2. En déduire qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d que l'on précisera tels que pour tout nombre réel x , on a :
 $(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

24 Soit P le polynôme défini par :

$$\mathcal{P}(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i).$$

- Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $i\beta$ solution de l'équation : $\mathcal{P}(z) = 0$.
- Déterminer le polynôme Q tel que :

$$\mathcal{P}(z) = (z - i\beta)Q(z).$$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathcal{P}(z) = 0$.

25 Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

- $15 - 8i$;
- $2i$;
- $-i$;
- $-5 + 12i$.