

Évaluation de Mathématiques No 1 du trimestre No 1

Proposée par : M. DONTSA CEDRIC

NB : le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier si besoin est, toutes ses affirmations.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : QCM Choisir la bonne réponse (0.75 points)

- 1) Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_m): -x^2 + 2x - 1 + m \geq 0$ (avec $m \leq 0$) a pour ensemble solution :
 a) $\emptyset$ b) $\{1 - \sqrt{m}; 1 + \sqrt{m}\}$ c) $[1 - \sqrt{m}; 1 + \sqrt{m}]$ d) $\{1\}$ si $m = 0$
- 2) (C) est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ et la droite $(D_m): 3x - 4y - 5m = 0$.
 a) (C) et (D_m) sont sécants $\forall m \in \mathbb{R}$ b) (C) et (D_m) sont sécants $m \leq 5$
 c) (C) et (D_2) sont tangents d) (C) et (D_m) sont disjoints $\forall m \in \mathbb{R} \setminus [-1; 5]$
- 3) Dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): x + 5\sqrt{x} - 36 = 0$
 a) admet une infinité de solution b) n'admet pas de solution
 c) admet une unique solution d) admet deux solutions distinctes

EXERCICE 2 : (2.75points) Inspiré du concours d'entrée à POLYTECHNIQUE YDE 2019

On considère les polynômes P et Q définis sur $\mathbb{R}$ par $P(t) = t^4 - 4t^2 + t + 1$ et $Q(t) = t^4 - 4t^2 - t + 1$ et les nombres réels x, y, z et u sont tels que :

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} ; \quad y = \sqrt{2 + \sqrt{3 - y}} ; \quad z = \sqrt{2 - \sqrt{3 + z}} ; \quad u = \sqrt{2 + \sqrt{3 + u}}$$

- 1) Montrer que x et y sont des racines de P . (0.5pt)
- 2) Montrer que z et u sont des racines de Q . (0.5pt)
- 3) a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, P(-t) = Q(t)$ (0.25pt)
 b. En déduire deux autres racines de P et donner la forme factorisée de $P(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (0.75pt)
- 4) a. En déduire la valeur exacte du produit $xyz u$ et montrer que $z + u = x + y$ (0.75pt)

EXERCICE 3 : (6 points)

I- On considère le polynôme P défini par $P(x) = -3x^4 + 6x^3 + 75x^2 - 78x - 360$

- 1) Montrer que -2 est racine de P . (0.25pt)

On désigne par a, b et c trois autres racines de P autres que -2 et on définit les nombres réels

$$S, P, L \text{ et } R \text{ par } S = a + b + c; \quad P = abc; \quad L = ab + ac + bc \text{ et } R = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$$

- 2) Donner une forme factorisée de $P(x)$ en fonction de a, b et c (0.25pt)
- 3) En déduire les valeurs exactes de S, P, L et R (2pts)

- 4) On suppose dans la suite que $a = 3; P = -60; R = \frac{17}{30}$ et $b > c$

Déterminer les valeurs de b et c . (0.5pt)

II- On considère le polynôme Q défini par $Q(x) = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$

- 1) Montrer que 0 n'est pas racine de Q . (0.25pt)

- 2) Montrer que si un réel non nul α est racine de Q alors $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi. (0.5pt)

- 3) Calculer $Q(3)$ et en déduire deux racines de Q . (0.75pt)

- 4) On suppose que $Q(x) = (3x^2 - 10x + 3)(ax^2 + bx + c)$. $a, b, c \in \mathbb{R}$

- a) Déterminer les valeurs des réels a, b et c . (0.75pt)

- b) Résoudre dans l'inéquation (I) : $6x^4 - 5x^3 + 5 \leq 38x^2 + 5x - 1$ (0.75pt)

EXERCICE 4 : (5.5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère la famille de courbes (C_m) d'équation : $x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 2m^2 + m + 3 = 0$ où m est un paramètre réel strictement positif ; la droite $(\mathcal{D})$: $\sqrt{3}x + y - 7 + \sqrt{3} = 0$ et le point $E(-1; 7)$.

- 1) a) Etudier le signe du polynôme P défini par $P(x) = -x^2 - x + 6$. (0.5pt)
b) Etudier suivant les valeurs de m la nature la nature des courbes (C_m) . (0.75pt)
- 2) On suppose dans toute la suite que $m = 1$.
 - a) Montrer que (C_1) est un cercle et préciser les coordonnées du centre I et le rayon (0.75pt)
 - b) Montrer que (C_1) et $(\mathcal{D})$ sont tangents en un point A dont on précisera les coordonnées (0.75pt)
 - c) Vérifier que E est extérieur à (C_1) et que $(\mathcal{D})$ passe par E . (0.5pt)
- 3) $(\mathcal{D}')$ désigne la tangente à (C_1) passant par E autre que $(\mathcal{D})$ et B est le point de contact de $(\mathcal{D}')$ et (C_1) . Déterminer l'équation normale de $(\mathcal{D}')$. (1pt)
- 4) On rappelle que 4 points du plan sont dits cocycliques s'ils sont situés sur un même cercle.
 - a) Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle IAE . (1pt)
 - b) Déterminer la distance ΩB et en déduire que les points I, A, E et B sont cocycliques. (0.5pt)

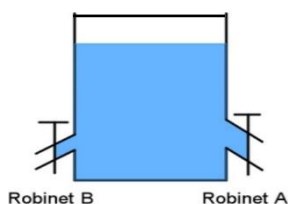
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

M. BaO dispose de quatre citernes C_1, C_2, C_3 et C_4 de forme cubique toutes remplies d'eau et d'arrêtes entières et consécutives (exprimées en mètres) telles que les contenus des citernes C_1, C_2, C_3 soient suffisants pour remplir la citerne C_4 . On décide de couvrir ces citernes avec du papier plastique (épaisseur négligeable) dont le m^2 est vendu à 1200F CFA. La citerne C_4 est munie de deux robinets A et B ; le robinet A met 2 heures de plus qu'un robinet B pour vider la citerne. Lorsqu'on ouvre simultanément les deux robinets la citerne est vidée en 2heures 24 minutes. Il se trouve que M. BaO fête son anniversaire ce jour, à cet effet son frère lui demande son âge et celui-ci lui répond : « J'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as ; et quand tu auras l'âge que j'ai, la somme de nos âges de sera égale à 63.»

Tâche 1 : Quel montant M. BaO va t'il dépenser pour recouvrir la citerne C_3 . (1.5pt)

Tâche 2 : Quel temps faut-il au robinet A seul pour vider la citerne ? (1.5pt)

Tâche 3 : Quel sera l'âge du frère de M. BaO en octobre 2022 ? (1.5pt)



Citerne C_4

Présentation : 0.5 pt

Proposed by: M. Cedric DONTSA [Pleg Maths]