



Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (5 points)

- Soit le nombre complexe $\Delta = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2$.
 - Montre que $\Delta = 9 - 40i$. 0,75pt
 - Détermine les racines carrées de Δ . 0,75pt
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+2i)z - 1 + 13i = 0$. 0,5pt
- Soit le nombre complexe a défini par $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
 Montre que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ et déduis-en le module de a . 0,75pt
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$. 0,75pt
- Soit $z = x + iy$, x et y étant deux réels tels que $(x; y) \neq (1; 0)$. On pose $Z = \frac{z+2i}{z-1}$.
 - Montre que $Z = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{2x - y - 2}{(x-1)^2 + y^2}$. 1pt
 - Détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur. 0,5pt

EXERCICE 2 : (5 points)

A) Calcule chacune des limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$; (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+2}} - x$; (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ 2pts

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations. 0,75pt
- Détermine les images de chacun des intervalles suivants par la fonction f :
 $I = [0; 1]$, $J =]-\infty; 0]$, $K = [1; +\infty[$, $L =]0; 2]$ 1pt
- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$. 0,75pt
- Donne un encadrement d'amplitude 0,1 du nombre α . 0,5pt

EXERCICE 3 : (5 points)

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{x} \cos x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- Montre que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\frac{1 - \sqrt{x}}{x+1} \leq g(x) \leq \frac{1 + \sqrt{x}}{x+1}$. 0,5pt
 - Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ en citant le théorème utilisé, puis calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. 1pt
- Montre que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. 1pt

3. Recopie et complète la phrase suivante par le groupe de mots approprié.

Si f est une fonction sur $I = [a; b]$ et si, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a; b[$. 1pt

4. Réponds par **VRAI** ou **FAUX** en justifiant.

(a) Le module du nombre complexe $z = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{2025}}{1-i}$, $\theta \in \mathbb{R}$ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 0,5pt

(b) Pour tout nombre complexe z , on a : $|i\bar{z} + 1| = |z + i|$. 0,5pt

(c) Si pour tout $x > 0$, $|f(x) - 4| \leq \frac{5}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$. 0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

L'unité de longueur est le dam.

M. LOE et M. BONA sont deux habitants d'un village touristique dans la zone de Mouanko par Edéa. M. LOE possède deux parcelles de terrain. Il décide de vendre l'une des parcelles afin de financer la création d'une exploitation agricole dont le montant est estimé à 4.000.000 FCFA.

- ✓ La 1^{ère} parcelle $ABCD$ destinée à la vente est de forme trapézoïdale. M. LOE fait appel à un géomètre assermenté pour l'aider à évaluer la superficie exacte de son terrain. Sur le dossier technique de ce terrain rapporté à un plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $1dam$, le géomètre se rend compte que les affixes des points A, B, C et D sont les emplacements des bornes et sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 2) = 0$. Dans la zone où est situé ce terrain, on vend le m^2 à 7.000 FCFA.
- ✓ La 2^{ème} parcelle destinée à l'exploitation agricole sera clôturée en laissant une entrée de $2,4m$ pour accéder au champ avec du fil barbelé vendu par rouleau de $8m$ à 3000 FCFA le rouleau avant d'y pratiquer l'agriculture. Pour irriguer cette exploitation agricole, il souhaite creuser un puits au centre de ce terrain qui est formé par l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $|2z - 4i| = |-iz + 1 - 3i|$.

M. BONA est le cordonnier de ce village. Il fabrique des sacs à main. Il réussit à vendre tous ses sacs chaque mois à des touristes. Sa marge bénéficiaire mensuelle, en centaines de FCFA est modélisée par la fonction B définie par $B(x) = x^3 - \frac{75}{2}x^2 + 450x + 150$ où $x \in [5; 17]$ représente le nombre de sacs fabriqués et vendus. M. BONA aimerait connaître le nombre de sacs qu'il doit fabriquer et vendre pour que son bénéfice soit maximal.

Tâches :

1. M. BONA aura-t-il suffisamment d'argent pour financer la création de ce champ ? 1,5pt
2. Où faut-il creuser le puits et quelle somme totale faut-il pour la clôture de l'exploitation agricole ? 1,5pt
3. Aide M. BONA à répondre à sa préoccupation. 1,5pt

Présentation générale : 0,5pt