

Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3 points)

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$.

1. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations. 0,75pt
2. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ et que $-3 < \lambda < -2$. 0,5pt
3. Donne un encadrement de λ à 10^{-1} près. 0,5pt
4. Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . 0,25pt

B) Calcule chacune des limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ 1pt

EXERCICE 2 : (4,25 points)

A) On considère les nombres x, y, z et N suivants : $y = \overline{131}^x$, $z = \overline{101}^x$ et $N = x \times y \times z$.

1. Ecris y et z en base 10 (en fonction de x). 0,5pt
2. Déduis-en alors l'écriture de N en base x . 0,5pt
3. Sachant que $x + y + z = 50$, détermine alors x et N dans le système décimal. 0,75pt

- B) 1. Trouve tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $ab - 3a + 2b = 21$. 0,75pt
2. Démontre que pour tout entier naturel n , $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13. 0,5pt
 3. Détermine le reste de la division euclidienne par 11 du nombre $A = 251139^{44}$. 0,75pt
 4. Justifie que 631 est un nombre premier. 0,5pt

EXERCICE 3 : (4,75 points)

1. Soit le nombre complexe $\Delta = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2$.

(a) Montre que $\Delta = 9 - 40i$. 0,5pt

(b) Détermine les racines carrées de Δ . 0,5pt

(c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+2i)z - 1 + 13i = 0$. 0,5pt

2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta): z^2 \cos^2 \theta - z \sin 2\theta + 1 = 0$ où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. 0,75pt

3. Soit le nombre complexe a défini par $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Montre que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ et déduis-en le module de a . 0,5pt

4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$. 0,75pt

5. Soit $z = x + iy$, x et y étant deux réels tels que $(x; y) \neq (1; 0)$. On pose $Z = \frac{z + 2i}{z - 1}$.

(a) Montre que $Z = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{2x - y - 2}{(x-1)^2 + y^2}$. 0,75pt

(b) Détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur. 0,5pt

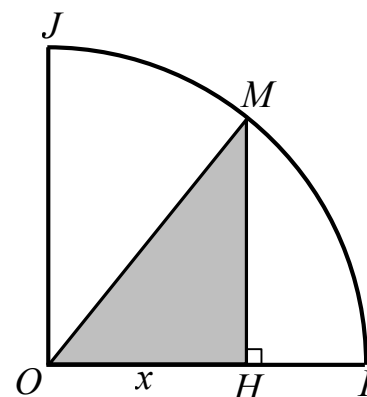
EXERCICE 4 : (3 points)

- Effectue la division euclidienne de -283 par 19 . 0,5pt
- Dans le système décimal, un entier naturel non nul X s'écrit : $X = \overline{a_p a_{p-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$; $a_p \neq 0$.
Justifie qu'on a : $X \equiv 0[11]$ si $\sum_{i=0}^p (-1)^i a_i \equiv 0[11]$. 0,5pt
- Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-3; 28)$ et $B(24; 10)$.
(a) Démontre que l'équation de la droite (AB) s'écrit : $2x = 3(26 - y)$. 0,5pt
(b) Déduis-en les points du segment $[AB]$ dont les coordonnées sont entières. 0,75pt
- a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$.
Trouve a et b sachant que $ab = 1734$ et $PGCD(a; b) = 17$. 0,75pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION : L'unité de longueur est le hm . On prendra $\sqrt{5} \approx 2,2$.

Une coopérative agricole possède un terrain qui a la forme d'un quart de disque de rayon $1hm$ représenté par la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles. Elle veut partager son terrain en trois parcelles pour y cultiver respectivement des tomates, des arachides et des patates. La parcelle grisée est réservée à la culture des tomates et la coopérative souhaite que son aire soit maximale. Le rendement du sol est de $2kg$ de tomates par m^2 . Un cageot de $10kg$ de tomates coûte 15.000 FCFA.



M. BELL, gérant de la coopérative souhaite sécuriser sa parcelle de terrain de forme trapézoïdale $ABCD$ avec du fil barbelé dont le mètre coûte 1500 FCFA. Il fait appel à un géomètre pour l'aider à lui fournir les coordonnées topographiques de son terrain. Sur le dossier technique de ce terrain, le géomètre se rend compte que les coordonnées des sommets C et D ne sont plus visibles et que celles des points A et B sont respectivement $(-1; 1)$ et $(-1; -1)$. le géomètre se rappelle que les affixes des sommets sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = 0$.

L'argent issu des ventes des cageots de tomates est logé dans le compte bancaire de la coopérative agricole. Ayant oublié le numéro de ce compte, M. BELL se souvient que la combinaison de son numéro comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Le 1^{er} chiffre est pair ; la somme des deux premiers chiffres est 15 ; le troisième est la différence des deux premiers ; le premier chiffre est le produit du troisième par le quatrième. Le nombre est divisible par 9 .

Tâches :

- Quelle somme gagnera la coopérative agricole si elle décide de cultiver la tomate sur toute la parcelle grisée d'aire maximale ? 1,5pt
- Quelle somme dépensera M. BELL pour sécuriser tout le pourtour de son terrain ? 1,5pt
- Aide M. BELL à retrouver le numéro du compte bancaire de la coopérative agricole. 1,5pt

Présentation générale : 0,5pt