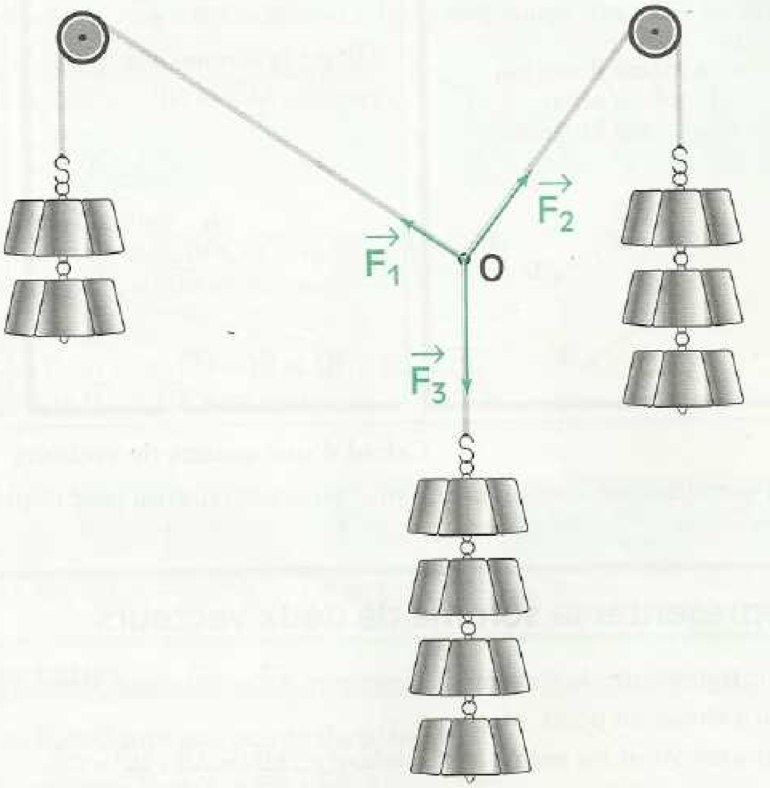
3

Vecteurs



Explique pourquoi 400 g permettent d'équilibrer 200 g + 300 g.

SOMMAIRE

1 Somme de vecteurs

1.1 LES VECTEURS

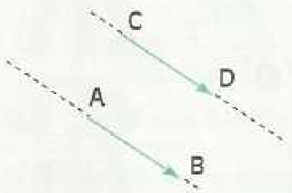
Tableau récapitulatif

Vecteurs égaux

A, B, C et D sont des points.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont :

- la même direction,
- le même sens,
- la même longueur.

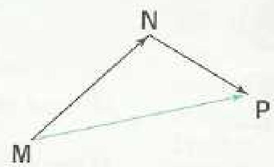


Égalité de Chasles

M, N et P sont des points.

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$$

$\overrightarrow{MP}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$



Vecteurs opposés

A et B sont des points.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

On note : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

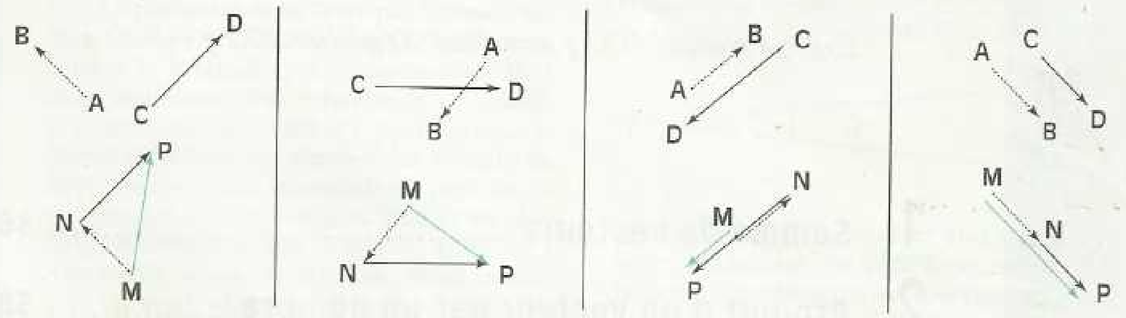
Calcul d'une somme de vecteurs

Pour effectuer une somme de plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper certains vecteurs.

Représenter la somme de deux vecteurs

Pour représenter la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans chacun des cas de figure suivants,

- on a choisi un point M
- on a construit les points N et P tels que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CD}$
- on a obtenu le vecteur $\overrightarrow{MP}$ tel que : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

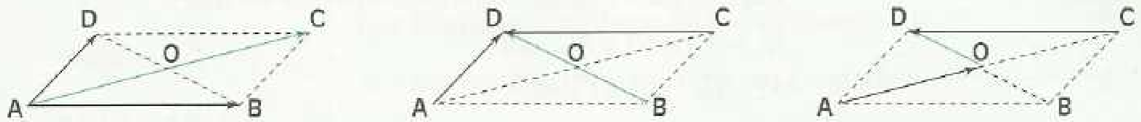


Remarque

La somme de deux vecteurs de même direction est un vecteur de même direction ou le vecteur nul.

Reconnaître la somme de deux vecteurs

Dans chacun des cas de figures suivants, ABCD est un parallélogramme de centre O. Le vecteur représenté en vert est la somme des vecteurs représentés en noir. Justifie.



EXERCICES

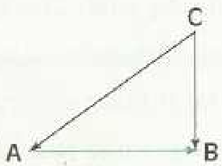
1.a Représente la somme des deux vecteurs dans chacun des cas suivants.

1.b A, B, C et D sont des points du plan.
Construis les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont égaux.

1.c F, G, H, I sont quatre points alignés.
Construis les points O et P tels que : $\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HI}$.
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{FO}$ et $\overrightarrow{HP}$ sont égaux.

1.2 TRANSFORMATIONS D'ÉCRITURE

Différence de deux vecteurs



A, B et C sont des points du plan.

On pose : $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + (-\overrightarrow{CA})$

Le vecteur $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ est appelé **différence** des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

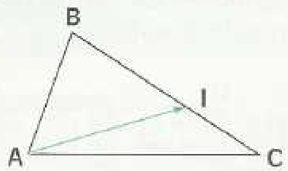
$\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Réduire des sommes de vecteurs

A, B, C, D, E, F et P sont des points du plan.
Simplifions l'écriture de la somme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$.

		Justifications
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$	$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$	$-\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CP}$
	$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE}$	*Règle de calcul*
	$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{EE}$	*Égalité de Chasles*
	$= \overrightarrow{AP}$	$\overrightarrow{EE} = \overrightarrow{0}$

Écrire un vecteur comme somme ou différence de vecteurs



ABC est un triangle. I est un point de [BC].
Écrivons de deux manières différentes le vecteur $\overrightarrow{AI}$ comme somme, puis comme différence de deux vecteurs.

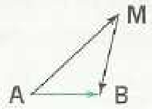
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$

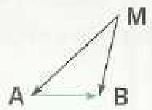
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CA}$

REMARQUE

Pour effectuer certains calculs portant sur des vecteurs, il est souvent judicieux de remplacer un vecteur par une somme ou par une différence de deux vecteurs.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$





$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$

EXERCICES

1.d ABCD est un parallélogramme. M est un point du plan.
Démontre les égalités suivantes : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM}$; $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}$.

1.e ABCD est un parallélogramme, E et F sont deux points du plan.
Réduis la somme : $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CA}$.

1.f A, B, C, D et E sont des points du plan. Réduis la somme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$.

2 Produit d'un vecteur par un nombre

2.1 DÉFINITION

Activité

On donne le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point M du plan.
• Construis le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ est noté $2\overrightarrow{AB}$.
Compare les vecteurs $2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ (direction, sens et longueur).

On dit que le **vecteur** $2\overrightarrow{AB}$ est le **produit du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **par le nombre réel 2.**

• Construis le point P tel que :
MABP soit un trapèze, (AB) // (MP) et MP = 1,5 AB.
On note : $\overrightarrow{MP} = 1{,}5\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{PM} = -1{,}5\ \overrightarrow{AB}$.
Compare : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ (direction, sens et longueur).

On dit que le **vecteur** $\overrightarrow{MP}$ est le **produit du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **par le nombre réel 1,5** ;
On dit que le **vecteur** $\overrightarrow{PM}$ est le **produit du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **par le nombre réel – 1,5.**

DÉFINITION

On appelle produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel non nul k, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que :

- **(MN) et (AB) ont la même direction ;**
- **$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens lorsque k est positif ;**
- **$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont des sens contraires lorsque k est négatif ;**
- **$MN = |k| AB$.**

Le produit du vecteur nul par un nombre réel est le vecteur nul.

Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 0 est le vecteur nul.

Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k est noté : $k\,\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ $\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB}$ $\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB}$ $\longrightarrow$	
$\longrightarrow$ $k\,\overrightarrow{AB}$	$\longleftarrow$ $k\,\overrightarrow{AB}$	$0\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$	$k.\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$	$(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0})$

EXERCICES

2.a A et B sont deux points du plan. Construis le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Construis le point E tel que : $\overrightarrow{CE} = (-\frac{2}{5})\,\overrightarrow{AB}$.

2.b Les points A, B, C et D sont non alignés et tels que : $\overrightarrow{CD} = -3\,\overrightarrow{AB}$.

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

2.2 PROPRIÉTÉS

Activité 1

A et B sont deux points du plan. On veut comparer $\frac{1}{3}(6\,\overrightarrow{AB})$ et $(\frac{1}{3} \times 6)\,\overrightarrow{AB}$.

Pour cela, place deux points du plan : M, P.

Construis le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(6\,\overrightarrow{AB})$.

Construis le point Q tel que : $\overrightarrow{PQ} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

Justifie que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Activité 2

A et B sont deux points du plan. On veut comparer $(-5)\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AB}$ et $(-5+2)\,\overrightarrow{AB}$.

Pour cela, place deux points du plan : R, T.

Construis le point S tel que : $\overrightarrow{RS} = (-5)\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AB}$.

Construis le point U tel que : $\overrightarrow{TU} = (-3)\,\overrightarrow{AB}$.

Justifie que : $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU}$.

Activité 3

A, B, C et D sont quatre points du plan. On veut comparer $3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{CD}$ et $3\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Pour cela, place deux points du plan : M, P.

Construis le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = 3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{CD}$.

Construis le point Q tel que : $\overrightarrow{PQ} = 3\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Vérifie, à l'aide de tes instruments, que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

On admet les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS

A, B, C et D sont des points du plan. k et h sont des nombres réels. On a :

$$k\,(h\,\overrightarrow{AB}) = (k\,h)\,\overrightarrow{AB} \qquad k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{CD} = k\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$$

$$k\,\overrightarrow{AB} + h\,\overrightarrow{AB} = (k + h)\,\overrightarrow{AB} \qquad 1\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

Exemples

- *[AB] est un segment. Construisons le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(2\,\overrightarrow{AB})$.*

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(2\,\overrightarrow{AB}) = (\frac{1}{4} \times 2)\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

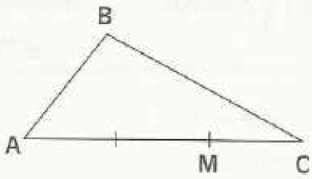
Le point C est le milieu de [AB].

- *[EF] est un segment. Construisons le point G tel que : $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EF} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{EF}$.*

$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4})\,\overrightarrow{EF} = \frac{5}{4}\,\overrightarrow{EF}$.

G est le point de (EF) tel que : $\overrightarrow{EG} = \frac{5}{4}\,\overrightarrow{EF}$.

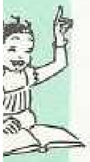
- *ABC est un triangle. Construisons le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BC}$.*



$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

M est le point de (AC) tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE



2.c A, B, C, D sont des points du plan. Simplifie les écritures suivantes :

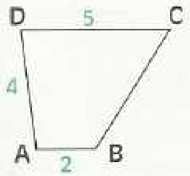
$3\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$; $3\,\overrightarrow{AB} - 4\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$;

$(-3)\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + 2\,(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$; $(-\frac{3}{2})\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + 2\,(\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$.

3 Vecteurs et configurations

3.1 VECTEURS DE MÊME DIRECTION

Activité



ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC].

- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction.
- Démontre que : $\overrightarrow{CD} = (-2{,}5)\ \overrightarrow{AB}$.

On dit que le **vecteur $\overrightarrow{CD}$ est exprimé en fonction du vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

- Exprime le vecteur $\overrightarrow{DC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

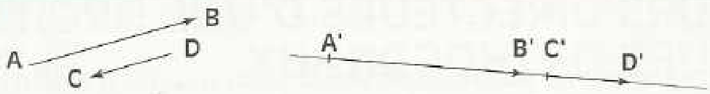
- Cite deux vecteurs de même direction, deux vecteurs de directions différentes.

On admet la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

A, B, C et D sont quatre points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction.	***équivaut à***	**on peut trouver un nombre réel k non nul tel que : $\overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{CD}$**



$\overrightarrow{AB} = -2\ \overrightarrow{CD}$

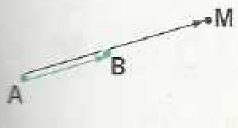
$\overrightarrow{A'B'} = 3\ \overrightarrow{C'D'}$

EXERCICE

3.a ABC est un triangle, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et de [AC].
Justifie que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même direction, et que $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CJ}$ n'ont pas la même direction.

3.2 VECTEURS COLINÉAIRES

Alignement de trois points



A et B sont deux points du plan.

- k est un nombre réel et M le point du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$.

Examine le cas où k est le nombre 0.

Démontre que M est un point de la droite (AB).

- N est un point de la droite (AB).

Examine le cas où N et A sont confondus.

Démontre que l'on peut trouver un nombre réel h tel que : $\overrightarrow{AN} = h\ \overrightarrow{AB}$.

DÉFINITION

On dit que des vecteurs sont *colinéaires* lorsqu'ils ont même direction, ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

PROPRIÉTÉ

A et B sont deux points du plan.

$M \in (AB)$ ***équivaut à*** **$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires**

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\vec{0} = 0\,\overrightarrow{AB}$

EXERCICES

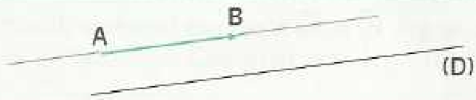
3.b M est un point de la droite (AB). L'abscisse de M dans le repère (A ; B) est m.
Justifie que $\overrightarrow{AM} = m\,\overrightarrow{AB}$.

3.c A, B, C et D sont quatre points non alignés, tels que $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{CD}$. Les droites (AC) et (BD) se coupent au point E. Justifie que C est le milieu de [AE].

3.3 VECTEURS DIRECTEURS D'UNE DROITE VECTEURS ORTHOGONAUX

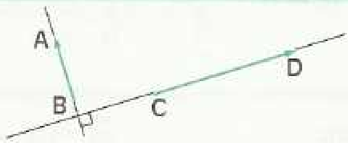
DÉFINITIONS

• **On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur directeur* de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.**



(AB) // (D)

• **On dit que deux *vecteurs non nuls* sont *orthogonaux* lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.**



$(AB) \perp (CD)$

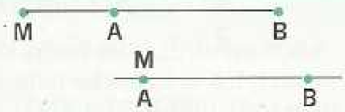
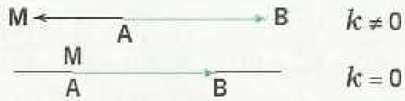
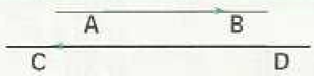
On note : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

EXERCICES

3.d M, P et Q sont trois points non alignés du plan.
Construis la droite (L), de vecteur directeur $\overrightarrow{PQ}$ et passant par le point M.

3.e $\overrightarrow{MP}$ est un vecteur directeur de deux droites (D) et (D'), et M est un point de (D).
Explique pourquoi P n'est pas un point de (D').

3.4 LANGAGE GÉOMÉTRIQUE LANGAGE VECTORIEL

	Langage géométrique		Langage vectoriel
Milieu d'un segment	**I est le milieu de [AB]**	*équivaut à*	$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$
			
Points alignés	**A, B et M sont alignés**	*équivaut à*	**On peut trouver un nombre k tel que :** $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$
			
Droites parallèles	**(AB) // (CD)**	*équivaut à*	**On peut trouver un nombre k non nul tel que :** $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$
			

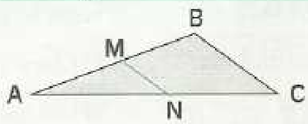
Remarque
Lorsque (AB) et (CD) sont deux noms d'une même droite, nous dirons que (AB) et (CD) sont confondues. Nous convenons de dire que (AB) et (CD) sont des droites parallèles.

La propriété de Thalès et sa réciproque peuvent s'exprimer à l'aide de vecteurs.

FORMULATION VECTORIELLE DES PROPRIÉTÉS DE THALÈS

ABC est un triangle. k est un nombre non nul, M un point de (AB), N un point de (AC).

(MN) // (BC) *équivaut à* $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$



EXERCICES

3.f IEF est un triangle. G est un point de [IE] et H un point de [IF] tels que : $\overrightarrow{EF} = 4\,\overrightarrow{GH}$.
Démontre que : $\overrightarrow{IE} = 4\,\overrightarrow{IG}$.

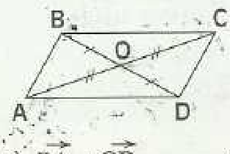
3.g B et C sont deux points du plan. Place M et N tels que : $2\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{MB}$.
Démontre que : $\overrightarrow{CB} = 4\,\overrightarrow{CN}$.

EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

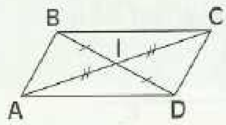
1 SOMME DE VECTEURS

1 ABCD est un parallélogramme de centre O.
Nomme un vecteur de la figure égal à :



1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$
4) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$
5) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$
6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
7) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$
8) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

2 ABCD est un parallélogramme de centre I.
Nomme un vecteur de la figure égal à :



1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IC}$
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$
3) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC}$
4) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BC}$
5) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DI}$
6) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{IC}$

3 A, B, C, D, E, F et G sont des points du plan.
Simplifie l'écriture de chacune des sommes ci-dessous :

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EG}$
3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

4 A, B, P et Q sont quatre points du plan.
Complète chacune des égalités suivantes :

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{\dots B}$
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\dots} + \overrightarrow{\dots B}$
3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\dots} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{\dots B}$
4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{\dots\dots} + \overrightarrow{PB}$

5 A, B, C et D sont quatre points du plan.
Construis P tel que :

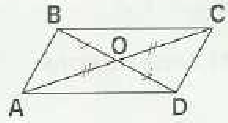
1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$

2 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE

6 A, B et C sont trois points non alignés.
Dans chacun des cas suivants, construis M tel que :

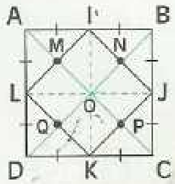
1) $\overrightarrow{CM} = 2\,\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{CM} = (-3)\,\overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$
4) $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{-5}{3}\right)\overrightarrow{AB}$
5) $\overrightarrow{CM} = \sqrt{2}\;\overrightarrow{AB}$
6) $\overrightarrow{CM} = \sqrt{3}\;\overrightarrow{AB}$

7 ABCD est un parallélogramme de centre O.
Complète les égalités suivantes par des nombres :



1) $\overrightarrow{AC} = \dots\,\overrightarrow{OC}$
2) $\overrightarrow{OB} = \dots\,\overrightarrow{DB}$
3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \dots\,\overrightarrow{DC}$
4) $\overrightarrow{BO} = \dots\,\overrightarrow{DO}$
5) $\overrightarrow{AO} = \dots\,\overrightarrow{CA}$

8 ABCD est un carré de centre O.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Complète les égalités suivantes par des nombres :



1) $\overrightarrow{AC} = \dots\,\overrightarrow{OP}$
2) $\overrightarrow{ON} = \dots\,\overrightarrow{BO}$
3) $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \dots\,\overrightarrow{OQ}$
4) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \dots\,\overrightarrow{OI}$

9 A et B sont des points du plan.
Simplifie les écritures suivantes :

1) $2\,(3\,\overrightarrow{AB})$
2) $3\,(-\overrightarrow{AB})$
3) $-(-2\,\overrightarrow{AB})$
4) $(-2)\,(\frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB})$
5) $(-3)\,(-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB})$
6) $\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$
7) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$
8) $\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
9) $-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
10) $-\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

10 A, B et C sont trois points non alignés.
Dans chacun des cas suivants, construis le point M tel que :

1) $\overrightarrow{CM} = 2(-3)\,\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{CM} = 2\,\left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}$
4) $\overrightarrow{CM} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC}$

11 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CD} + 3\,\overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{IJ} = -4\,\overrightarrow{CD} - 3\,\overrightarrow{EF}$
Exprime les vecteurs ci-dessous en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{IJ}$
4) $2\,\overrightarrow{AB} + 6\,\overrightarrow{GH} - \frac{1}{4}\,\overrightarrow{IJ}$

EXERCICES

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{IJ}$ 5) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{GH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$

3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{IJ}$

12 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$.
Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

13 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$3\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\left(\frac{-2}{3}\right)\overrightarrow{CD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{EF}$.
1) Exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.
2) Exprime $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

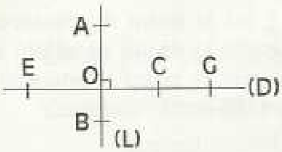
3 VECTEURS ET CONFIGURATIONS

14 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, P, Q sont tels que :
1) $\overrightarrow{AB} = (-2)\overrightarrow{CD}$ 4) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$
2) $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ 5) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{-2}{3}\right)\overrightarrow{CD}$
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.

15 En utilisant des points de la figure ci-dessous, nomme trois vecteurs directeurs de la droite (D).

16 A, B, C sont trois points non alignés du plan. Construis la droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

17 En utilisant des points de la figure ci-contre, nomme cinq vecteurs orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{OA}$.



18 MNP est un triangle. Les points I et J sont les milieux respectifs de ses côtés [MN] et [NP].
1) Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{MP}$.
2) Exprime $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

19 A, B et C sont trois points non alignés. Construis les points E et F tels que :
$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Exprime $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

20 I, J, A et C sont quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
B est le point d'intersection de (AI) et (CJ).
Construis une figure.
Complète chacune des égalités suivantes :
1) $\overrightarrow{BI} = \ldots\, \overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{BC} = \ldots\, \overrightarrow{JC}$

21 ABC est un triangle.
Le point G est le centre de gravité de ce triangle.
Les points P, M et N sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
Exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{NG}$ en fonction de $\overrightarrow{CN}$.

22 ABC est un triangle.
1) Place les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CA}$.
2) Démontre que C est le milieu de [MN].

23 FAE est un triangle. Les points F' et E' sont tels que : $\overrightarrow{FF'} = (-2)\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FE'} = (-2)\overrightarrow{FE}$.
1) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FE}$, puis exprime le vecteur $\overrightarrow{F'E'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{F'F}$ et $\overrightarrow{FE'}$.
2) Exprime $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{F'E'}$.

24 E, F et G sont trois points non alignés.
1) Construis les points F' et G' tels que :
$\overrightarrow{FF'} = 2\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{EG}$.
2) Démontre que $\overrightarrow{F'G'} = 3\overrightarrow{FG}$.

APPROFONDISSEMENT

25 E et F sont deux points du plan.
1) Construis le point P tel que $2\overrightarrow{EP} = 3\overrightarrow{EF}$.
2) Exprime $\overrightarrow{PF}$ en fonction de $\overrightarrow{EP}$.
Exprime $\overrightarrow{FE}$ en fonction de $\overrightarrow{PF}$.

26 EFG est un triangle.
1) Construis le point P tel que
$\overrightarrow{EP} = 3\overrightarrow{EF} + (-2)\overrightarrow{EG}$
2) Exprime le vecteur $\overrightarrow{FP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

EXERCICES

3) Démontre que les points F, P et G sont alignés.

27 ABC est un triangle équilatéral et I est un point extérieur à ce triangle.
1) Construis les points D, E et F tels que
$\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
2) Démontre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
3) Démontre que le triangle DEF est équilatéral.

28 E, F et G sont trois points non alignés.
1) Construis le point H tel que $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})$
Que représente le point H pour le segment [FG] ?
2) Construis le point I tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})$
Que représente le point I pour le triangle EFG ?

29 ABCD est un rectangle de centre O.
Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [DC]. M est le point d'intersection des droites (AJ) et (DB) et N le point d'intersection des droites (IC) et (DB).
a) Démontre que : $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$
b) Complète les égalités suivantes :
1) $\overrightarrow{MN}$ = ... $\overrightarrow{DB}$ *2)* $\overrightarrow{ON}$ = ... $\overrightarrow{DB}$
3) $\overrightarrow{BD}$ = ... $\overrightarrow{DN}$ *4)* $\overrightarrow{MO}$ = ... $\overrightarrow{BD}$

30 Le point I est le milieu d'un segment [AB].
M est un point.
Démontre que : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.
(On pourra utiliser le résultat de l'exercice 36 pour résoudre les exercices 37 à 42).

31 M et N sont deux points de la droite (AB) tels que : $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 5\,\overrightarrow{AB}$.
Le point I est le milieu du segment [MN].
Exprime $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

32 ABCD est un parallélogramme de centre O.
M est un point du plan.
Démontre que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

33 ABC est un triangle. Le point O est le centre de son cercle circonscrit.
1) Construis les points E et F tels que :
$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
2) Démontre que : (OE) ⊥ (BC) et (OF) ⊥ (AC).
3) Construis le point H tel que :
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
4) Démontre que : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OF}$.
5) H est un point remarquable du triangle ABC. Lequel ?

34 ABC est un triangle.
1) Le point A' est le milieu du côté [BC] et M est un point de la droite (AI).
Démontre que :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A}$.
2) Le point G est le centre de gravité de ABC.
Démontre que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

35 A, B, C et D sont quatre points du plan.
Démontre que :
1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

36 ACDB est un parallélogramme. Par le point B, trace la droite parallèle à la droite (AD). Cette droite coupe respectivement les droites (CD) et (CA) aux points M et N.
Démontre que : $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.

37 ABC est un triangle.
Construis les points D et F tels que
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - 2\,\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$.
Justifie que le point B est le milieu de [DF].

38 ABCD est un parallélogramme. Le point E appartenant au segment [AD] est tel que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{11}\overrightarrow{AD}$.
F est le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite parallèle à (AB) passant par E.
G est le point d'intersection des droites (AC) et (EF).
Démontre que :
1) $\overrightarrow{EG} = \frac{4}{11}\overrightarrow{DC}$ *2)* $\overrightarrow{GF} = \frac{7}{11}\overrightarrow{AB}$
3) $7\,\overrightarrow{EG} + 4\,\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{0}$.

39 On donne un segment [EF].
Construis le point X du segment [EF] tel que :
$3\,\overrightarrow{EX} + 5\,\overrightarrow{FX} = \overrightarrow{0}$.