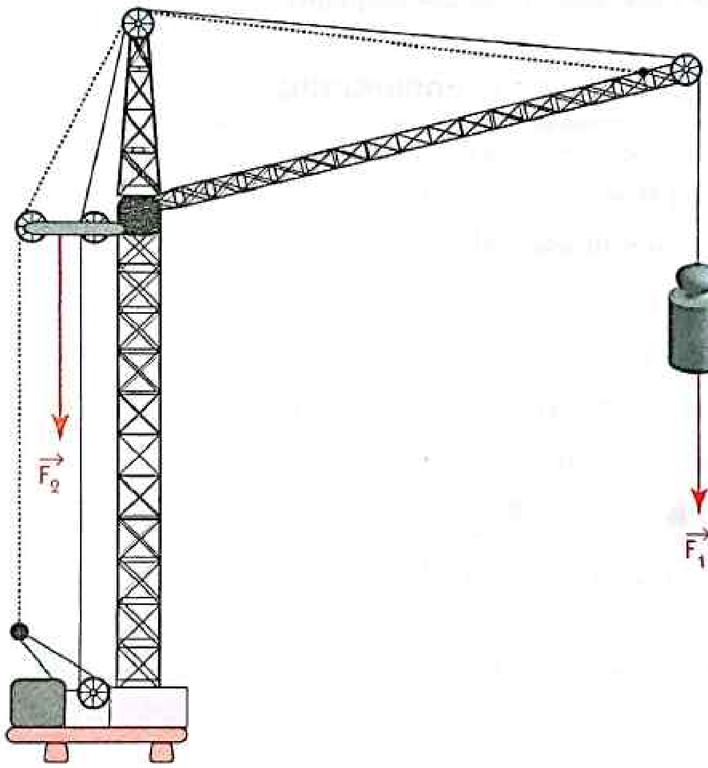
2 Vecteurs et points du plan

Nous allons préciser et compléter la notion de vecteurs déjà abordée dans le premier cycle. Nous apprendrons ensuite à utiliser le calcul vectoriel pour résoudre des problèmes variés de géométrie plane.



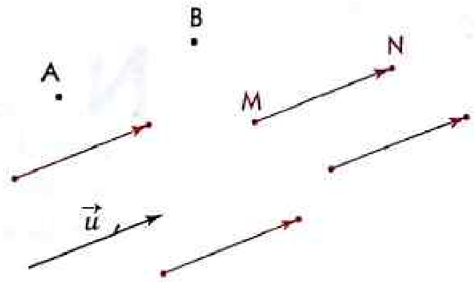
SOMMAIRE

1 Vecteurs

1.1. Définitions et premières propriétés

Définitions et notations

- Soit (A,B) un couple de points, t la translation transformant A en B.
L'ensemble des couples (M,N) où N est l'image de M par t est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- On appelle plan vectoriel l'ensemble de tous les vecteurs du plan et on le note $\mathcal{V}$. Les éléments de $\mathcal{V}$ sont en général notés par des lettres surmontées d'une flèche : $\vec{a}$; $\vec{b}$; ... ; $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$; etc.

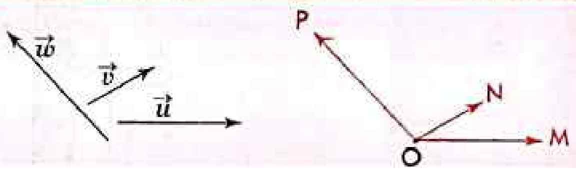


- Sur la figure ci-dessus : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$. On dit que (A,B) et (M,N) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Tout vecteur a une infinité de représentants.

Conséquences immédiates

Propriété fondamentale

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$,
il existe un et un seul point M
tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



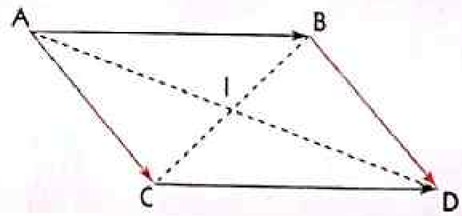
Démonstration

$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ signifie que M est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Donc, M existe et est unique.

Propriété 1

Les énoncés suivants sont équivalents :
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **;**
- **[AD] et [BC] ont même milieu ;**
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ **.**

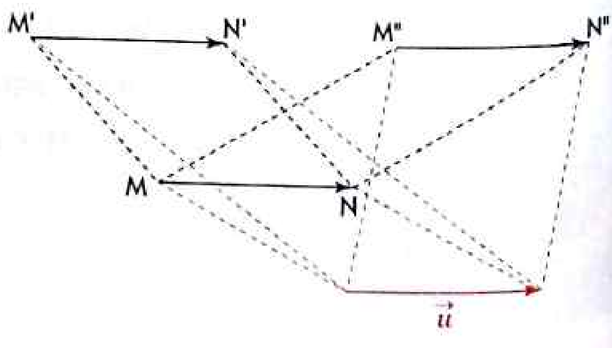


Cette propriété a été vue en classe de quatrième.

Direction, sens et norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Soit (M,N), (M',N'), (M",N"), etc., des représentants de $\vec{u}$.

- Les droites (MN), (M'N'), (M"N"), etc. sont parallèles ; elles définissent une direction appelée direction du vecteur $\vec{u}$.
- La translation qui transforme M en N, M' en N', M" en N", etc., définit sur cette direction un sens de parcours appelé sens du vecteur $\vec{u}$.
- MN = M'N' = M"N"= .... Cette distance ne dépend pas du représentant du vecteur $\vec{u}$.



Définition

On appelle norme de $\vec{u}$ la distance AB où (A,B) est un représentant de $\vec{u}$. On la note : $\|\vec{u}\|$.

Propriété 2

Il existe un et un seul vecteur ayant une direction donnée, un sens donné et une norme donnée.

Cette propriété est admise.

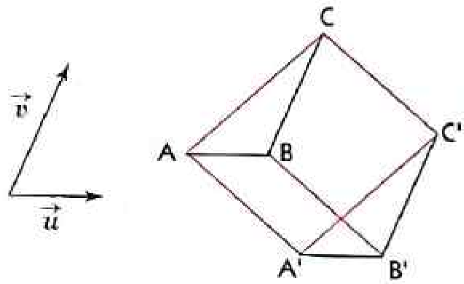
Remarques

- $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.
  En effet, $\vec{0}$ a pour norme 0.
  Réciproquement, si $\|\vec{u}\| = 0$, alors tout représentant (M,N) de $\vec{u}$ est tel que : $MN = 0$.
  On en déduit que M est égal à N et donc que $\vec{u}$ est le vecteur nul.
- *Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.*
  En effet, si (A,B) est un représentant de $\vec{u}$, (B,A) est un représentant de $-\vec{u}$.
  $BA = AB$, donc $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.
- *Deux vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement égaux.*

1.2. Calcul vectoriel

Somme de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs, A un point.
D'après la propriété fondamentale, il existe un seul point B et un seul point C tels que :
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ne dépend pas du choix de A.
Soit A' un autre point, B' et C' tels que :
$\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \vec{v}$.
On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.
De la propriété 1 § 1.1, on déduit : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.
D'où : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.



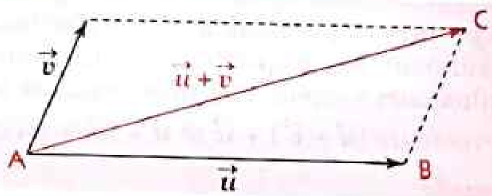
Ce résultat légitime la définition suivante.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs.

A, B, C étant des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$,

on pose : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

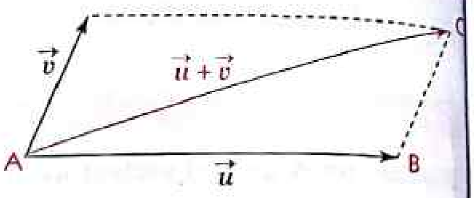
Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition.

Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Démonstration

Soit (A,B) un représentant de $\vec{u}$, (B,C) un représentant de $\vec{v}$.
(A,C) est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$.



D'après l'inégalité triangulaire pour les distances, on a :

AC $\leqslant$ AB + BC.

D'où : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition

- **Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, λ un nombre réel non nul.**

Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :

– pour direction celle de $\vec{u}$;

– pour sens celui de $\vec{u}$ si λ est positif, celui de $-\vec{u}$ si λ est négatif ;

– pour norme $|\lambda|\ \|\vec{u}\|$.

- **On pose, par ailleurs, pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ :**

$0\,\vec{u} = \vec{0}$ et $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Remarque

Par définition, pour tout vecteur $\vec{u}$: $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\ \|\vec{u}\|$.
On n'oubliera pas la valeur absolue. Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\lambda < 0$, l'égalité $\|\lambda\vec{u}\| = \lambda\|\vec{u}\|$ est fausse.

Calcul vectoriel

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous nombres réels λ et μ, on a :

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;	**(2)** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
(3) $(\lambda + \mu)\,\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$;	**(4)** $\lambda\,(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$;
(5) $\lambda\,(\mu\vec{u}) = (\lambda \times \mu)\,\vec{u}$;	**(6)** $1\,\vec{u} = \vec{u}$.

Ces propriétés sont admises.

Ces propriétés permettent de justifier les règles usuelles de calcul sur les vecteurs.
Notamment, les propriétés (1) et (2) permettent de justifier la règle suivante : pour calculer une somme de plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper les différents termes.
Les vecteurs $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ et $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ se notent : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Exemple

$4\vec{u} - \vec{v} + 6\vec{w} + 3\vec{v} - 2(\vec{u} + 3\vec{w})$

$= 4\vec{u} - \vec{v} + 6\vec{w} + 3\vec{v} - 2\vec{u} - 2(3\vec{w})$	d'après (4)
$= 4\vec{u} - \vec{v} + 6\vec{w} + 3\vec{v} - 2\vec{u} - 6\vec{w}$	d'après (5)
$= 4\vec{u} - 1\vec{v} + 6\vec{w} + 3\vec{v} - 2\vec{u} - 6\vec{w}$	d'après (6)
$= (4\vec{u} - 2\vec{u}) + (3\vec{v} - 1\vec{v}) + (6\vec{w} - 6\vec{w})$	d'après (1) et (2)
$= (4 - 2)\vec{u} + (3 - 1)\vec{v} + (6 - 6)\vec{w}$	d'après (3)
$= 2\vec{u} + 2\vec{v} + 0\vec{w}$	
$= 2\vec{u} + 2\vec{v}$	d'après la définition de $\lambda\vec{u}$ avec $\lambda = 0$
$= 2(\vec{u} + \vec{v})$	d'après (4)

En pratique, on saute les différentes étapes du calcul et on écrit directement :

$$4\vec{u} - \vec{v} + 6\vec{w} + 3\vec{v} - 2(\vec{u} + 3\vec{w}) = 4\vec{u} - \vec{v} + 6\vec{w} + 3\vec{v} - 2\vec{u} - 6\vec{w}$$
$$= 2\vec{u} + 2\vec{v}$$
$$= 2(\vec{u} + \vec{v})$$

Propriétés

(7) $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ **ou** $\vec{u} = \vec{0}$; **(8)** $\lambda\vec{u} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ **et** $\vec{u} \neq \vec{0}$.

La propriété (7) est une conséquence immédiate de la définition. La propriété (8) lui est équivalente comme nous allons le voir dans le point de logique qui suit.

L

Soit (p), (q), (r) des propositions, (non p), (non q) , (non r) leurs négations. Par exemple, la négation de ($\lambda = 0$) est ($\lambda \neq 0$).

(p)	$\lambda = 0$	ABCD est un parallélogramme
(q)	$\vec{u} = \vec{0}$	AC = BD
(r)	$\lambda\vec{u} = \vec{0}$	ABCD est un rectangle
	(r) $\Leftrightarrow$ (p) **ou** (q)	(r) $\Leftrightarrow$ (p) **et** (q)

- ($\lambda = 0$ **ou** $\vec{u} = \vec{0}$) est vraie lorsqu'au moins l'une des propositions ($\lambda = 0$) et ($\vec{u} = \vec{0}$) est vérifiée, les deux pouvant l'être simultanément.
- (ABCD est un parallélogramme **et** AC = BD) est vraie lorsque les deux propositions (ABCD est un parallélogramme) et (AC = BD) sont vérifiées simultanément.

(non p)	$\lambda \neq 0$	ABCD n'est pas un parallélogramme
(non q)	$\vec{u} \neq \vec{0}$	AC $\neq$ BD
(non r)	$\lambda\vec{u} \neq \vec{0}$	ABCD n'est pas un rectangle
	(non r) $\Leftrightarrow$ (non p) **et** (non q)	(non r) $\Leftrightarrow$ (non p) **ou** (non q)

- ($\lambda = 0$ **ou** $\vec{u} = \vec{0}$) est fausse lorsque les deux propositions ($\lambda = 0$) et ($\vec{u} = \vec{0}$) sont simultanément fausses.
- (ABCD est un parallélogramme **et** AC = BD) est fausse lorsqu'au moins une des propositions (ABCD est un parallélogramme) et (AC = BD) est fausse.
- D'une manière générale, on peut retenir que :
la négation de [(p) **ou** (q)] est [(non p) **et** (non q)] ;
la négation de [(p) **et** (q)] est [(non p) **ou** (non q)].

Exemples

- La négation de (x inférieur à y **ou** égal à y) est (x non inférieur à y **et** différent de y). Donc, la négation de ($x \leqslant y$) est ($x > y$). On démontre de même que la négation de ($x < y$) est ($x \geqslant y$).
- La négation de ($-1 \leqslant x$ et $x < 1$) est ($-1 > x$ ou $x \geqslant 1$).

Donc, la négation de ($-1 \leqslant x < 1$) est ($x < -1$ ou $x \geqslant 1$).

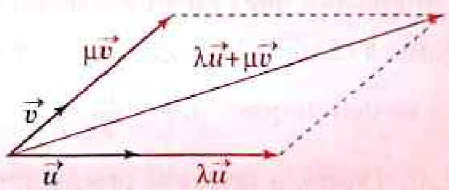
1.3. Combinaisons linéaires

Combinaisons linéaires

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. Tout vecteur de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, où λ et μ sont des nombres réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

λ et μ sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



D'une manière plus générale, on appelle combinaison linéaire de n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$ tout vec teur de la forme $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels, appelés coef ficients.

Vecteurs colinéaires

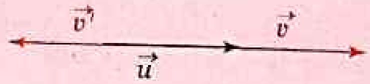
Définition

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires dans les deux cas suivants :

lorsque l'un d'eux au moins est $\vec{0}$

ou bien

lorsqu'ils ont même direction.



Remarque

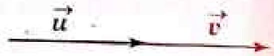
$\vec{0}$ est colinéaire à n'importe quel vecteur.

Propriété 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

• $\lambda > 0$



• $\lambda < 0$

Cette propriété est une conséquence immédiate d'une propriété vue en classe troisième.

Remarque

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\vec{v} \neq \vec{0}$, il existe un nombre réel λ unique tel que : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Propriété 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle sans que ses coefficients soient tous les deux nuls.

Cette propriété peut s'exprimer ainsi :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un couple $(\lambda ; \mu) \neq (0 ; 0)$ tel que : $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

D'après la propriété précédente, il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

On en déduit : $\lambda\vec{u} - 1\vec{v} = \vec{0}$ ou $1\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$.

Ce sont bien des combinaisons linéaires nulles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

- Supposons que : $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$, où λ et μ sont des nombres réels non tous les deux nuls.

Quitte à changer les notations, on peut supposer que $\lambda \neq 0$.

On en déduit que : $\vec{u} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\vec{v}$.

D'où, d'après la propriété précédente : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, λ et μ deux nombres réels. Les deux énoncés suivants sont équivalents.

(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

(2) $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0$.

Démonstration

(2) signifie qu'il n'existe pas de combinaison linéaire nulle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coefficients ne sont pas tous les deux nuls. La propriété 3 est donc une autre formulation de la propriété 2.

Vecteurs directeurs d'une droite

En classe de troisième, on a appelé vecteur directeur d'une droite $(\mathscr{D})$ tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $(\mathscr{D})$ et (AB) soient parallèles. La direction d'un vecteur non nul $\vec{u}$ étant celle de toute droite (AB) où (A,B) est un représentant de $\vec{u}$, cette définition est équivalente à la suivante.

Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite $(\mathscr{D})$ tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant même direction que $(\mathscr{D})$.

On dira que $(\mathscr{D})$ est dirigée par $\vec{u}$.

Remarques

- *Si $(\mathscr{D})$ est une droite dirigée par $\vec{u}$, les vecteurs directeurs de $(\mathscr{D})$ sont les vecteurs $k\vec{u}$ où k est un nombre réel non nul. Une droite admet donc une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires entre eux.*
- *Si A et B sont des points d'une droite $(\mathscr{D})$ dirigée par $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.*

Vecteurs unitaires

Définition

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$.

Ces deux vecteurs sont opposés.

Démonstration

Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est de la forme $\lambda\vec{u}$ où λ appartient à $\mathbb{R}$.

$$\|\lambda\vec{u}\| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda|\,\|\vec{u}\| = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |\lambda| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$$

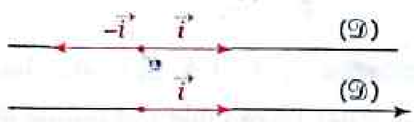
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{1}{\|\vec{u}\|}.$$

Il n'y a donc que deux vecteurs de norme 1 colinéaires à $\vec{u}$ que l'on convient d'écrire :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad \text{et} \quad -\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Remarques

- *Une droite admet deux vecteurs directeurs unitaires opposés.*
- *Choisir l'un d'eux revient à orienter la droite.*



Scanned by CamScanner

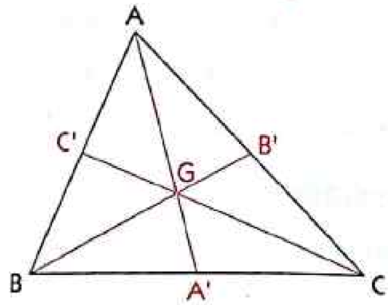
Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

On sait, depuis le premier cycle, que les médianes [AA'], [BB'] et [CC'] sont concourantes en un point G, appelé centre de gravité, qui vérifie :

$AG = \frac{2}{3}\ AA'\ ;\ BG = \frac{2}{3}\ BB'\ ;\ CG = \frac{2}{3}CC'.$

Nous allons voir une autre caractérisation de G.



Propriété

Le centre de gravité d'un triangle ABC est l'unique point G tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Démonstration guidée

Soit G le centre de gravité de ABC.

- Démontrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
- En déduire que : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$, puis $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Démontrons que le point G est unique. Soit M un point tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- En faisant apparaître le point G à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que : $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$.
- En déduire que M = G.
- Conclure.

M Pour démontrer qu'il existe un seul objet vérifiant une propriété, on peut considérer qu'il en existe deux et démontrer qu'ils sont égaux.

1.4. Travaux dirigés

1. Soit ABCD un quadrilatère, λ un nombre réel non nul et différent de 1, M, N, P, Q les points tels que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = (1 - \lambda)\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ} = (1 - \lambda)\overrightarrow{DA}$.

Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

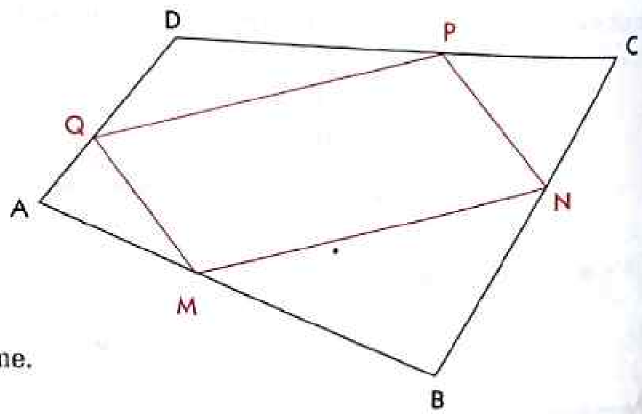
Solution

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\\ &= -\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{BC}\\ &= (1 - \lambda)\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

On calcule de la même manière $\overrightarrow{QP}$:

$\overrightarrow{QP} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AC}.$

D'où : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. MNPQ est donc un parallélogramme.



2. Soit A, B, C trois points non alignés.

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$.

Solution guidée

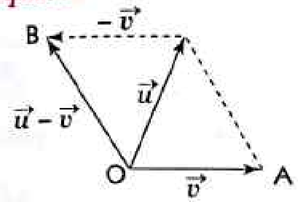
L'expression $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ suggère d'utiliser le centre de gravité G du triangle ABC.

- En introduisant G, à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
- En déduire : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow GM = 4$.
- Conclure.

3. Construire deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 1$. Quelle valeur maximale peut prendre $\|\vec{u}\|$?

Solution

Esquisse



Analyse

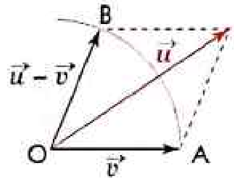
- $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v}\| = 1$. Donc, les points A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.
- On constate que : $\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$.
- On peut donc construire d'abord $\vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$, puis faire la somme de ces deux vecteurs pour obtenir $\vec{u}$.

Programme de construction

- Choisir arbitrairement deux points A et B distincts sur le cercle de centre O et de rayon 1.
- Construire $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

En posant $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, on a : $\overrightarrow{OB} = \vec{u} - \vec{v}$.
D'où : $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Construction



Il semblerait géométriquement que la norme de $\vec{u}$ sera maximale lorsqu'on aura : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}$.
C'est-à-dire : $\vec{u} = 2\vec{v}$. Dans ce cas : $\|\vec{u}\| = 2$.

Démontrons donc que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant les hypothèses, on a : $\|\vec{u}\| \leqslant 2$.

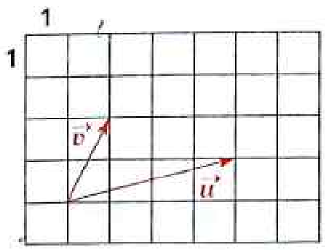
$\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{u}\| \leqslant \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|$ d'après l'inégalité triangulaire ;

$\Rightarrow \quad \|\vec{u}\| \leqslant 2$ car $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Exercices

1.a Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant les vecteurs représentés sur la figure ci-dessous.

(Les carrés du quadrillage ont pour aire 1.)



1.b Soit ABC un triangle, λ un nombre réel non nul, A', B', C' tels que :
$\overrightarrow{BA'} = \lambda\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} = \lambda\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité.

1.c Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, A, B, C trois points tels que :
$\overrightarrow{AB} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$; $\overrightarrow{AC} = 5\vec{u} - 4\vec{v}$.
Pour tous nombres réels λ et μ, on considère le point M tel que : $\overrightarrow{BM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
Quelles relations doivent vérifier λ et μ pour que :
1) A, B, M soient alignés ?
2) ABCM soit un parallélogramme ?

1.d Soit A et B deux points distincts, I le milieu de [AB]. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
1) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}$;
2) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| = 1$.

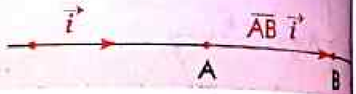
2 Mesure algébrique

2.1. Présentation

Soit A, B, C trois points.
On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Par contre, AB + BC n'est égal à AC que si B appartient à [AC].
Nous allons définir un nouvel outil qui permettra de préciser non seulement la distance entre deux points A et B d'une même droite, mais aussi leur position relative.

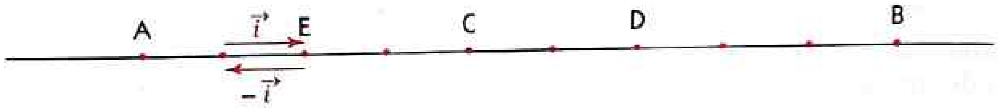
Définition

Soit ($\mathscr{D}$) une droite orientée par un de ses deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$.
A et B étant deux points de ($\mathscr{D}$), on appelle mesure algébrique de (A,B) relativement à $\vec{i}$, l'unique nombre réel, noté $\overline{AB}$, tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$.



Exemple

Soit ($\mathscr{D}$) une droite et $\vec{i}$ l'un de ses vecteurs directeurs unitaires.
On considère les points A, B, C, D, E suivants :



Relativement à $\vec{i}$: $\overline{AB} = 9$; $\overline{BC} = -5$; $\overline{CD} = 2$; $\overline{DE} = -4$; $\overline{AE} = 2$.
Relativement à $-\vec{i}$: $\overline{AB} = -9$; $\overline{BC} = 5$; $\overline{CD} = -2$; $\overline{DE} = 4$; $\overline{AE} = -2$.

Remarques

- *Ces mesures sont dites algébriques car, contrairement aux distances, elles peuvent être négatives.*
- *Soit A, B deux points d'une droite ($\mathscr{D}$) et $\vec{i}$ l'un de ses vecteurs directeurs unitaires. Les mesures algébriques de (A,B) relativement à $\vec{i}$ et à $-\vec{i}$ sont opposées. En effet, si $\overline{AB}$ est la mesure algébrique de (A,B) relativement à $\vec{i}$, alors :* $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$
  $= (-\overline{AB})(-\vec{i})$.
- *$\overline{AB}$ ne peut être définie sans que la droite (AB) ne soit orientée.*

2.2. Propriétés

Conséquences immédiates

Soit ($\mathscr{D}$) une droite orientée par un de ses deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$.
Pour tous points A, B, C de ($\mathscr{D}$), tout nombre réel λ, on a :

(1) $|\overline{AB}| = AB$; **(2)** $\overline{BA} = -\overline{AB}$;

(3) **lorsque A et B sont distincts :**
- $\overline{AB} = AB$ **si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de même sens ;**
- $\overline{AB} = -AB$ **si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraires ;**

(4) $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$; **(5)** $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} = \lambda\,\overline{AB}$;

(6) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ **(relation de Chasles).**

Démonstration

Toutes ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition. Nous ne démontrerons que les propriétés (1) et (6).

(1) $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overline{AB}\,\vec{i}\| = |\overline{AB}|\,\|\vec{i}\| = |\overline{AB}|.$

(6) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overline{AB}\vec{i} + \overline{BC}\vec{i}$

$= (\overline{AB} + \overline{BC})\vec{i}.$

D'où, par définition : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Remarques

- *La relation $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ n'a de sens que si les points A, B, C sont alignés.*
- *La relation AB + BC = AC n'est vérifiée que si B appartient à [AC]. Par contre, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ est vraie pour tous points A, B, C d'une droite ($\mathcal{D}$).*

La propriété suivante permet d'effectuer certains calculs sans préciser l'orientation choisie sur ($\mathcal{D}$).

Propriété

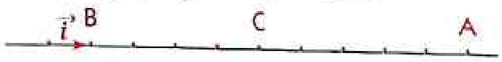
Pour des points appartenant à une même droite, le produit et le quotient de deux mesures algébriques sont indépendants de l'orientation de la droite.

Démonstration

Les mesures algébriques relativement à $\vec{i}$ et à $-\vec{i}$ sont des nombres opposés. Donc, d'après la règle des signes, le produit (respectivement le quotient) de deux mesures algébriques relativement à $\vec{i}$ est le même que celui relativement à $-\vec{i}$.

Exercices

2.a Lire sur le graphique $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.



2.b Sur une droite orientée par un vecteur directeur unitaire $\vec{i}$, placer trois points A, B, C tels que : $\overline{AB} = -3$; $\overline{AC} = 2$.
Calculer $\overline{CB}$.

2.c Est-il possible de trouver trois points A, B, C d'une même droite tels que :
$\overline{AB} = \overline{BC}$ et $\overline{AC} = -4$?

2.d Déterminer relativement à $\vec{i}$, puis à $-\vec{i}$:
$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB} \times \overline{AC}$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

3 Bases et repères

3.1. Bases de $\mathcal{V}$

Coordonnées d'un vecteur

Propriété fondamentale

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul couple de nombres réels $(x\,;\,y)$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Cette propriété signifie que tout vecteur peut se décomposer de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$, pourvu que ceux-ci ne soient pas colinéaires.

Démonstration

• Soit $\vec{u}$ un vecteur. Démontrons que $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit (O,I), (O,J), (O,M) des représentants respectifs des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}$, H le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ), K le projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI).

Si M est sur (OI), alors K est en O et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$. Si M est sur (OJ), alors H est en O et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK}$.

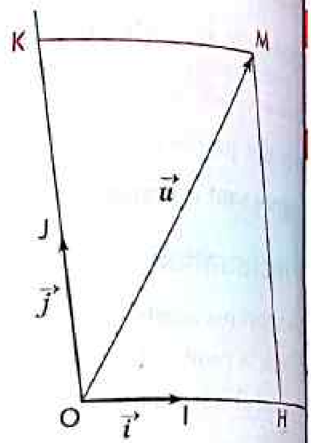
Si M n'est ni sur (OI) ni sur (OJ), OHMK est un parallélogramme.

On a dans tous les cas : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$.

$\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$. Donc il existe un nombre réel x tel que : $\overrightarrow{OH} = x\,\overrightarrow{OI}$.

Il existe, pour la même raison, un nombre réel y tel que : $\overrightarrow{OK} = y\,\overrightarrow{OJ}$.

On en déduit : $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$. C'est-à-dire : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



• Démontrons que cette décomposition est unique.

Soit $(x' ; y')$ un couple de nombres réels tels que : $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} &\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}\\ &\Rightarrow (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} = \vec{0}\\ &\Rightarrow x - x' = 0 \text{ et } y - y' = 0\\ &\Rightarrow x = x' \text{ et } y = y'.\end{aligned}$$

Le couple $(x ; y)$ est donc unique.

La propriété précédente justifie les définitions qui suivent.

Définitions

- **Tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires est appelé base de $\mathcal{V}$.**
- **Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$ et $\vec{u}$ un vecteur.**

Le seul couple de nombres réels $(x ; y)$ vérifiant $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On écrit : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.

Remarque

Dire « on munit $\mathcal{V}$ de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ » signifie que, sauf mention contraire, les coordonnées de tout vecteur de $\mathcal{V}$ sont exprimées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On écrit alors simplement : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ deux vecteurs.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\,'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors : $\vec{u} + \vec{u}\,'\begin{pmatrix}x + x'\\y + y'\end{pmatrix}$ et $(\lambda\,\vec{u})\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Démonstration

On a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u}\,' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

• $\vec{u} + \vec{u}\,' = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j})$
$\quad = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$.

• $\lambda\vec{u} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j})$
$\quad = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$.

D'où le résultat.

Bases orthonormées

Définitions

• Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires ou si l'un au moins est nul. Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on note : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

• Une base est dite orthonormée lorsqu'elle est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux.

$(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée si et seulement si $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, λ et μ deux nombres réels. On a : $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \lambda\vec{u} \perp \mu\vec{v}$.

Démonstration

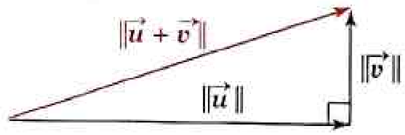
Si les vecteurs $\lambda\vec{u}$ et $\mu\vec{v}$ sont tous les deux non nuls, leurs directions sont respectivement les mêmes que celles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ils sont donc orthogonaux.

Si l'un des vecteurs $\lambda\vec{u}$ ou $\mu\vec{v}$ est nul, la propriété est évidente.

Remarque

En utilisant les normes de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ pour écrire le théorème de Pythagore et sa réciproque, on obtient :

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.



Expression de la norme dans une base orthonormée

Propriété

Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans une base orthonormée, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Démonstration guidée

On a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

- Que peut-on dire des vecteurs $x\vec{i}$ et $y\vec{j}$?
- En utilisant la remarque précédente sur le théorème de Pythagore, démontrer que : $\|\vec{u}\|^2 = |x|^2 \|\vec{i}\|^2 + |y|^2 \|\vec{j}\|^2$.
- Conclure.

Remarque

Cette propriété n'est pas applicable lorsque la base n'est pas orthonormée.

3.2. Déterminant de deux vecteurs

Il a été admis en classe de troisième que deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}'\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. Cette propriété nous conduit à introduire un nouvel outil mathématique : le déterminant.

Définitions

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{u}')$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le nombre réel $xy' - yx'$.

On note : det $(\vec{u}, \vec{u}') = xy' - yx'$.

Pour calculer un déterminant, on dispose les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de la façon suivante : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

On effectue les produits des coefficients suivant les diagonales comme l'indique la figure ci-contre, puis la différence de ces produits.

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

On écrit : det $(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Théorème

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

- Démontrons que si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, alors det $(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.

  – Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $x = y = 0$. On a bien det $(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.

  – Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$.

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{u}') = x\lambda y - y\lambda x$$

$$\Rightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{u}') = 0.$$

- Démontrons que si det $(\vec{u}, \vec{u}') = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, il est évident que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires. Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$.

– Si $x \neq 0$, on pose : $\lambda = \dfrac{x'}{x}$.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \quad &\Rightarrow \quad xy' - yx' = 0 \\ &\Rightarrow \quad xy' - y\lambda x = 0 \qquad \text{car } x' = \lambda x \\ &\Rightarrow \quad y' - y\lambda = 0 \qquad \text{car } x \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad y' = \lambda y. \end{aligned}$$

D'où : $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$.

– Si $x = 0$, alors $y \neq 0$. On obtient le même résultat en posant : $\lambda = \dfrac{y'}{y}$.

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont bien colinéaires.

3.3. Repères du plan

Une autre présentation

Si (O, I, J) est un repère du plan, alors, les points O, I, J n'étant pas alignés, le couple $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base de $\mathcal{V}$.

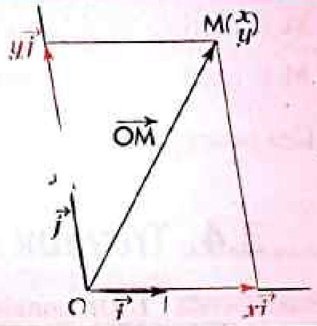
Réciproquement, pour tout point O et toute base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, il existe un couple unique de points (I,J) tels que : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. (O, I, J) est un repère du plan.

Un repère peut donc être aussi défini par la donnée d'un point et d'une base de $\mathcal{V}$.

Définitions

- On appelle repère du plan :
  - ou bien un triplet (O, I, J) de points non alignés ;
  - ou bien un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
- Le point O est appelé origine du repère.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$;
signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Remarques

- *Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ l'est.*
- *$(O, \vec{i})$ est un repère de l'axe des abscisses et $(O, \vec{j})$ un repère de l'axe des ordonnées.*

Calculs dans un repère

Propriétés

(1) Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.

(2) Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si M est le milieu de [AB],

$$\text{alors } M\begin{pmatrix}\dfrac{x_A + x_B}{2}\\[2mm]\dfrac{y_A + y_B}{2}\end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

(3) Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si G est le centre de gravité de ABC,

$$\text{alors } G\begin{pmatrix}\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}\\[2mm]\dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Les propriétés (1) et (2) ont été démontrées dans le premier cycle.

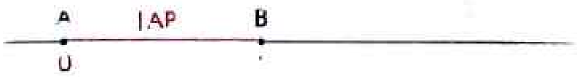
Démonstration guidée de la propriété (3)

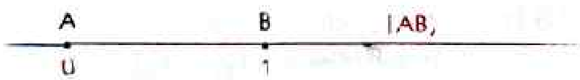
On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

- En introduisant O à l'aide de la relation de Chasles dans la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, démontrer que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
- Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OG}$?
- Conclure.

Caractérisations vectorielles d'un segment, d'une demi-droite

Soit A, B deux points distincts. Un point M appartient au segment [AB] (respectivement à la demi-droite [AB)) si et seulement si l'abscisse de M sur la droite (AB) munie du repère (A,B) appartient à l'intervalle [0 ; 1] (respectivement est positive).





Propriétés

M $\in$ [AB] $\Leftrightarrow$ il existe t appartenant à [0 ; 1] tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

M $\in$ [AB) $\Leftrightarrow$ il existe t appartenant à $\mathbb{R}^+$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

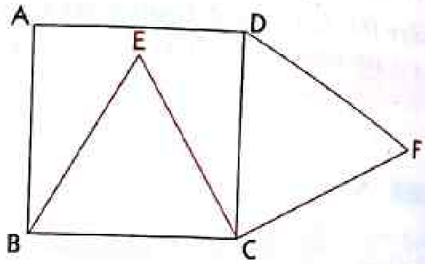
Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la définition d'un segment et d'une demi-droite.

3.4. Travaux dirigés

1. On considère la figure ci-dessous :

ABCD est un carré ; BCE et CDF sont des triangles équilatéraux. Démontrer que A, E, F sont alignés.

Solution guidée



On considère le repère (B,C,A).

- Quelles sont les coordonnées de A, B, C, D ?
- Calculer les coordonnées de E et F.
- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
- Démontrer que det $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = 0$.
- Conclure.

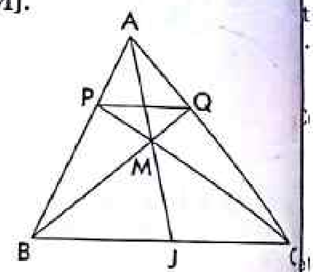
2. Soit un triangle ABC, J le milieu de [BC].

M est un point de (AJ) distinct de A et tel que J ne soit pas le milieu de [AM].

(CM) coupe (AB) en P et (BM) coupe (AC) en Q.

Démontrer que les droites (PQ) et (BC) sont parallèles.

Solution guidée



Vérifier que si M est en J, alors (PQ) et (BC) sont confondues.

On suppose que M est distinct de J et on se place dans le repère (M, B, C).

- Quelles sont les coordonnées de M, B, C et J ?
- Démontrer que les coordonnées de A sont de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.
- Déterminer les coordonnées de P, point d'intersection des droites (CM) et (AB).
- Déterminer les coordonnées de Q, point d'intersection des droites (BM) et (AC).
- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
- Conclure.

Remarques

- *Si J est le milieu de [AM], les droites (BM) et (AC) sont parallèles, de même que (CM) et (AB) ; les points P et Q n'existent pas.*
- *Si M est en A, les points P et Q sont confondus.*

Exercices

3.a Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer : det $(\vec{u}, \vec{v})$; det $(\vec{v}, \vec{u})$; det $(\vec{u}, -\vec{v})$; det $(\vec{u}, \vec{w})$; det $(\vec{u}, \vec{v}-\vec{w})$; det $(\vec{u}+3\vec{w}, 2\vec{v}-4\vec{w})$.

3.b Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?
3. Soit $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?

Exercices

APPRENTISSAGE

Vecteurs

1 On donne la figure suivante :

Compléter les égalités :
$\overrightarrow{BD} = \dots \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD} = \dots \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD} = \dots \overrightarrow{BC}$;
$\overrightarrow{BC} = \dots \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{DB}$.

2 On donne : $\overrightarrow{MP} = -4\,\overrightarrow{MN}$. Compléter :
$\overrightarrow{NM} = \dots \overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{PN} = \dots \overrightarrow{PM}$.
On donne : $\overrightarrow{SU} = \frac{6}{5}\overrightarrow{ST}$. Compléter :
$\overrightarrow{TU} = \dots \overrightarrow{TS}$; $\overrightarrow{UT} = \dots \overrightarrow{US}$; $\overrightarrow{ST} = \dots \overrightarrow{TU}$.

3 Soit ABC un triangle quelconque.
1. Construire les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$.
2. Démontrer que D est le milieu du segment [CE].

4 Soit ABC un triangle quelconque.
Construire les points M et N tels que :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \end{cases}.$$

5 Soit ABCD un quadrilatère dont les côtés [AD] et [BC] ont pour milieux respectifs I et J.
Démontrer que : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

6 Développer et réduire :
$\vec{a} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + 3(\vec{u} + 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{v})$
$\vec{b} = 4(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(3\vec{u} - \vec{v}) + 3\vec{u}$
$\vec{c} = 2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(\vec{w} + 2\vec{v})$
$\vec{d} = \vec{u} + 2(3\vec{v} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{v})$

7 On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \end{cases}.$$
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires au vecteur $\vec{w}$.

8 Soit ABC un triangle et I un point de (AB).
1. La parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J.
La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en K.
La parallèle à (AC) passant par K coupe (AB) en L.
Démontrer que L = I si et seulement si I est le milieu de [AB].
2. La parallèle à (BC) passant par L coupe (AC) en M.
La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en N.
Démontrer que les droites (IN) et (AC) sont parallèles.

9 On donne un rectangle ABCD. On considère un point quelconque M situé à l'intérieur du rectangle, bords compris. On trace les droites (Δ) et (Δ') passant par M, respectivement parallèles à (AB) et à (AD). (Δ) coupe (AD) en E et (BC) en F. (Δ') coupe (AB) en G et (DC) en H.
Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GF}$.
Même question avec un parallélogramme.

10 Soit un triangle ABC, M et N les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].
E est le symétrique de B par rapport à A, et F est le symétrique de A par rapport à M.
Démontrer que N est le milieu de [EF].

11 Soit ABCD un quadrilatère. I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD].
1. Démontrer que les segments [IK], [JL] et [MN] ont même milieu G.
2. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

12 Soit ABC un triangle, M un point n'appartenant ni à (AB), ni à (AC), ni à (BC).
1. Construire les points A', B' et C' tels que MABA', MBCB' et MCAC' soient des parallélogrammes.
2. Démontrer que M est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

13 Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des segments [AC] et [AB]. k est un nombre réel, D et E sont les points du plan définis par $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA}$. I est le milieu de [DE].
Démontrer que B', C' et I sont alignés.

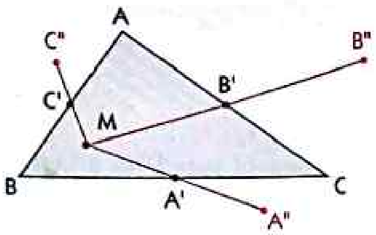
14 Soit ABC un triangle.
M est le milieu de [AB] et I est le milieu de [MC].
1. Construire le point K tel que : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
2. Démontrer que les points A, I et K sont alignés.

15 Soit ABC un triangle.
1. Placer les points I, J et K tels que :
$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
2. Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

16 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles.
3. Soient S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN].
Démontrer que les points A, S et T sont alignés.

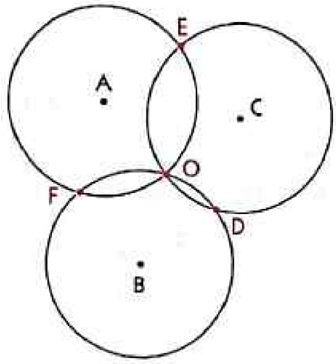
17 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que (BN) et (MC) sont parallèles.

18 Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB], M un point intérieur au triangle ABC et A'', B'', C'' les symétriques respectifs de M par rapport à A', B', C'.



1. Démontrer que : $\overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{CA''}$.
2. Démontrer que les droites (AA"), (BB") et (CC") sont concourantes.

19 Sur la figure ci-dessous, les trois cercles ont même rayon et pour centres A, B, C.
O est un point commun aux trois cercles.



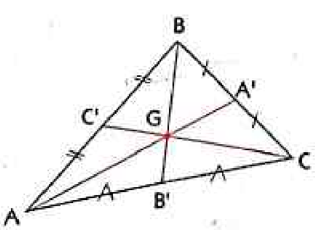
1. Que représente le point O pour le triangle ABC ?
2. Quelle est la nature des quadrilatères AOBF, AOCE et BOCD ?
3. Démontrer que : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$.
4. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle DEF.

20 Sachant que $\|\vec u\| = 2\|\vec v\|$, $\|x\vec u\| = \|y\vec v\|$ et $\vec v \neq \vec 0$, quelle relation peut-on écrire entre les deux nombres réels x et y ? Les vecteurs $\vec u$ et $\vec v$ sont-ils nécessairement colinéaires ?

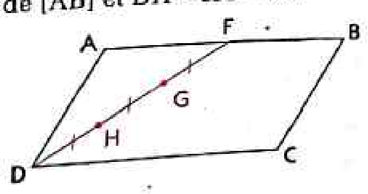
21 Soit $\vec u$ et $\vec v$ deux vecteurs tels que $\|\vec u\| \leqslant 3$ et $\|\vec v\| \leqslant 2$. Démontrer que $\|2\vec u - 3\vec v\| \leqslant 12$.

Bases et repères

22 On donne le triangle ABC et G son centre de gravité.
Quelles sont les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{GC'}$,
1. dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?
2. dans la base $(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC})$?



23 Soit ABCD un parallélogramme. F est le milieu de [AB] et DH = HG = GF.



1. Que peut-on conjecturer sur les points A, G, C ?
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A}$… dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$.
3. Démontrer la conjecture.

24 Soit $(\vec\imath, \vec\jmath)$ une base de $\mathcal{V}$.
Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que le couple $(\vec u, \vec v)$ est une base de $\mathcal{V}$ et déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec\imath$, $\vec\jmath$, $-4\vec\imath + \vec\jmath$, $3\vec\imath + 2\vec\jmath$ dans cette base.
1. $(\vec u, \vec v) = (\vec\jmath, \vec\imath)$;
2. $(\vec u, \vec v) = (-\vec\imath, -\vec\jmath)$;
3. $(\vec u, \vec v) = (2\vec\imath, -\vec\jmath)$;
4. $(\vec u, \vec v) = (\vec\imath, \vec\imath + \vec\jmath)$.

25 Soit $(\vec\imath, \vec\jmath)$ une base de $\mathcal{V}$.
1. Démontrer que :
$(\vec\imath + \vec\jmath, \vec\jmath)$, $(2\vec\imath, 2\vec\jmath)$, $(\vec\imath - \vec\jmath, \vec\imath + \vec\jmath)$ et $(\vec\jmath, -\vec\imath)$ sont des bases de $\mathcal{V}$.
2. Soit $\vec u\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec v\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés par leur coordonnées dans $(\vec\imath, \vec\jmath)$.
a) Calculer les coordonnées de $\vec u$ et de $\vec v$ dans chacune des bases :
$(\vec\imath + \vec\jmath, \vec\jmath)$, $(2\vec\imath, 2\vec\jmath)$, $(\vec\imath - \vec\jmath, \vec\imath + \vec\jmath)$ et $(\vec\jmath, -\vec\imath)$.
b) Calculer $\det(\vec u, \vec v)$ dans chacune de ces bases.
3. Démontrer que : si $\det(\vec u, \vec v) = 0$ dans l'une des bases alors $\det(\vec u, \vec v) = 0$ dans les autres bases.

26 $(\vec\imath, \vec\jmath)$ et $(\vec u, \vec v)$ sont deux bases de $\mathcal{V}$ telles que $\vec\jmath = \frac{7}{6}\vec u + \vec v$ et $\vec u = \vec\imath + 2\vec\jmath$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec\imath$ et $\vec\jmath$ dans la base $(\vec u, \vec v)$, et les coordonnées des vecteurs $\vec u$ et $\vec v$ dans la base $(\vec\imath, \vec\jmath)$.

27 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs de [AD], [AB], [BC] et [CD].
Justifier que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EO})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Déterminer dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GD}$.

28 Soit A et B deux points distincts.
1. Démontrer qu'il existe un unique point G du plan tel que : $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec 0$.
(On pourra exprimer le vecteur $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.)
2. Le plan est rapporté au repère $(O, \vec\imath, \vec\jmath)$.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
On donne $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$.
Placer le point G et calculer ses coordonnées.

29 Soit le parallélogramme ABCD et I le point d'intersection de ses diagonales.
1. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec u$ défini par :
$\vec u = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) - 2(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA})$
2. Construire le point E défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CE}$ forment-ils une base de $\mathcal{V}$?

3. Donner les coordonnées des points B, C, D, E et I dans chacun des repères (A, B, D) et $(B, \vec{AB}, \vec{AC})$.

30 Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne le point $A\binom{-2}{3}$, les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.
1. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Quelles sont les coordonnées de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?
3. Un point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (x',y') dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.
Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

31 $\mathcal{V}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont-ils la même direction ? Si oui, préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

1. $\vec{u}\binom{-1}{1}$ et $\vec{v}\binom{3}{5}$;
2. $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{6}{9}$;
3. $\vec{u}\binom{-3}{5}$ et $\vec{v}\binom{6}{-10}$;
4. $\vec{u}\binom{a}{1}$ et $\vec{v}\binom{4}{a}$, $(a \in \mathbb{R})$.

(On discutera suivant les valeurs de a).

32 On considère un triangle ABC et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par :
$\vec{u} = (3 - \sqrt{2})\vec{AB} + \vec{AC}$ et $\vec{v} = 7\vec{AB} + (3 - \sqrt{2})\vec{AC}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

33 $\mathcal{V}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
1. Calculer : $\det(\vec{i}, \vec{j})$, $\det(-\vec{j}, 2\vec{j})$ et $\det(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$.
2. Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{c}{d}$ deux vecteurs quelconques, et k un nombre réel.
a) Comparer $\det(\vec{v}, \vec{u})$ et $\det(\vec{u}, \vec{v})$.
b) Calculer $\det(k\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de $\det(\vec{u}, \vec{v})$.
c) Soit $\vec{w}\binom{e}{f}$, démontrer que :
$\det(\vec{w}, \vec{u} + \vec{v}) = \det(\vec{w}, \vec{u}) + \det(\vec{w}, \vec{v})$.

34 $\mathcal{V}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas ci-dessous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

1. $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -9\vec{i} + 6\vec{j}$
2. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
3. $\vec{u} = (1 - \sqrt{2})\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + (1 + \sqrt{2})\vec{j}$
4. $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{v} = a\vec{i} + \vec{j}$

(On discutera suivant les valeurs du nombre réel a).

APPROFONDISSEMENT

35 Soit ABC un triangle de centre de gravité G, I le milieu de [BC].
1. Démontrer que pour tout point M du plan :
- $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$,
- $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{IA}$.

2. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ et $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ soient colinéaires ?
3. Quel est l'ensemble des points M tels que :
$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$?

36 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
1. Démontrer que : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.
2. Démontrer que pour tout point M :
$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$.
3. Y a-t-il d'autres points M de $\mathcal{P}$ tels que :
$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.
4. Déterminer le point M tel que :
$M \in \mathcal{P}, \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{BD}$.

37 Soit ABC un triangle.
1. Démontrer qu'il existe un unique point D tel que :
$\vec{DA} + \vec{DB} - \vec{DC} = \vec{0}$.
Construire le point D.
2. Démontrer que pour tout point M du plan, on a :
$\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MD}$.
3. Déterminer le point M tel que :
$M \in \mathcal{P}, \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{CB}$.
4. Déterminer le point M tel que :
$M \in \mathcal{P}, \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{AB}$.

38 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes en O et M un point n'appartenant ni à $(\mathcal{D})$, ni à $(\mathcal{D}')$.
Construire un point N de $(\mathcal{D})$ et un point P de $(\mathcal{D}')$ tels que : $\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} = \vec{0}$.

39 On considère deux points A et B tels que : $\|\vec{AB}\| = 4$.
1. Construire un point M tel que :
$\|\vec{AM}\| = 3$ et $\|\vec{AB} + \vec{AM}\| = 2$.
(On pourra introduire le point B' tel que : $\vec{AB'} = -\vec{AB}$.)
2. Peut-on construire un autre point M répondant aux mêmes conditions ?
3. Peut-on construire un point M vérifiant :
$\|\vec{AM}\| = 3$ et $\|\vec{AB} + \vec{AM}\| = 8$?

40 1. Soit le pentagone ABCDE. Soit I, J, K, L et M les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA].
Démontrer l'égalité : $\vec{MA} = \vec{JI} + \vec{LK}$.
2. Construire un pentagone dont on connaît les milieux des côtés.

41 Soit ABCD un parallélogramme et les points I et J milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
1. Démontrer que les droites (ID) et (JB) sont parallèles.
2. Construire les points M et N tels que :
$\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ et $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.
Démontrer que les points M et N appartiennent respectivement aux droites (ID) et (JB).
3. Démontrer que MINJ est un parallélogramme.
4. Soit E le point d'intersection des droites (ID) et (BC).
Démontrer que B est le milieu du segment [CE].

42 Soit $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ deux droites sécantes en O, M et N deux points distincts.

Construire les points A de $(\mathscr{D}_1)$ et B de $(\mathscr{D}_2)$ tels que :

1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MN}$; 2. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MN}$;
3. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MN}$; 4. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{MN}$.

43 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, M un point intérieur à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ une droite passant par O et ne contenant pas M.
Construire des points A de $(\mathscr{D})$ et B de $(\mathscr{C})$ tels que :
1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$;
2. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$.

44 Le plan est muni du repère (O, I, J).
K est le point de coordonnées (a,b) et S la symétrie de centre K.
1. Le point M de coordonnées (x,y) a pour image par S le point M' de coordonnées (x',y').
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que :
$x' = -x + c$ et $y' = -y + d$.
Démontrer que f est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

45 1. Soit A, B deux points distincts.
a) Placer les points C et D tels que :
$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB}$.
b) Comparer $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ et $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.
c) Soit I le milieu de [AB] ; exprimer IA^2 et $\overline{IC} \times \overline{ID}$ en fonction AB, conclure.
d) Calculer $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$;
en déduire que : $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

Note historique

Les anciens utilisaient beaucoup les mesures algébriques et notamment les relations suivantes.

Soit A, B, C, D quatre points alignés, distincts deux à deux, et I le milieu de [AB].

On dit que les points A, B, C, D forment une division harmonique ou que D est conjugué de C par rapport à A et B lorsque : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ *(1).*

On dit que les points A, B, C, D vérifient la relation de Newton lorsque : $IA^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}$ *(2).*

On dit que les points A, B, C, D vérifient la relation de Descartes lorsque :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \qquad (3).$$

2. Le but de cette question est de démontrer l'équivalence des relations (1), (2) et (3).
En reprenant les données de la note historique :
a) Vérifier que :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

b) Démontrer l'équivalence des relations (1) et (2).
(On pourra introduire le point I à l'aide de la relation de Chasles dans la formule de la division harmonique).
c) Démontrer l'équivalence des relations (1) et (3) *(on pourra introduire le point A à l'aide de la relation de Chasles dans une formule équivalente à celle de la division harmonique).*

46 Soit A, B, C trois points non alignés et I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On note respectivement a, b, c, p les distances BC, AC, AB et le périmètre du triangle ABC.
1. Parmi les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{CI}$, peut-il y en avoir deux colinéaires ?
2. Soit D le point tel que : $\overrightarrow{AD} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
(On pourra introduire les points B' et C' tels que : $\overrightarrow{AB'} = b\,\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC'} = c\,\overrightarrow{AC}$*).*
3. *a)* Démontrer qu'il existe un réel α tel que :
$(\alpha - b - c)\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
b) Démontrer de même qu'il existe un réel β tel que :
$a\,\overrightarrow{IA} + (\beta - a - c)\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
c) Démontrer que : $\alpha = \beta = p$.
d) En déduire que :
$a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Application

4. Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A\binom{1}{1}$, $B\binom{1}{4}$, $C\binom{5}{1}$ et on appelle $(\mathscr{C})$ le cercle inscrit dans le triangle ABC.
a) Déterminer les coordonnées du point K centre de $(\mathscr{C})$ et faire une figure.
b) Quel est le rayon de $(\mathscr{C})$?
c) Tracer le cercle $(\mathscr{C})$.