2

Angles orientés et Trigonométrie

Introduction

Nous avons rencontré les angles orientés en classe de seconde. L'objet de ce chapitre est d'approfondir cette notion et celles qui s'y rattachent : formules de trigonométrie et équations trigonométriques.

Photo Hachette

Astrolabe arabe du XIV^e siècle.
(Instrument servant à mesurer la position des astres et leur hauteur au-dessus de l'horizon.)

SOMMAIRE

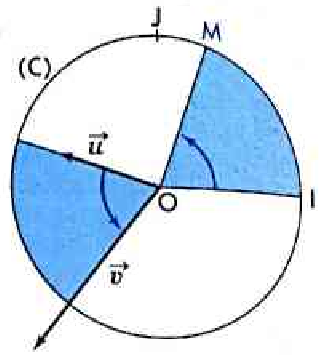
1. Angles orientés 24
2. Propriétés des angles orientés 27
3. Trigonométrie 32
4. Équations trigonométriques 37
5. Inéquations trigonométriques 41

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). (C) est le cercle trigonométrique. I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J. (T) est la tangente à (C) en I. L'unité de mesure d'angle est le radian.

1 Angles orientés

1.1. Mesures d'un angle orienté

Présentation



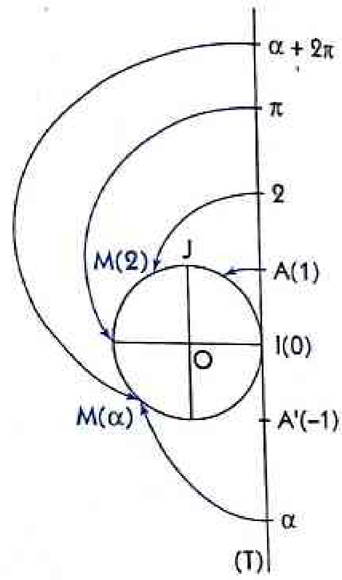
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, on a défini en classe de seconde l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et sa mesure principale α ($\alpha \in]-\pi ; \pi]$).

On a vu également qu'il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

Toutefois, on remarque que la somme des mesures principales de deux angles orientés n'est pas toujours la mesure principale d'un angle orienté ; par exemple : $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4} \notin]-\pi ; \pi]$.

On est donc amené à étendre la notion de mesure d'angle orienté.
On munit la tangente (T) du repère $(I, \overrightarrow{OJ})$. Soit A et A' les points de (T) d'abscisses respectives 1 et –1. Imaginons maintenant que (T) soit un fil inextensible que l'on enroule autour de (C) :

- dans le sens trigonométrique pour les points de la demi-droite [IA) ;
- dans le sens contraire pour les points de la demi-droite [IA').



À tout point de (T) d'abscisse x dans le repère $(I, \overrightarrow{OJ})$ on associe ainsi un point M(x) de (C).
On définit alors une application de ℝ dans (C).
Soit $\alpha \in]-\pi ; \pi]$ et M(α) son image sur (C).
α est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM(\alpha)}})$.
De plus, les points de (T) qui viennent se placer sur M(α) ont pour abscisses α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, ..., $\alpha - 2\pi$, $\alpha - 4\pi$, ...
Les points de (T) dont l'image est M(α) sont donc les points dont l'abscisse est de la forme $\alpha + k2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Cette étude justifie la définition suivante.

Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté et α sa mesure principale.
On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tout nombre réel de la forme : $\alpha + k2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Remarques

- *À tout nombre réel x correspond un unique point M de (C), donc un unique angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ dont x est l'une des mesures.*
- *Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle sont les nombres réels de la forme $x + k2\pi$, où k appartient à ℤ.*
- *Tous les nombres réels, mesures d'un même angle orienté, ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Ce point sera noté, selon les besoins, M(x), M($x + 2\pi$), M($x - 2\pi$), etc.*
- *Deux angles orientés sont égaux si et seulement si une mesure de l'un est une mesure de l'autre.*

Notations

- L'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α sera noté $\widehat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle orienté plat seront notés respectivement $\widehat{0}$ et $\widehat{\pi}$.
- Le fait qu'il existe une infinité de nombres réels, mesures d'un même angle orienté, ne permet pas de donner une notation satisfaisante à ces mesures. On écrira : soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure α.

Congruence modulo 2π

Deux mesures quelconques d'un même angle orienté diffèrent d'un multiple entier de 2π ; on dit qu'elles sont congrues modulo 2π.

Définition

Deux nombres réels x et y sont congrus modulo 2π s'ils diffèrent d'un multiple entier de 2π.

On note : $x \equiv y\ [2\pi]$ et on lit : « x est congru à y modulo 2π ».

On a : $x \equiv y\ [2\pi] \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\,2\pi$.[1]

Les propriétés suivantes s'établissent sans difficulté. Elles serviront à résoudre des équations trigonométriques.

Propriétés

Pour tous nombres réels x, y, z et a, on a :

(1) $x \equiv y\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x + a \equiv y + a\ [2\pi]$;

(2) $x \equiv y\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad -x \equiv -y\ [2\pi]$;

(3) $\begin{cases} x \equiv y\ [2\pi] \\ y \equiv z\ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \quad x \equiv z\ [2\pi]$.

Recherche de la mesure principale d'un angle orienté

1°) Déterminer la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $\frac{37\pi}{3}$ et placer sur le cercle trigonométrique le point M($\frac{37\pi}{3}$).

2°) Mêmes questions pour les angles orientés de mesures $-\frac{71\pi}{6}$ et $-\frac{119\pi}{4}$.

Solution

1°) Nous remarquons que : $\frac{37\pi}{3} = \frac{36\pi + \pi}{3} = 6 \times (2\pi) + \frac{\pi}{3}$. Donc : $\frac{37\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

De plus, $\frac{\pi}{3} \in\ ]-\pi\,;\pi]$; donc : $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2°) De même : $-\frac{71\pi}{6} = \frac{(-72+1)\pi}{6} = -6 \times (2\pi) + \frac{\pi}{6}$. Donc : $\frac{37\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

De plus, $\frac{\pi}{6} \in\ ]-\pi\,;\pi]$; donc : $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Trouvons, par une méthode générale, la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $-\frac{119\pi}{4}$.

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $\quad -\pi < \alpha \leq \pi$;

(2) $\quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \alpha = -\frac{119\pi}{4} + k\,2\pi$.

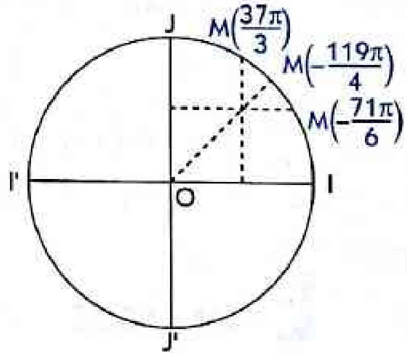
Déterminons tout d'abord k.

De (1) et (2), on déduit que : $-\pi < -\frac{119\pi}{4} + k\,2\pi \leq \pi$;

en divisant par 2π, on obtient : $-\frac{1}{2} < -\frac{119}{8} + k \leq \frac{1}{2}$;

par suite : $\frac{115}{8} < k \leq \frac{123}{8}$; d'où : $k = 15$.

Donc : $\alpha = -\frac{119\pi}{4} + 15 \times 2\pi = \frac{(-119+120)\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.



M

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté, dont une mesure a est connue, consiste à écrire $\alpha = a + k\,2\pi$, où $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités : $-\pi < a + k\,2\pi \leq \pi$.
- Puis l'on détermine α en utilisant l'égalité $\alpha = a + k\,2\pi$.

[1]. *Le symbole $\exists$ signifie : « il existe ». Ainsi, « $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k2\pi$ » signifie : « il existe un nombre entier relatif k tel que : $x = y + k2\pi$ ».*

Remarques

- *Si x est une mesure en radian d'un angle orienté, une mesure y en degré de cet angle orienté est obtenue par l'égalité : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$.*
- *Sauf indication contraire, l'unité d'angle utilisée par la suite, sera le radian.*
- *Si α est la mesure principale (en radian) d'un angle orienté et M le point image de α sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est $|\alpha|$.*

1.2. Somme de deux angles orientés

Soit $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ deux angles orientés de mesures α et β, α' et β' deux mesures quelconques de $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.

On a : $\alpha' \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha' + \beta' \equiv \alpha + \beta'\ [2\pi]$

$\beta' \equiv \beta\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta' \equiv \alpha + \beta\ [2\pi]$.

Donc : $\alpha' + \beta' \equiv \alpha + \beta\ [2\pi]$; $\alpha' + \beta'$ et $\alpha + \beta$ sont des mesures d'un même angle orienté.

Cette étude justifie la définition suivante.

Définition

Soit $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β. On appelle somme des angles orientés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$, et on note $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$, l'angle orienté dont l'une des mesures est $\alpha + \beta$.

Remarques

- *Deux angles orientés sont opposés lorsque leur somme est l'angle orienté nul ; l'opposé de $\widehat{\alpha}$ est noté $-\widehat{\alpha}$.*
On a : $\widehat{\alpha} + (-\widehat{\alpha}) = \widehat{0}$.
- *La différence de deux angles orientés est la somme du premier et de l'opposé de l'autre :*
$\widehat{\alpha} - \widehat{\beta} = \widehat{\alpha} + (-\widehat{\beta})$.
- *Les propriétés de l'addition des angles orientés sont celles de l'addition des nombres réels ; en particulier,*
$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \widehat{\beta} + \widehat{\alpha}$.

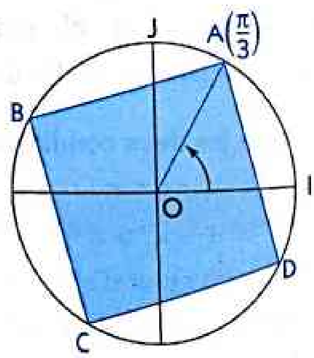
Exemples

ABCD est un carré inscrit dans (C) tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ soit l'angle droit direct et $\frac{\pi}{3}$ une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$. On a :

Angle	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$
Mesure	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$; donc : $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$;

$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$; donc : $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$.



Exercices

1.a On considère un angle orienté dont une mesure est $\frac{21\pi}{4}$. Donner quatre autres mesures de cet angle orienté, dont la mesure principale. Placer sur le cercle trigonométrique le point image de $\frac{21\pi}{4}$.

1.b Vérifier que, dans chaque cas, on a : $x \equiv y\ [2\pi]$.

a) $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{3\pi}{2}$. *c)* $x = \frac{2\pi}{3}$, $y = \frac{14\pi}{3}$.

b) $x = -\frac{5\pi}{4}$, $y = \frac{3\pi}{4}$. *d)* $x = -\frac{29\pi}{12}$, $y = \frac{67\pi}{12}$.

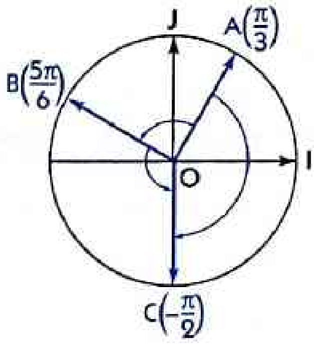
1.c On considère l'angle orienté de mesure $\frac{3\pi}{4}$. Trouver trois mesures en degré de cet angle orienté.

1.d Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). Soit A l'image du nombre réel $\frac{16\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. Quelle est la longueur de l'arc $\widehat{IA}$?

2 Propriétés des angles orientés

2.1. Relation de Chasles

Introduction



• Sur le cercle trigonométrique, placer les points A, B et C, images respectives des nombres réels $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

• Déterminer les mesures principales des angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})}$.

• Vérifier que : $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} + \widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})}$.

Cette relation se généralise à des angles orientés quelconques et conduit à la propriété suivante que nous admettons.

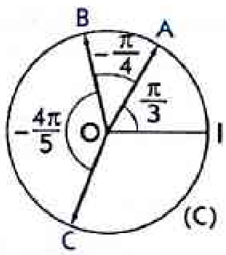
Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$.

Cette propriété est appelée relation de Chasles.

Exemples

• Soit A, B et C les points de (C) tels que $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{4\pi}{5}$ soient les mesures principales respectives des angles $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})}$, $\widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})}$.



On se propose de calculer les mesures principales respectives α et β des angles $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})}$.

– On a : $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})} + \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$.

$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})}$ a pour mesure : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$; d'où : $\alpha = \frac{7\pi}{12}$.

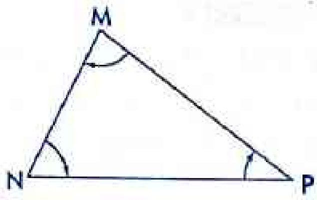
– On a : $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})} = \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})} + \widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})}$.

$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})}$ a pour mesure : $\frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{5} = \frac{83\pi}{60} = 2\pi - \frac{37\pi}{60}$; d'où : $\beta = -\frac{37\pi}{60}$.

• Soit MNP un triangle ; on a : $\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN})} + \widehat{(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP})} + \widehat{(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM})} = \hat{\pi}$.

En effet : $\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN})} + \widehat{(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP})} + \widehat{(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM})} = \widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN})} + \widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PN})} + \widehat{(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM})}$

$= \widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PM})} = \hat{\pi}$.



Conséquences

Propriété 1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ quatre vecteurs non nuls. On a : $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$.

En effet, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} + \widehat{(\vec{u}', \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}', \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$.

Propriétés 2

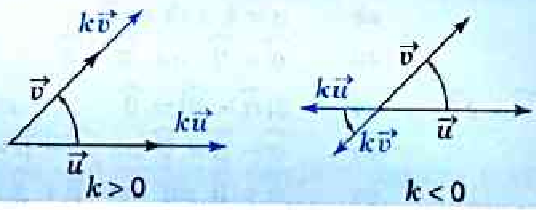
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul. On a :

(1) $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$;

(2) **si $k > 0$, alors** $\widehat{(k\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$;

(3) **si $k < 0$, alors** $\widehat{(k\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \hat{\pi}$;

(4) $\widehat{(k\vec{u}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.



Démonstration

Ces propriétés se démontrent aisément ; à titre indicatif, démontrons la propriété (3).

Si $k < 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens contraires.

Donc : $\widehat{(k\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(k\vec{u}, \vec{u})} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{\pi} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

On démontre de même que : $\widehat{(\vec{u}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{\pi}$.

Cas particulier

Pour $k = -1$, *la propriété* (3) *devient :* $\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} = \widehat{\pi} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Propriété 3

Pour tous nombres réels a et b d'images respectives A et B sur (C), $b - a$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$.

Démonstration

D'après la relation de Chasles, on a : $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})} + \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})}$

$= \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})} - \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})}$.

$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})}$ admettent pour mesures respectives a et b.

Donc, $b - a$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$.

2.2. Double d'un angle orienté

De nombreuses configurations géométriques font appel au double d'un angle géométrique, par exemple un angle inscrit et l'angle au centre correspondant. Dans le §1.2, nous avons défini la somme de deux angles orientés. Il est donc utile de définir également le double d'un angle orienté.

Définition

Soit $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ un angle orienté.

On appelle double de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, et on note $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, l'angle orienté défini par : $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Remarques

- *Le double d'un angle orienté de mesure* α *a pour mesure* 2α.
- *Soit* $\widehat{\alpha}$ *et* $\widehat{\beta}$ *deux angles orientés ; on a :* $2\widehat{\alpha} + 2\widehat{\beta} = 2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta})$.

Propriétés

Soit $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ deux angles orientés et $\widehat{\delta}$ l'angle orienté droit direct. On a :

(1) $2\widehat{\alpha} = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{0}$ **ou** $\widehat{\alpha} = \widehat{\pi}$;

(2) $2\widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta} \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ **ou** $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} + \widehat{\pi}$;

(3) $2\widehat{\alpha} = \widehat{\pi} \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\delta}$ **ou** $\widehat{\alpha} = -\widehat{\delta}$.

Démonstration

(1) $2\widehat{\alpha} = \widehat{0} \Leftrightarrow 2\alpha = k\,2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \alpha = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{0}$ ou $\widehat{\alpha} = \widehat{\pi}$.

(2) $2\widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta} \Leftrightarrow 2(\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}) = \widehat{0}$

$\Leftrightarrow \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} = \widehat{0}$ ou $\widehat{\alpha} - \widehat{\beta} = \widehat{\pi}$

$\Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ ou $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} + \widehat{\pi}$.

(3) On a : $2\widehat{\delta} = \widehat{\pi}$.

$2\widehat{\alpha} = \widehat{\pi} \Leftrightarrow 2\widehat{\alpha} = 2\widehat{\delta}$

$\Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\delta}$ ou $\widehat{\alpha} = \widehat{\delta} + \widehat{\pi}$

$\Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\delta}$ ou $\widehat{\alpha} = -\widehat{\delta}$.

Exemple

Trois points A, B et C distincts du plan sont alignés si et seulement si : $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0}$.

En effet : $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0}$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{\pi}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

$\Leftrightarrow$ A, B, C alignés.

M Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut établir que : $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0}$.

2.3. Angles orientés et cercle

Caractérisation d'un cercle

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de ce cercle.
Pour tout point M distinct de A et B, on a : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Démonstration

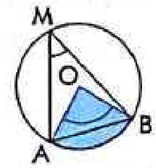
Si la corde [AB] est un diamètre, alors la propriété est immédiate.

En effet : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \widehat{\pi}$.

Nous supposerons désormais que la corde [AB] n'est pas un diamètre de $(\mathscr{C})$.

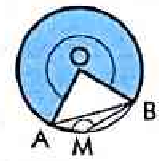
- Démontrons que : si $M \in (\mathscr{C})$, alors $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



L'angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ou l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

– Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors les triangles MAB et OAB sont orientés dans le même sens et mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$;

donc : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



– Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$, alors les triangles MAB et OAB sont orientés en sens contraires et mes $\widehat{AMB} = \pi - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$;

donc : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\left(2\widehat{\pi} - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right)$

$= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

- Réciproquement, démontrons que : si $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors $M \in (\mathscr{C})$.

Si $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, les points A,B, M ne sont pas alignés, sinon on aurait $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \widehat{0}$, ce qui est contradictoire avec l'énoncé.

Soit O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABM ; on a : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})$.

Donc : $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Les triangles isocèles OAB et O'AB ont une base commune [AB] et les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B}$ ont même mesure. Ces deux triangles sont donc confondus ou symétriques par rapport à la droite (AB).
De plus, ils sont orientés dans le même sens ; ils sont donc confondus.

Ainsi : O = O' et $M \in (\mathscr{C})$.

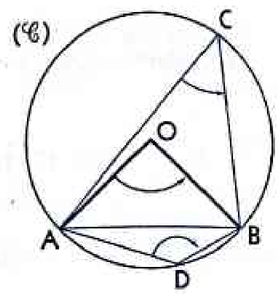
Points cocycliques

Des points situés sur un même cercle sont dits cocycliques.
Par deux points distincts A et B, il passe une infinité de cercles.
Par trois points distincts et non alignés A, B et C, il passe un seul cercle : le cercle circonscrit à ABC.

Propriété

Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.
Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si : $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$.

Démonstration



• Si A, B, C et D appartiennent à un même cercle (𝒞) de centre O, alors, d'après la propriété précédente,

on a : $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Donc : $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$.

• Réciproquement, si $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$, désignons par (𝒞) le cercle circonscrit au triangle ABC et par O le centre de ce cercle.

On a : $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; donc : $2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et le point D appartient au cercle (𝒞).

Les points A, B, C et D sont donc cocycliques.

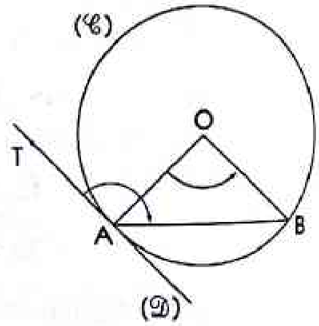
2.4. Travaux dirigés

1. Caractérisation d'une tangente à un cercle

Soit (𝒞) un cercle de centre O, A et B deux points distincts de ce cercle, (𝒟) la tangente à (𝒞) en A.
Démontrer que pour tout point T du plan, distinct de A, on a :

T ∈ (𝒟) ⇔ $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Solution



Le triangle OAB est isocèle en O et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \hat{\pi}$;

donc : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \hat{\pi} - 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$.

Soit T un point du plan, distinct de A ; on a :

$$
\begin{aligned}
T \in (\mathscr{D}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{AO} \\
&\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO}) = \hat{\pi} \\
&\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \hat{\pi} \\
&\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).
\end{aligned}
$$

2. Droite de Simson

ABC est un triangle, (𝒞) le cercle circonscrit à ce triangle et M un point du plan. Soit E, F, G les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB), (AC), (BC).
Démontrer que les points E, F, G sont alignés si et seulement si M appartient au cercle (𝒞).
La droite passant par les points E, F et G est appelée droite de Simson du triangle ABC relative à M.

Solution

Deux des points E, F, G sont confondus si et seulement si le point M est un sommet du triangle. La propriété est alors immédiate.

Nous supposerons désormais que M est distinct des points A, B, C.

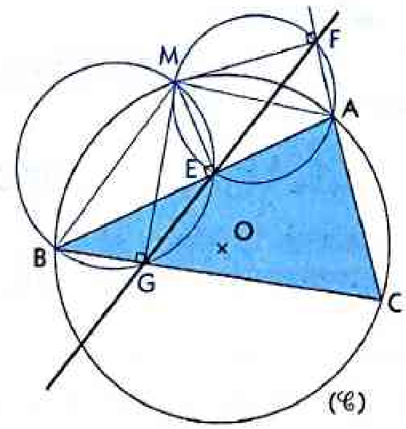
M ∈ (𝒞) ⇔ $2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM})$, car A, B, C et M sont cocycliques.

Or : $2(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM})$ (à condition que $F \neq A$)

$= 2(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EM})$, car A, E, F et M sont cocycliques ;

et : $2(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}) = 2(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BM})$ (à condition que $G \neq B$)

$= 2(\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EM})$, car B, E, G et M sont cocycliques.



Si les angles $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BM})$ sont définis , on a donc :

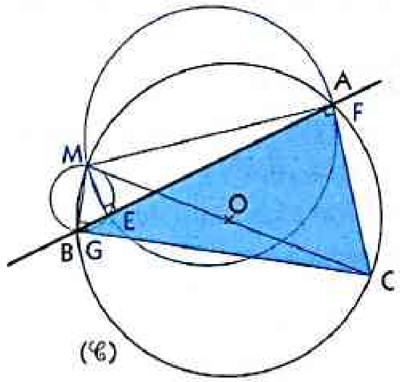
$M \in (\mathscr{C}) \iff 2(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EM}) = 2(\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EM})$

$\iff 2(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}) = \widehat{0}$

$\iff$ E, F, G alignés.

Cas particuliers

- *Si l'angle $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM})$ n'est pas défini, c'est-à-dire si F est en A, alors M et C sont diamétralement opposés, G est en B, les droites (FG) et (AB) sont confondues et les points E, F, G sont alignés.*
- *Si l'angle $(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BM})$ n'est pas défini, c'est-à-dire si G est en B, alors M et C sont diamétralement opposés, F est en A, les droites (FG) et (AB) sont confondues, et les points E, F, G sont alignés.*



Exercices

2.a Sur le cercle trigonométrique, on considère les points A et B, images respectives des nombres réels $-\frac{1999\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

1. Placer les points A et B.

2. Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$?

2.b Soit ABC un triangle ; on désigne par α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Donner, en fonction de α, une mesure des angles $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

2.c $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, k et k' sont deux nombres réels non nuls. Exprimer $(k\vec{u}, k'\vec{v})$ en fonction de $(\vec{u}, \vec{v})$.
(On distinguera deux cas : $kk' > 0$ et $kk' < 0$.)

2.d A, B, C, D sont quatre points distincts du plan.
Démontrer que :
$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \widehat{0}$.

2.e [AB] est une corde d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. M et N sont deux points de $(\mathscr{C})$ n'appartenant pas au même demi-plan de frontière (AB). On désigne par α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

1. Déterminer, en fonction de α, une mesure des angles $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA})$.

2. Exprimer $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO})$ en fonction de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$.

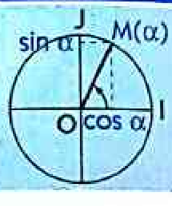
2.f ABCD est losange de sens indirect tel que : mes $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{6}$. Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$.

3 Trigonométrie

3.1. Lignes trigonométriques d'un angle orienté

Cosinus et sinus d'un angle orienté

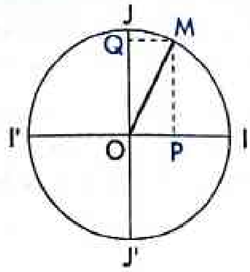
Définitions



Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).

- **Le cosinus de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α est l'abscisse de M.**
- **Le sinus de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α est l'ordonnée de M.**

Remarques



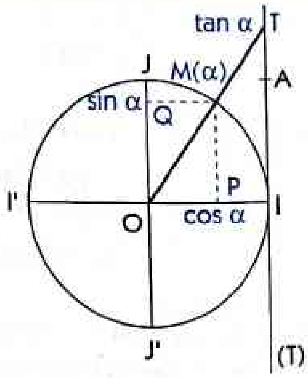
- *Si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (I'I) et (J'J), on a : $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos\alpha = \overline{OP}$ et $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$.*
- *Dans le plan muni du repère (O, I, J), on a : $M\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.*
- *Pour tout nombre réel α et pour tout nombre entier relatif k, on a :*
  $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;
  $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$;
  $\cos(\alpha + k\,2\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha + k\,2\pi) = \sin\alpha$.

Tangente d'un angle orienté

Définition

Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α.
La tangente de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α est le nombre réel, noté $\tan(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou tan α, défini par :
$\tan(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Remarques



- *tan α n'est pas défini pour les nombres réels associés aux points J et J', c'est-à-dire les nombres réels α de la forme : $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*
- *Soit T le point d'intersection de (OM) et (T), h l'homothétie de centre O qui applique P sur I. Le rapport de h est $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ et $h(M) = T$.*
  Donc : $\overrightarrow{IT} = \dfrac{1}{\cos\alpha}\overrightarrow{PM} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\overrightarrow{IA}$; d'où : $\overline{IT} = \tan\alpha$.
- *Pour tout nombre réel α et pour tout nombre entier relatif k, on a :*
  $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ et $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

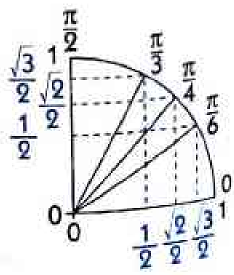
Vocabulaire

cos α, sin α et tan α sont appelés « lignes trigonométriques » de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ ou du nombre réel α.

Lignes trigonométriques des angles remarquables

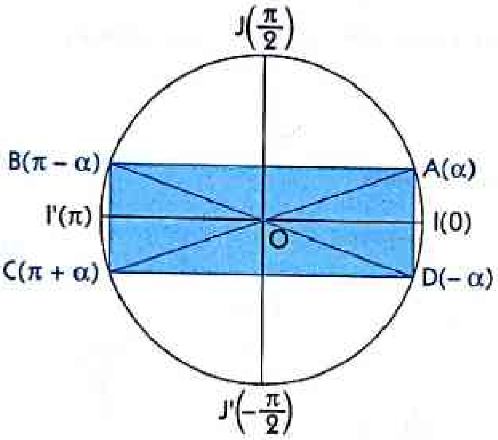
Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques remarquables à retenir.

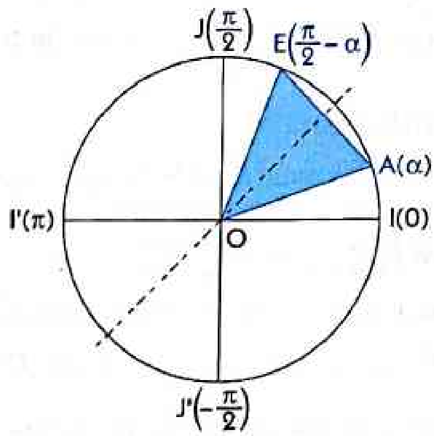
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	



Lignes trigonométriques d'angles associés

Soit $\widehat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α. Les angles orientés de mesures $-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ou $\frac{\pi}{2}+\alpha$ sont habituellement appelés angles associés à $\widehat{\alpha}$.





Les deux configurations géométriques ci-dessus, ainsi que les définitions des fonctions sinus, cosinus et tangente, justifient les propriétés suivantes.

Propriétés

Pour tout nombre réel α, on a :

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$;

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$; $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Remarques

- $\frac{\pi}{2}+\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, *donc on a également les relations suivantes :*

  $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

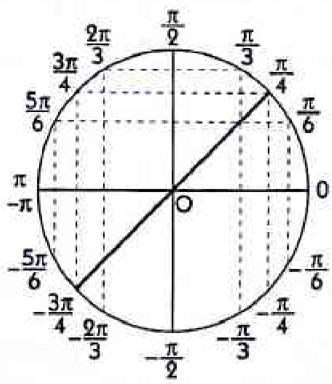
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

- *Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes ;*

ainsi : $\tan(\pi-\alpha)=\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$.

Exemples

Les lignes trigonométriques des angles remarquables et les formules relatives aux angles associés permettent de calculer les lignes trigonométriques des nombres réels de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ représentés sur la figure ci-contre. On a ainsi :



$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;

$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.2. Formules de trigonométrie

Formules d'addition

Les formules d'addition permettent de calculer les lignes trigonométriques de la somme (ou de la différence) de deux nombres réels, connaissant les lignes trigonométriques de ces deux nombres.

Propriétés

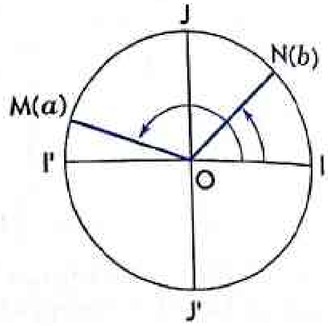
Pour tous nombres réels a et b on a :

(1) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; **(2)** $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

(3) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; **(4)** $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démonstration

Considérons les point M et N, images respectives des nombres réels a et b sur le cercle trigonométrique.



On a : $M\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

a et b sont des mesures respectives de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$.

Donc : $b-a$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.

- Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\|\,\|\overrightarrow{ON}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) = \cos(b-a) = \cos(a-b)$;

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_M x_N + y_M y_N = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

D'où : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (1).

- En remplaçant b par $-b$ dans la formule (1), on obtient la formule (2).

- Établissons maintenant la formule (3) :

$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+b\right) - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right)\cos a + \sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right)\sin a.$

Or : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right) = -\sin b$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right) = \cos b$.

D'où : $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ (3).

- En remplaçant b par $-b$ dans la formule (3), on obtient la formule (4).

Exemples

En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on calcule $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$:

$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$;

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$;

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}.$$

Formules de duplication et de linéarisation

Propriétés

Pour tout nombre réel a, on a :

formules de duplication

(5) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$; **(6)** $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

formules de linéarisation

(7) $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$; **(8)** $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

Démonstration

• En prenant $b = a$ dans les formules (2) et (4), on obtient :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ (5) ; $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ (6).

• En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on en déduit :

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

D'où : $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ (7) et $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$ (8).

Exemples

En utilisant les formules de linéarisation, calculons $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8} ;$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8} ;$$

De plus, l'image de $\frac{\pi}{12}$ sur (C) nous indique que $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ sont des nombres réels positifs.

Donc : $\cos \frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Expressions de $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$ en fonction de $\tan \frac{\alpha}{2}$

Propriétés

Pour tout nombre réel α tel que $\tan \frac{\alpha}{2}$ soit défini, en posant $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, on a :

(9) $\cos \alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$; **(10)** $\sin \alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$;

si, de plus, $\tan \alpha$ est défini : **(11)** $\tan \alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

Démonstration

On sait que : $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{1 + t^2}$.

On en déduit que :

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} ;$$

$$\sin \alpha = 2\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{2t}{1 + t^2} ;$$

si, de plus, $\tan \alpha$ est défini, $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

3.3. Travaux dirigés

1°) Démontrer que pour tous nombres réels a et b ; on a : $2 \sin a \cos b = \sin (a + b) + \sin (a - b)$.

2°) En déduire que : $2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}\right) = \sin \frac{6\pi}{7}$.

3°) Démontrer que : $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Solution

1°) D'après les formules d'addition on a :

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$= 2 \sin a \cos b.$

2°) Posons : $A = 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}\right)$.

$A = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$.

En appliquant le résultat précédent, on obtient :

$A = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin 0 + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{6\pi}{7}$.

3°) On a : $\sin \frac{6\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{6\pi}{7}\right) = \sin \frac{\pi}{7}$.

Donc : $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Or : $\cos \frac{5\pi}{7} = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = -\cos \frac{2\pi}{7}$.

D'où : $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Exercices

3.a Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des nombres réels suivants :

$-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{121\pi}{6}$; $-\frac{1999\pi}{6}$; $\frac{29\pi}{4}$.

3.b Démontrer que, pour tout nombre réel α, on a :

a) $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$;

b) $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

3.c On considère un nombre réel α tel que :

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$.

Calculer $\cos \alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

3.d x et y sont deux nombres réels de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que : $\cos x = \frac{3}{5}$ et $\cos y = \frac{1}{3}$.

Calculer $\sin(2x - y)$.

3.e x est un nombre réel non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

2. Exprimer en fonction de $\cos 2x$:

a) $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$;

b) $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$.

3.f x est un nombre réel. Démontrer que :

$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$;

$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$.

3.g x est un nombre réel tel que : $\cos x \neq 0$.

1. Démontrer que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Calculer $\sin x$ et $\cos x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\tan x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$;

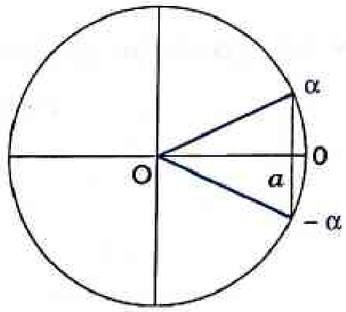
b) $\tan x = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$.

4 Équations trigonométriques

La résolution d'équations trigonométriques se ramène le plus souvent à la résolution d'équations de types : $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$.

4.1. Équations de types : $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$

Équation du type : $\cos x = a$



Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, cette équation n'a pas de solution puisque, pour tout nombre réel x, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- Si $a \in [-1\,;\,1]$, il existe un nombre réel α tel que $\cos \alpha = a$.

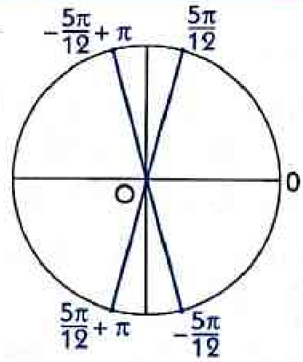
$$\cos x = a \iff \cos x = \cos \alpha$$
$$\iff x \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\alpha\ [2\pi].$$

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres réels x de la forme :
$x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et α, on a :
$\cos x = \cos \alpha \iff x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemple



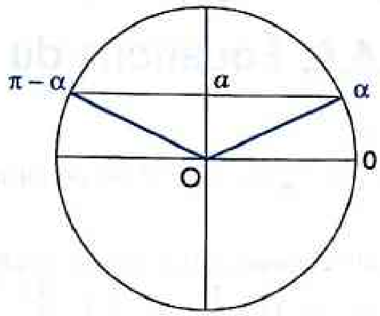
Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{(E)} \iff \cos 2x = \cos \frac{5\pi}{6}$$
$$\iff 2x = \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{5\pi}{6} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique.

Équation du type : $\sin x = a$



Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, cette équation n'a pas de solution puisque, pour tout nombre réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Si $a \in [-1\,;\,1]$, il existe un nombre réel α tel que : $\sin \alpha = a$.

$$\sin x = a \iff \sin x = \sin \alpha$$
$$\iff x \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi].$$

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres réels x de la forme :
$x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et α, on a :
$\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

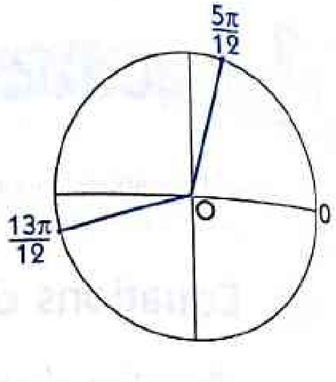
Exemple

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

(E) $\Leftrightarrow$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow$ $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ $x = \frac{5\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{5\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

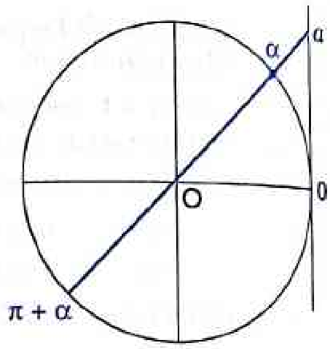
Équation du type : $\tan x = a$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.

La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$; donc, pour tout nombre réel a, il existe un nombre réel α tel que $\tan\alpha = a$.

$\tan x = a \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan\alpha$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi + \alpha\ [2\pi]$.



Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres réels x de la forme :

$x = \alpha + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi + \alpha + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

c'est-à-dire : $x = \alpha + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et α tels que $\tan x$ et $\tan\alpha$ sont définis, on a :

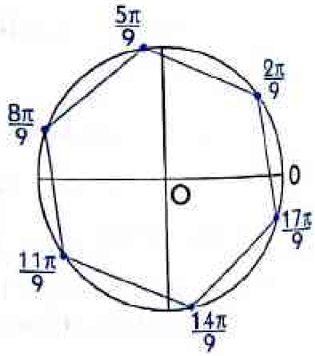
$\tan x = \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\tan 3x = -\sqrt{3}$.

(E) $\Leftrightarrow$ $\tan 3x = \tan\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow$ $3x = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{2\pi}{9} + k\,\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

4.2. Équations du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Exemples

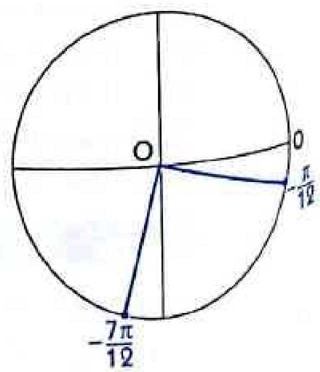
Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (E) : $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et (H) : $\sqrt{2}\,(\cos x + \sin x) = -1$.

- Dans l'équation (E), on remarque que $\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont respectivement égaux à $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Donc : (E) $\Leftrightarrow$ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\left(-\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow$ $x \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = -\frac{7\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

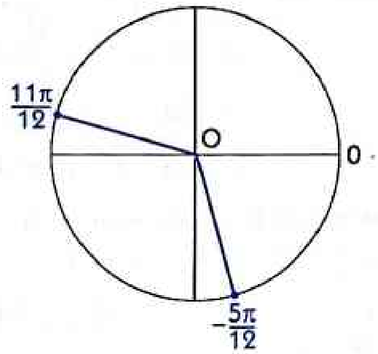
• Pour résoudre de façon analogue l'équation (H), il suffit de diviser les deux membres de l'équation par 2.

On a : (H) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x \equiv -\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{11\pi}{12}\,[2\pi]$.



Les solutions de (H) sont les nombres réels x de la forme :
$x = -\frac{5\pi}{12} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{11\pi}{12} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

M

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$.

• Si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type : $\cos x = a$ ou $\sin x = a$.

• Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right);$$

or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un nombre réel ϕ tel que :

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

on en déduit que : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$;

on est ainsi ramené à résoudre l'équation : $\cos(x-\phi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4.3. Autres exemples d'équations trigonométriques

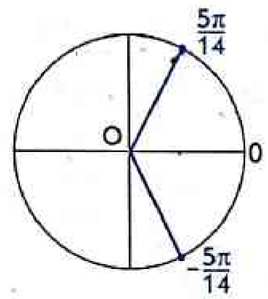
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x = \sin\frac{\pi}{7}$.

Solution

On sait que : $\sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{5\pi}{14}$, car $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}$.

On a donc : (E) $\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{14}$

$\Leftrightarrow x \equiv \frac{5\pi}{14}\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{5\pi}{14}\,[2\pi]$.



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x = \frac{5\pi}{14} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{5\pi}{14} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1$.

Représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

2°) Donner les solutions de (E) appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

Solution

1) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$

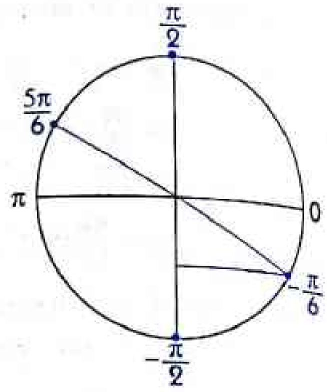
$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Donc : (E) $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $2x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow 2x \equiv \pi\ [2\pi]$ ou $2x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow 2x = \pi + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2°) • Cherchons les entiers relatifs k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + k\,\pi \leq 2\pi$:
$-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + k\,\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -2 < k \leq \frac{3}{2}$. Trois valeurs de k conviennent -1 ; 0 ; 1 ; il leur correspond les trois solutions suivantes : $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$.

• Cherchons les entiers relatifs k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} + k\,\pi \leq 2\pi$;
$-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} + k\,\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k \leq \frac{13}{6}$. Quatre valeurs de k conviennent : -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; Il leur correspond les quatre solutions suivantes : $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

• Les solutions de l'équation (E) appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ sont donc :
$-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan 2x + \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

Solution

• *Détermination des contraintes sur l'inconnue*

$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ et $x - \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{5\pi}{4} + k\,\pi$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}$.

Les images de ces nombres sur le cercle trigonométrique sont les sommets d'un carré PQRS, dont les côtés sont parallèles aux axes du repère (O, I, J).

• *Résolution de (E)*

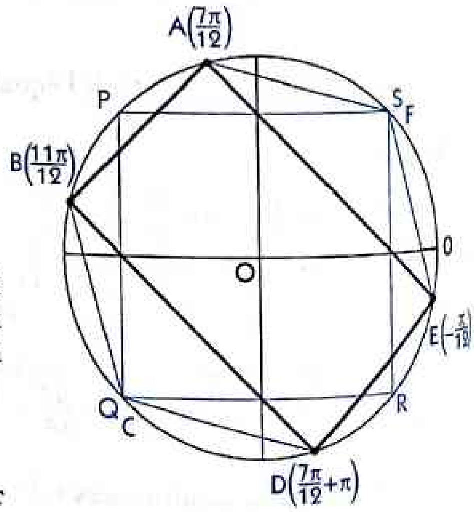
(E) $\Rightarrow \tan 2x = -\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$.

Donc : $2x = \frac{3\pi}{4} - x + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c'est-à-dire : $x = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Les images sur le cercle trigonométrique des nombres réels ainsi trouvés sont les sommets d'un hexagone régulier ABCDEF, dont deux des sommets (C et F) sont sur la première bissectrice du repère (O, I, J).



• *Vérification des contraintes*

Les nombres réels solutions de (E) sont ceux dont les images sur (C) sont les points A, B, D et E, sommets de l'hexagone sans être sommets du carré.

Les solutions de (E) sont donc les nombres réels x de la forme :
$x = \frac{7\pi}{12} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique.

4. On considère l'équation (E) : $2\cos x - 3\sin x + 1 = 0$.

1°) Vérifier que les nombres réels x de la forme : $x = \pi + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ne sont pas solutions de (E).
2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E), en utilisant le changement d'inconnue : $t = \tan\frac{x}{2}$.
On donnera les solutions à 10^{-2} près.

Solution

1°) Soit x un nombre réel de la forme : $x = \pi + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On a : $\cos x = -1$ et $\sin x = 0$; donc : $2\cos x - 3\sin x + 1 \neq 0$.
2°) Pour toute solution x de (E), d'après la question précédente, $\tan\frac{x}{2}$ est défini.

On a : $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Donc : (E) $\Leftrightarrow\; 2\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 3\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow\; -t^2 - 6t + 3 = 0.$

Les solutions de cette dernière équation sont : $t_1 = -3 + 2\sqrt{3}$ et $t_2 = -3 - 2\sqrt{3}$.
En utilisant une calculatrice, on trouve que les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$\frac{x}{2} \approx 0{,}43 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{x}{2} \approx -1{,}42 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

c'est-à-dire : $x \approx 0{,}86 + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x \approx -2{,}84 + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercices

4.a Résoudre, dans l'ensemble indiqué, les équations suivantes :
(dans chaque cas, on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique)
1. $x \in [-2\pi\,;\,2\pi]$, $2\cos x = \sqrt{2}$;
2. $x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

4.b Résoudre, dans l'ensemble indiqué, les équations suivantes :
(dans chaque cas, on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique)
1. $x \in [-\pi\,;\,3\pi]$, $\sin x = \frac{1}{2}$;
2. $x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4.c Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\tan 2x = -\sqrt{3}$.

4.d Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

5 Inéquations trigonométriques

Les résolutions d'inéquations seront traitées sous forme d'exercices.
On se limitera aux inéquations simples de type : $\cos x \leq b$ ou $\cos ax \leq b$ (ou sin ou tan).

1. Résoudre l'inéquation (I) : $\sin x > -\frac{1}{2}$
sur les intervalles suivants : *a)* $]-\pi\,;\,\pi]$, *b)* $[0\,;\,2\pi[$, *c)* $\mathbb{R}$.

Solution

Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.
Les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieure à $-\frac{1}{2}$ sont les points de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$, M et M' étant exclus.

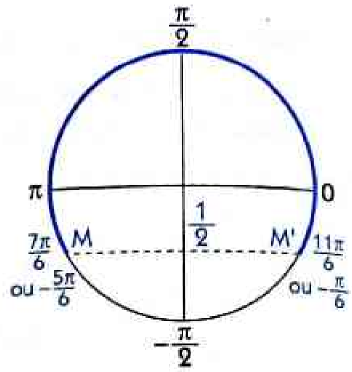
a) Dans $]-\pi ; \pi]$, M et M' sont les images respectives de $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$, donc l'ensemble des solutions de (I) est :

$$\left]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6} ; \pi\right].$$

b) Dans $[0 ; 2\pi[$, M et M' sont les images respectives de $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$, donc l'ensemble des solutions de (I) est :

$$\left[0 ; \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[.$$

c) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (I) est la réunion des intervalles de la forme : $\left]-\frac{\pi}{6} + k\,2\pi ; \frac{7\pi}{6} + k\,2\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.



2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\cos 2x \geq \frac{1}{2}$. On représentera l'ensemble des solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ sur le cercle trigonométrique.

Solution

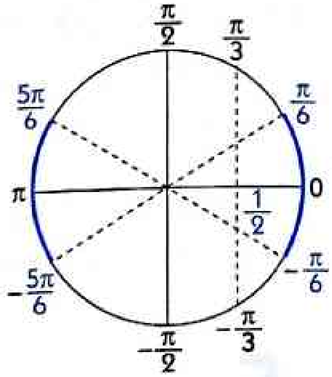
Posons : $X = 2x$. L'inéquation $\cos X \geq \frac{1}{2}$ admet comme ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ la réunion des intervalles de la forme :

$$\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}.$$

On a donc : $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

D'où : $-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$.

L'ensemble des solutions de (I) est donc la réunion des intervalles de la forme : $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



3. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation (I) : $\tan x < 1$.
On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

Contraintes sur l'inconnue : $x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$.

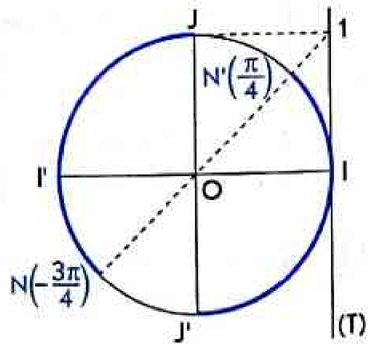
Dans $]-\pi ; \pi]$, $\tan x = 1 \iff x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$.

Désignons par N et N' les images respectives sur (C) de $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Les points M du cercle trigonométrique tels que (OM) coupe (T) en un point d'abscisse strictement inférieure à 1 sont les points des arcs $\widehat{JN}$ et $\widehat{J'N'}$, J, N, J' et N' étant exclus.

Dans $]-\pi ; \pi]$, l'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$\left]-\pi ; -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right].$$



Exercices

5.a Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

5.b Résoudre, dans $]-\pi ; \pi]$, l'inéquation :
$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \geq 0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

5.c Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$\sqrt{3}\tan x + 1 < 0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

5.d Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$\tan(3x) + 1 \leq 0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

Exercices

APPRENTISSAGE

Angles orientés

1 A et B sont deux points distincts du plan. Représenter l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{13\pi}{6}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$;

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{3}$;

c) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ est l'angle nul ;

d) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est l'angle plat.

2 A, B, C sont des points tels que :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ont respectivement pour mesures principales $\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
Déterminer une mesure des angles :
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$.

3 PQR est un triangle tel que les angles $(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP})$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QP})$ ont respectivement pour mesures $-\frac{9\pi}{5}$ et $\frac{22\pi}{5}$.
Démontrer que le triangle PQR est isocèle.

4 ABC est un triangle équilatéral de centre S tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$.
Déterminer, en radian et en degré, les mesures principales des angles orientés :
$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB})$.

5 ABCDE est un pentagone régulier de sens direct et de centre S. Déterminer, en radian et en degré, les mesures principales des angles orientés :
$(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$.

6 ABC est un triangle non rectangle inscrit dans un cercle (Γ). D est le point d'intersection des tangentes à (Γ) en B et C. Soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Déterminer, en fonction de α, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

7 Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). Déterminer les coordonnées des points A et B tels que :
- OA = 3 et OB = 5 ;
- $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{4}$ soient respectivement des mesures en radian des angles $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$.

Trigonométrie

8 1. Calculer $\cos x$ et $\tan x$, sachant que :
$\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.
2. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$, sachant que :
$\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5}$ et $x \in]0 ; \pi[$;
3. Calculer $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$, sachant que :
$\sin(-x) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.

9 Démontrer que pour tout nombre réel x, on a :
- $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$;
- $(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$;
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.

(On pourra remarquer que, pour tous nombres réels a et b : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.)

10 1. Pour tout nombre réel x, démontrer que :
$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.
2. Calculer $\cos x$ et $\sin x$, dans chacun des cas suivants :
a) $\cos x - \sin x = -1$;
b) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$.

Angles associés

11 Calculer, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, les expressions suivantes :
$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$;
$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$;
$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;
$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$.

12 Démontrer que, pour tout nombre réel x :
$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;
$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

Formules de trigonométrie

13 En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que :
$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

14 1. Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2. En déduire que : $\tan 3x = \tan x \dfrac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

15 1. Calculer :
$A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$;
$B = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$.
2. En déduire que : $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

16 Démontrer que pour tout élément x de $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, on a : $\sqrt{1+\sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|$.

17 Calculer $\cos x$ et $\sin x$ dans chacun des cas :

a) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ et $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$;

b) $\cos 2x = \frac{7}{25}$ et $x \in [\frac{\pi}{2}\,;\pi]$;

c) $\cos 2x = -\frac{7}{9}$ et $x \in [-\pi\,;-\frac{\pi}{2}]$;

d) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}\,;0]$.

18 Calculer $\sin 2x$ et $\cos 2x$ dans chacun des cas :

a) $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$;

b) $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $x \in [\pi\,;\frac{3\pi}{2}]$;

c) $\tan x = -3$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}\,;0]$.

19 Calculer :

$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$;

$B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$.

(On pourra d'abord calculer A + B et A − B.)

20 Démontrer que : $16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$.

Équations trigonométriques

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$;

b) $\sin 3x = \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

c) $\sin\left(-x+\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$;

d) $\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos 3x = 0$.

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide d'un changement d'inconnue, les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0$;

b) $\sin^2 2x - \sqrt{3}\sin 2x + \frac{3}{4} = 0$.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

b) $4\cos^2 x + 3\sin^2 2x = 0$;

c) $2\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0$;

d) $\sin 2x - 2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$;

b) $\cos 2x - \sin 2x = -1$.

25 Résoudre dans D les équations suivantes :

a) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x+\frac{\pi}{8}\right) = 0$, $D = \mathbb{R}$;

b) $3\tan^2 x - 1 = 0$, $D = [-\pi\,;\pi[$;

c) $\tan^2 x + (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$, $D = [0\,;2\pi[$.

Inéquations trigonométriques

26 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $D = \mathbb{R}$;

b) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$, $D = [0\,;2\pi[$;

c) $\sin x - \cos x \leq 0$, $D = \mathbb{R}$.

27 Résoudre dans D les systèmes d'inéquations suivants et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$, $D = [0\,;2\pi[$;

b) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$.

28 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\dfrac{1-2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$, $D =]-\pi\,;\pi]$;

b) $\dfrac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} < 0$, $D = [0\,;2\pi[$.

29 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$, $D =]-\pi\,;\pi]$;

b) $\cos x\,(2\sin x - 1) \leq 0$, $D =]-\pi;\pi]$;

c) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$, $D = [0\,;2\pi[$;

d) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2}-1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$, $D = [0;2\pi[$.

30 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geq 0$, $D = \mathbb{R}$;

b) $|\tan x| \geq 1$, $D = \mathbb{R}$.

APPROFONDISSEMENT

31 On considère deux parallélogrammes ABCD et AECF. Démontrer que : $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FD})$.

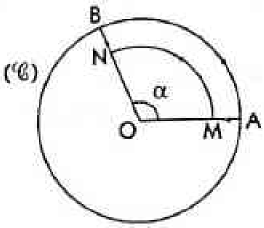
32 1. A, B, C, D et E sont des points tels que :
AB = AC = 1, AD = 2, AE = 3 ;
$\frac{25\pi}{12}$, $\frac{119\pi}{4}$, $-\frac{85\pi}{6}$ sont des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.
Démontrer que les points A, D, E sont alignés ; calculer DE.
2. a, b, c sont trois nombres réels et A, B, C, D, E des points tels que :
AB = AC = 1, AD = 2, AE = 3 ;
a, b, c sont des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.
Déterminer une relation entre a, b et c pour que les points A, D et E soient alignés.
Calculer DE. *(On distinguera deux cas.)*

33 Soit [AB] et [CD] deux cordes à supports parallèles d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
1. Démontrer que :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$.
2. On suppose que le triangle OAC est équilatéral. Préciser la nature du triangle OBD.

34 ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure principale $\frac{2\pi}{3}$.
Déterminer les points D tels que :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et AB = AD.

35 ABC est un triangle équilatéral de sens direct inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
P, Q, R sont trois points distincts de ($\mathscr{C}$).
Démontrer que le triangle PQR est équilatéral de sens direct si et seulement si :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OQ}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OR})$.

36 Propriétés d'un angle de mesure 2 radians
Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O et de rayon R.
1. Déterminer la mesure en radian, de l'angle au centre d'un secteur de ($\mathscr{C}$) dont l'aire est égale à celle d'un carré de côté R.
2. Soit A et B deux points de ($\mathscr{C}$). On considère le secteur de ($\mathscr{C}$), dont l'angle au centre $\widehat{AOB}$ a pour mesure α, en radian.
M et N sont deux points tels que :
M ∈ [OA], N ∈ [OB] et OM = ON.

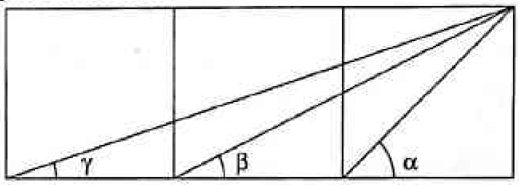


On considère deux trajets pour se rendre du point A au point B :
T_1 : en suivant l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle ($\mathscr{C}$) ;
T_2 : en passant par M et N et en suivant l'arc $\overset{\frown}{MN}$ du cercle de centre O et de rayon OM.
Déterminer α pour que ces deux trajets aient même longueur, quels que soient les positions des points M et N sur les segments [OA] et [OB].

37 1. En remarquant que $\sin 5x = \sin(4x + x)$, démontrer que : $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin 5x = 0$; vérifier que $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$.
4. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

38 1. x étant un nombre réel, démontrer que :
$\cos 5x = \cos x\,(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$;
$(1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2 = 1 - \cos 5x$.
2. *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 5x = 1$.
b) Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$.

39 On considère trois carrés disposés comme dans la figure ci-dessous.



Calculer $\cos(\beta + \gamma)$; en déduire que : $\alpha = \beta + \gamma$.

40 a et b sont deux nombres réels donnés non tous nuls et t un nombre réel variable.
1. Justifier l'existence de deux nombres réels r et φ, tels que : $a = r\cos\varphi$ et $b = r\sin\varphi$.
2. *a)* Résoudre le système d'équations :
$$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \begin{cases} x\cos t + y\sin t = a \\ -x\sin t + y\cos t = b \end{cases}$$
b) Démontrer que les solutions du système sont :
$$\begin{cases} x = r\cos(t + \varphi) \\ y = r\sin(t + \varphi). \end{cases}$$
c) Soit $(x\,;\,y)$ une solution de l'équation précédente et M le point de coordonnées $\binom{x}{y}$ dans un repère orthonormé.
Démontrer que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le lieu du point M est inclus dans un cercle que l'on déterminera. Préciser ce cercle pour $a^2 + b^2 = 4$.

41 x et y étant deux nombres réels de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, on considère le système d'équations (S) :
$$\begin{cases} \cos x\cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \\ \sin x\sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}. \end{cases}$$
1. Démontrer que le système (S) est équivalent au système suivant :
$$\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$
2. Résoudre (S).

42 1. *a)* Vérifier que : $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$2X^2 + (1-\sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$2X^2 + (1-\sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$

2. Déduire de la question 1.b la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

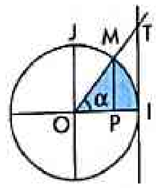
Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

3. Déduire de la question 1-c) la résolution dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ de l'inéquation :

$2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

43 α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et M son image sur le cercle trigonométrique.

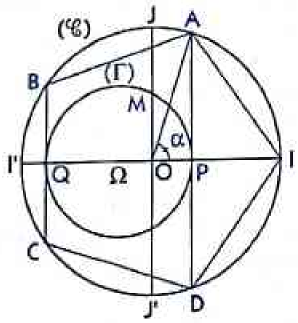


1. Démontrer que : $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$.
(On pourra remarquer que l'aire du secteur circulaire délimité par les segments [OI], [OM] et l'arc de cercle $\widehat{IM}$ est comprise entre les aires des triangles OIM et OIT.)

2. En déduire que, pour tout x élément de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x}$ et $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

44 Pentagone régulier

Voici un programme de construction du pentagone régulier.



• (𝒞) est le cercle trigonométrique ; on considère les points $\Omega\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

• Le cercle (Γ) de centre Ω et passant par M coupe le segment [I'I] en P et Q.

• Les tangentes à (Γ) en P et Q coupent (𝒞) en A, D et B, C.

On se propose de démontrer que IABCD est un pentagone régulier.

1. Soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$.

Calculer $\cos\alpha$, puis $\cos 2\alpha$.

2. Soit β une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$.

Calculer $\cos\beta$ et en déduire que $\widehat{\beta} = 2\widehat{\alpha}$.

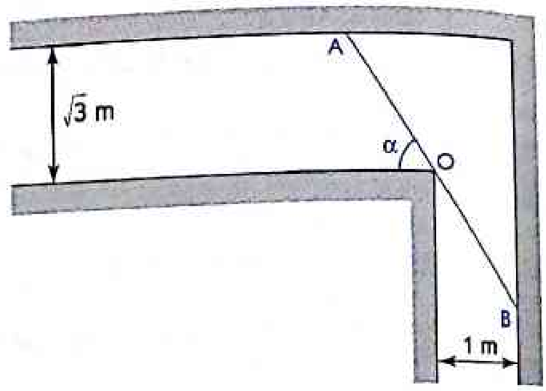
3. Soit γ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OQ})$.

Calculer $\cos\gamma$, puis $\cos 2\gamma$.

En déduire que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$.

Conclure.

45 Un couloir, de largeur $\sqrt{3}$ mètres, tourne à angle droit et sa largeur n'est plus alors que de 1 mètre.



Sur la figure, une droite passe par O, fait avec l'un des murs un angle α et coupe deux autres murs en A et B.

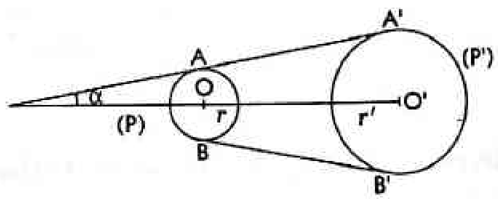
1. Exprimer, en fonction de α, les longueurs OA, OB et AB.

2. On pose : $AB = f(\alpha)$.

Démontrer que : $f(\alpha) = \dfrac{4\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}$.

3. *a)* Déterminer α pour que : AB = 4.
b) Déterminer α pour que : OA = OB.

46 Une chaîne de vélo s'enroule autour d'un pignon (P) de centre O et de rayon r et d'un pédalier (P') de centre O' et de rayon r'. On pose : $OO' = d$.
Soit α la mesure en radian de l'angle que fait (OO') avec (AA'), tangente commune extérieure à (P) et (P').



1. Calculer $\sin\alpha$, puis $\cos 2\alpha$, en fonction de d, r et r'.

2. On se propose de calculer la longueur L de la chaîne.
Soit A et B (respectivement A' et B') les points de contact de la chaîne avec (P) (respectivement (P')).
a) Calculer AA' en fonction de d et α.
b) Calculer, en fonction de α, r et r', la longueur des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{A'B'}$ où la chaîne est en contact avec (P) ou (P').
c) En déduire, en fonction de α, d, r et r', la longueur L de la chaîne.

3. ***Application***

On a : $r = 5$ cm, $r' = 10$ cm et $d = 45$ cm.
Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de α et de L.