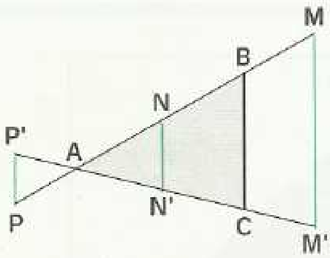
1 Propriété de Thalès dans le triangle

1.1 PROPRIÉTÉ DE THALÈS

Activité



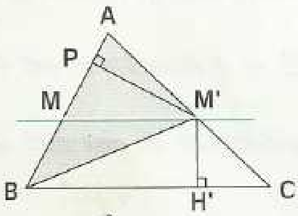
ABC est un triangle. M, N, P sont des points de (AB). M', N', P' sont les points de (AC), tels que les droites (MM'), (NN') et (P'P) soient parallèles à (BC).

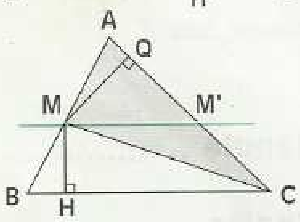
- À l'aide de ta règle graduée, détermine les distances : AB, AM, AN, AP, AC, AM', AN' et AP'.
- Calcule les quotients suivants et compare les : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AM'}{AC}$; $\frac{AP}{AB}$ et $\frac{AP'}{AC}$; $\frac{AN}{AB}$ et $\frac{AN'}{AC}$.

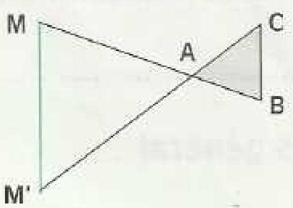
Il semble que pour toute position de M sur (AB) et de M' sur (AC) telle que (MM') soit parallèle à (BC), on ait : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

Démonstration

ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' le point de (AC) tel que : (MM') // (BC).
Démontrons que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.







- M ∈ [AB] et M' ∈ [AC]

On utilisera différentes expressions de l'aire d'un triangle.
Dans ce cas de figure, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM \times \frac{M'P}{2}}{AB \times \frac{M'P}{2}} = \frac{\text{aire (AMM')}}{\text{aire (ABM')}}$$

$$\frac{AM'}{AC} = \frac{AM' \times \frac{MQ}{2}}{AC \times \frac{MQ}{2}} = \frac{\text{aire (AMM')}}{\text{aire (ACM)}}$$

Il suffit de démontrer que : aire (ABM') = aire (ACM).

Les triangles BMC et BM'C ont la même aire $\mathscr{A}$, car ils ont le côté [BC] commun et des hauteurs égales : M'H' = MH.
L'aire de chacun des triangles ABM' et ACM est celle du triangle ABC diminuée de $\mathscr{A}$. Donc : aire (ABM') = aire (ACM).

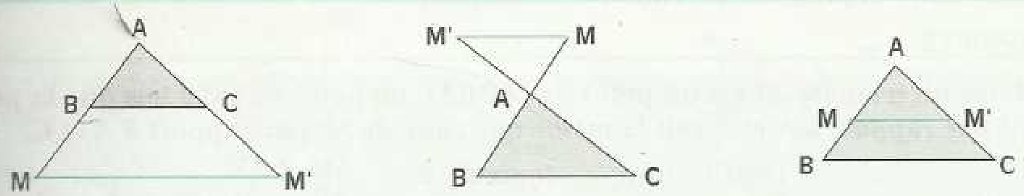
- M ∉ [AB] et M' ∉ [AC]

On utilisera la symétrie de centre A et le résultat précédent.

PROPRIÉTÉ DE THALÈS

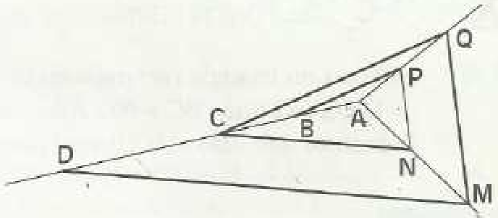
ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC).

Si (MM') // (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.



EXERCICE

1.a Les droites (BP) et (CQ) sont parallèles.
Les droites (PN) et (QM) sont parallèles.
Les droites (NC) et (MD) sont parallèles.
Démontre que : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$.

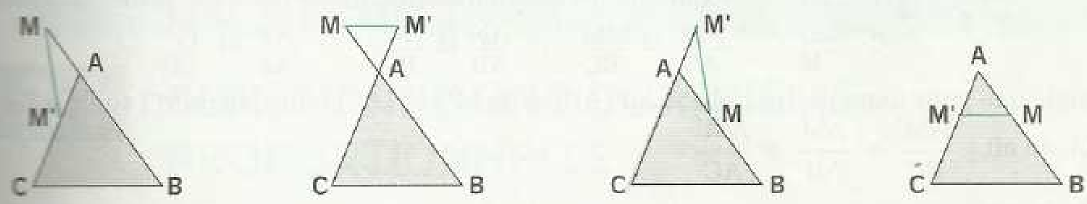


1.2 RÉCIPROQUE DE LA PROPRIÉTÉ DE THALÈS

Activité

Dans chacun des cas de figure ci-dessous, ABC est un triangle, M est un point de (AB) et M' un point de (AC) tels que : AB = 40 ; AC = 35 ; AM = 16 et AM' = 14

- Vérifie l'égalité des quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AM'}{AC}$. Précise dans quels cas on a : (MM') // (BC).

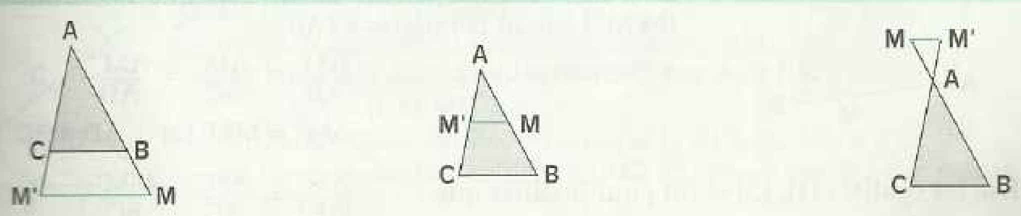


On admet la propriété :

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

ABC est un triangle. M est un point de (AB), M' un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de M' par rapport à A et C.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$ alors (MM') // (BC).



Cette propriété est appelée « Réciproque de la propriété de Thalès ».
En effet, dans la propriété directe, les droites (M'M) et (BC) sont parallèles. Une conséquence non précisée de cette donnée est que la position de M par rapport à A et B est la même que celle de M' par rapport à A et C.

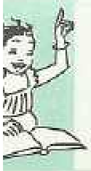
On peut réunir la propriété de Thalès et sa réciproque.

PROPRIÉTÉ

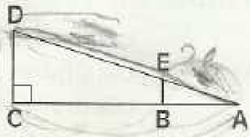
ABC est un triangle. M est un point de (AB), M' un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de M' par rapport à A et C.

(MM') // (BC) ***équivaut à*** $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM'}{AC}$.

EXERCICE

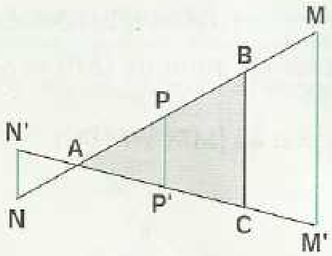


1.b ACD est un triangle rectangle en C, B un point de (AC), E le point de (AD), tels que : BC = 90 ; AB = 30 ; DE = 108 ; AE = 36.
Démontre que (BE) et (CD) sont parallèles.



1.3 CONSÉQUENCE DE LA PROPRIÉTÉ DE THALÈS

Activité 1

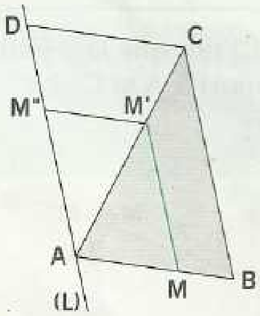


ABC est un triangle. M, N, P sont des points de (AB). M', N', P' sont les points de (AC) tels que les droites (MM'), (PP') et (NN') soient parallèles à (BC).

- À l'aide de ta règle graduée, détermine les distances : AM, AB, MM', BC, AN, NN', AP, PP'.
- Calcule les quotients suivants et compare les : $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{MM'}{BC}$; $\dfrac{AN}{AB}$ et $\dfrac{NN'}{BC}$; $\dfrac{AP}{AB}$ et $\dfrac{PP'}{BC}$.

Il semble que pour toute position de M sur (AB) et de M' sur (AC) telle que (MM') soit parallèle à (BC), on ait : $\dfrac{MM'}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM'}{AC}$.

Activité 2



ABC est un triangle. M est un point de (AB), M' le point (AC) tel que (MM') et (BC) soient parallèles.

On veut démontrer que : $\dfrac{MM'}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM'}{AC}$.

Pour cela on trace la droite (L) passant par A et parallèle à (BC). D et M'' sont des points de (L) tels que les droites (DC) et (M'M'') soient parallèles à (AB).

- Démontre que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM'}{AC} = \dfrac{AM''}{AD}$. (1)

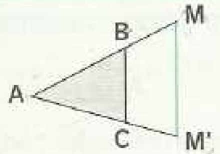
  AM'' = MM' (2) ; AD = BC (3)

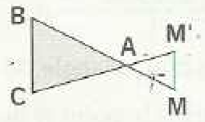
- Utilise les égalités (1), (2) et (3) pour justifier que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM'}{AC} = \dfrac{MM'}{BC}$.

PROPRIÉTÉ

ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC).

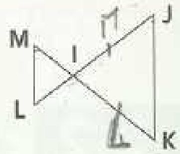
Si (MM') // (BC) alors $\frac{MM'}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$



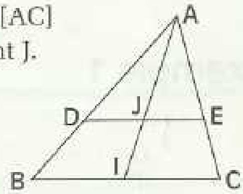


EXERCICES

1.c Les droites (MK) et (JL) sont sécantes en I. Les droites (ML) et (JK) sont parallèles.
JK = 30 ; IK = 24 ; IM = 12 ; IL = 9.
Détermine LM et IJ.



1.d ABC est un triangle. Une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en D et [AC] en E. [AI] est une médiane du triangle ABC. Elle coupe (DE) au point J.
Démontre que J est le milieu de [DE].



1.e ABC est un triangle. Une parallèle à (BC) coupe [AB] en F et [AC] en E de sorte que : $\frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$.
Démontre que : $\frac{\text{aire (AFE)}}{\text{aire (ABC)}} = \frac{4}{9}$.

2 Utilisations des propriétés de Thalès

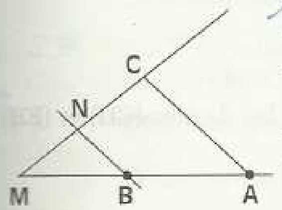
2.1 CONSTRUIRE UNE QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

Présentation

On donne trois segments de mesures a, b et c.

On veut construire la **quatrième proportionnelle** des nombres a, b et c, pris dans cet ordre.

Cela revient à construire un segment [MN] tel que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{MN}$.

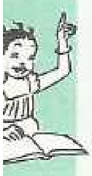


Pour cela,
– on trace deux demi-droites de même origine M.
– sur l'une des demi-droites, on marque A et B tels que :
MA = a et MB = b
– sur l'autre demi-droite, on marque C tel que : MC = c ;
– on trace la droite parallèle à (AC) qui passe par B ; elle coupe (MC) au point N.

D'après la propriété de Thalès dans le triangle MAC : $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MN}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{MN}$.

Donc MN est la quatrième proportionnelle des nombres a, b et c.

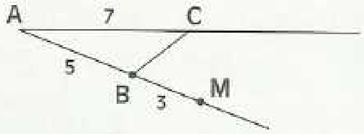
EXERCICE



2.a ABC est un triangle. M est un point de (AB).

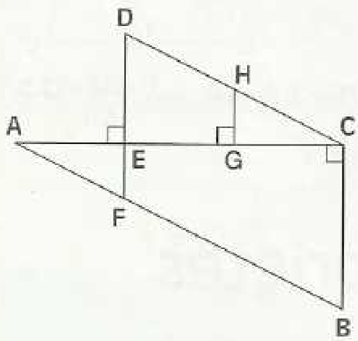
Construis le point N de (AC) tel que : $\frac{7}{5} = \frac{AN}{8}$.

Calcule CN.



2.2 CALCULER DES DISTANCES

Exemple 1



Sur la figure ci-contre : AE = EG = GC = ED = 2 ; BC = 3
Calculons EF et GH.

Dans le triangle ABC, d'après la conséquence de la propriété de Thalès,

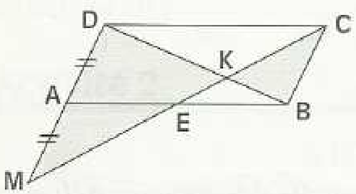
nous avons : $\frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CB}$;

$\frac{2}{6} = \frac{EF}{3}$.

Donc : EF = 1

Nous calculons de même GH dans le triangle CDE.

Exemple 2



ABCD est un parallélogramme.
M est le symétrique de D par rapport à A.
(CM) coupe (BD) au point K et (AB) au point E.

Démontrons que : $\frac{KD}{KB} = \frac{KC}{KE} = 2.$

• KDM est un triangle. B est un point de (KD), C un point de (KM) tels que les droites (BC) et (DM) soient parallèles. La conséquence de la propriété de Thalès permet d'écrire :

$\frac{KD}{KB} = \frac{DM}{BC}$. Nous savons que : BC = DA et DM = 2 × DA

donc : $\frac{KD}{KB} = \frac{2 \times DA}{DA} = 2$

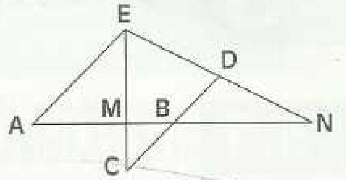
• KCD est un triangle. B est un point de (KD), E un point de (KC) tels que les droites (CD) et (EB) soient parallèles. La propriété de Thalès permet d'écrire :

$\frac{KD}{KB} = \frac{KC}{KE} = 2$

EXERCICES

2.b AEN est un triangle. Une droite parallèle à (AE) coupe [EN] en D et [AN] en B. C est le symétrique de D par la symétrie centrale de centre B.

Démontre que : $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

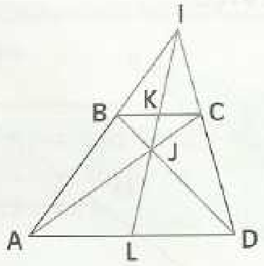


2.c ABCD est un trapèze de bases [AD] et [BC]. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes au point I, les droites (AC) et (BD) sont sécantes au point J.

Démontre que : $\frac{IB}{IA} = \frac{IC}{ID} = \frac{JC}{JA} = \frac{JB}{JD}$

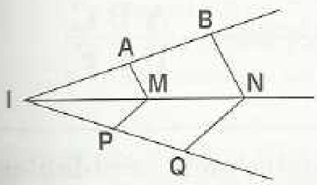
(IJ) coupe (BC) au point K et (AD) au point L.

Démontre que : $\frac{IB}{IA} = \frac{JK}{JL} = \frac{BC}{AD}$.



2.3 DÉMONTRER UN PARALLÉLISME DE DROITES

Exemple



(IB), (IN) et (IQ) sont trois droites concourantes en I.
A est un point de [IB].
M est un point de [IN] tel que (AM) // (BN).
P est un point de [IQ] tel que (MP) // (NQ).
Démontrons que (PA) et (QB) sont parallèles.

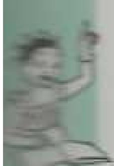
– Dans le triangle IBN, les droites (AM) et (BN) sont parallèles.
La propriété de Thalès permet d'écrire : $\frac{IA}{IB} = \frac{IM}{IN}$. (1)

– Dans le triangle IQN, les droites (PM) et (QN) sont parallèles.
La propriété de Thalès permet d'écrire : $\frac{IP}{IQ} = \frac{IM}{IN}$. (2)

Des égalités (1) et (2), nous tirons : $\frac{IA}{IB} = \frac{IP}{IQ}$.

Nous savons que A appartient à [IB] et P appartient à [IQ]. Donc, d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (AP) et (BQ) sont parallèles.

EXERCICES

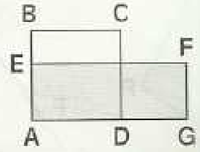


2.d Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne les points A(3;0), B(0;3), C(-2;0) et D(0; $-\frac{9}{2}$).
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2.e ABCD est un carré. E est un point de [AB], G un point de [AD] et F le point tels que EFGA soit un rectangle de même aire que le carré ABCD.

Démontre que : $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$.

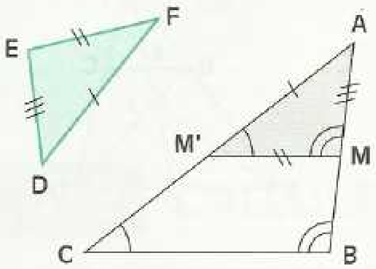
Démontre que les droites (BG) et (DE) sont parallèles.



3 Triangles semblables

3.1 PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES SEMBLABLES

Activité



ABC est un triangle. M est un point de [AB] et M' le point de [AC] tel que (MM') soit parallèle à (BC).

On dit que ABC et AMM' sont des **triangles semblabes**.

On sait que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{MM'}{BC}$

$$\text{mes } \widehat{M'} = \text{mes } \widehat{C} \text{ et mes } \widehat{M} = \text{mes } \widehat{B}$$

Les triangles DEF et AMM' sont superposables.
On dit que ABC et DEF sont des **triangles semblables**.

- Parmi les angles des triangles ABC et DEF, cite ceux qui ont la même mesure.
- À l'aide des distances AB, BC, AC, DE, EF et DF, écris trois quotients égaux.

On dit que : A et D sont des **sommets homologues**,
$\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ sont des **angles homologues**,
[AB] et [DE] sont des **côtés homologues**.

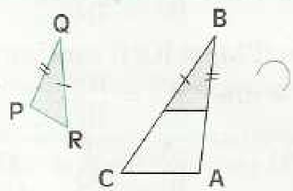
Pour retrouver aisément tous les éléments homologues de ces deux triangles semblables, on peut utiliser la disposition pratique ci-contre : $\frac{\mathbf{A\ B\ C}}{\mathbf{D\ E\ F}}$

PROPRIÉTÉS

- **Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés sont deux à deux proportionnels.**

ABC et PQR sont semblables

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$$



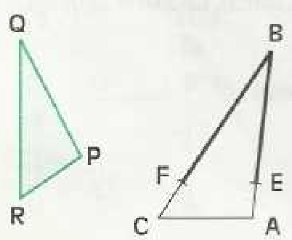
- **Si deux triangles sont semblables, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.**

ABC et PQR sont semblables

$$\text{mes } \widehat{P} = \text{mes } \widehat{A}$$
$$\text{mes } \widehat{Q} = \text{mes } \widehat{B}$$
$$\text{mes } \widehat{R} = \text{mes } \widehat{C}$$

3.2 RECONNAÎTRE DEUX TRIANGLES SEMBLABLES

Activité 1



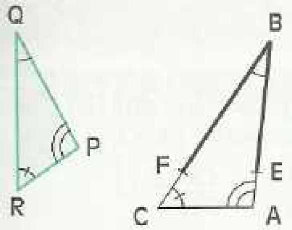
ABC et PQR sont deux triangles tels que : $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$.

On veut établir que les triangles PQR et ABC sont semblables.

Pour cela, on marque les points F de [BC] et E de [BA] tels que : BF = QR et BE = QP.

- Justifie que (FE) et (CA) sont parallèles.
- Justifie que les triangles PQR et EBF sont superposables.

Activité 2



ABC et PQR sont deux triangles tels que :

mes $\widehat{P}$ = mes $\widehat{A}$; mes $\widehat{Q}$ = mes $\widehat{B}$; mes $\widehat{R}$ = mes $\widehat{C}$.

On veut établir que les triangles PQR et ABC sont semblables.

Pour cela, on marque les points F de [BC] et E de [BA] tels que : BF = QR et BE = QP.

- Justifie que les triangles PQR et EBF sont superposables.
- Justifie que (FE) et (CA) sont parallèles.

PROPRIÉTÉS

• Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.

• Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Exemples

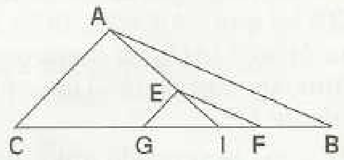
– Deux triangles équilatéraux sont semblables.

– Deux triangles isocèles rectangles sont semblables.

EXERCICES

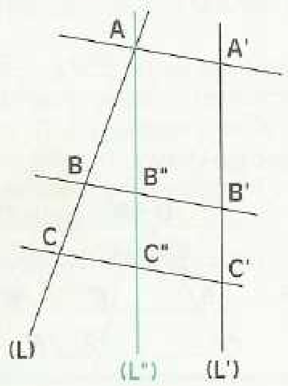
3.a ABC est un triangle. E est un point de [AB]. La droite parallèle à (BC) qui passe par E coupe (AC) en F. La droite parallèle à (AB) qui passe par F coupe la droite parallèle à (AC) qui passe par E au point D.
Démontre que les triangles ABC et DEF sont semblables.

3.b ABC est un triangle. I est un point de [BC], E un point de [AI]. G et F les points de [BC] tels que :
(EF) // (AB) et (EG) // (AC).
Calcule EI et AC sachant que :
AB = 393 ; AI = 282 ; EF = 131 ; EG = 104.



4 Propriété de Thalès dans le cas général

Activité



(L) et (L') sont deux droites sécantes.
A, B, C sont des points de (L). A', B', C' sont les points de (L') tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles.

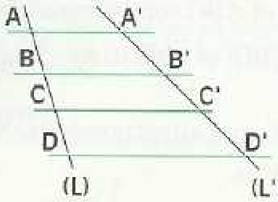
On veut démontrer que : $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

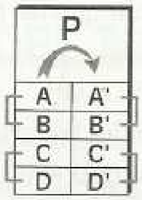
Pour cela, on trace la droite (L") passant par A, et parallèle à (L'). Elle coupe (BB') en B" et (CC') en C".

- Justifie que : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB''}{AC''}$.
- Justifie que : AB" = A'B' ; AC" = A'C'.
- Justifie que : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$; $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

PROPRIÉTÉ

Des droites parallèles découpent des segments de mesures proportionnelles sur deux droites qui leur sont sécantes.

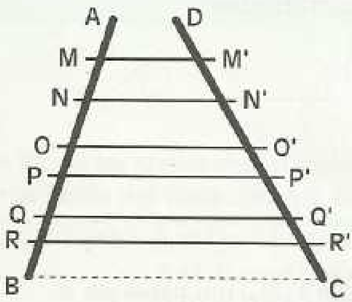




P est la projection sur (L') parallèlement à (AA').

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$

Exemple 1



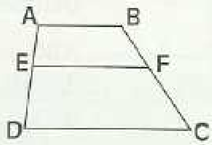
Pour la finition d'un mur de sa clôture, Kokou a confectionné une échelle. Une esquisse en est donnée ci-contre. L'unité de longueur est le cm. Les supports des traverses (MM'), (NN'), …, (PP') et (RR') sont parallèles à (BC) et à (AD).
Calculons CR' et CQ' sachant que : AB = 180 ; CD = 198 ; QR = 20 ; RB = 30.

D'après la propriété : $\frac{CR'}{BR} = \frac{CD}{BA}$ et $\frac{CR'}{30} = \frac{198}{180}$.

Donc : CR' = 33.

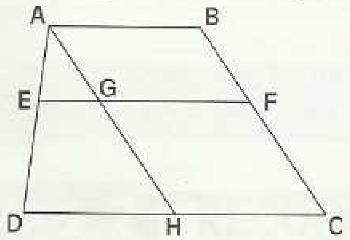
De même, on établit que : CQ' = 55.

Exemple 2



L'unité de longueur est le mm. ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que : AB = 20, BC = 30, CD = 40 et DA = 25.
Sur le côté [AD], on a marqué le point E tel que : AE = 10. F est le point d'intersection de (BC) avec la droite parallèle à (AB) passant par E.
Calcule EF.

Utilisons le procédé qui a permis de déduire la propriété générale de Thalès : construisons la droite parallèle à (BC) passant par A, qui coupe respectivement (EF) et (DC) en G et H.



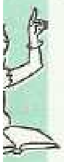
D'après la conséquence de la propriété de Thalès : $\frac{AE}{AD} = \frac{EG}{DH}$

C'est-à-dire : $\frac{AE}{AD} = \frac{EF - GF}{DC - HC}$

Justifie que : AB = GF = HC.

Donc : $\frac{10}{25} = \frac{EF - 20}{40 - 20}$; EF = 28

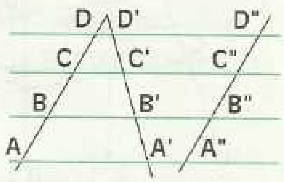
EXERCICE



4.a Sur la figure ci-contre, (AA'), (BB'), (CC'), (DD') sont des droites parallèles.

Indique, parmi les quotients suivants, ceux qui sont égaux.

$\frac{AB}{AD}$; $\frac{AB}{AC}$; $\frac{BC}{BD}$; $\frac{A'B'}{A'D'}$; $\frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{B'C'}{B'D'}$; $\frac{A''B''}{A''D''}$; $\frac{A''B''}{A''C''}$; $\frac{B''C''}{B''D''}$



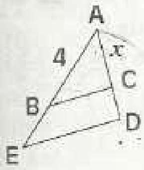
EXERCICES

ENTRAÎNEMENT

1 PROPRIÉTÉ DE THALÈS DANS LE TRIANGLE

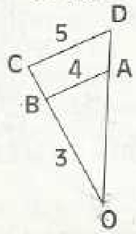
1 Calcule x dans chacun des cas ci-dessous :

1er cas



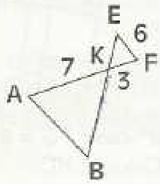
AE = 6
AD = 9
AC = x
(BC) // (ED)

2e cas



OC = x
(BA) // (CD)

3e cas



AB = x
(AB) // (EF)

2 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que AB = 15 et AC = 5.
Les points M et N appartiennent respectivement aux côtés [AC] et [AB] et sont tels que AM = 3 ; AN = 9.
Justifie que : (MN) // (CB).

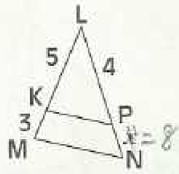
3 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que
AB = 7,5 et AC = 3.
Les points M et N appartiennent respectivement aux demi-droites opposées [AB] et [AC] et sont tels que AM = 12,5 ; AN = 5.
Justifie que : (MN) // (CB).

4 ABCD est un parallélogramme.
Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [DC]. Les points M et N sont respectivement les points d'intersection des droites (DI) et (BJ) avec la droite (AC).
Démontre que : AM = MN = NC.

5 ABCD est un quadrilatère quelconque.
M est le point d'intersection des droites (AB) et (DC). La droite parallèle à (AC) passant par le point D coupe (AB) au point P. La droite parallèle à (DB) passant par le point C coupe (AB) au point Q.
Démontre que : $\frac{MP}{MA} = \frac{MB}{MQ}$.

2 UTILISATIONS DES PROPRIÉTÉS DE THALÈS

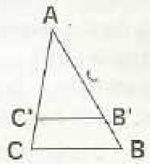
6 Calcule x et LN dans la situation suivante :



NP = x = 8

(KP) // (MN)

7 L'unité de longueur est le centimètre.
Dans la figure ci-dessous : (B'C') // (BC).

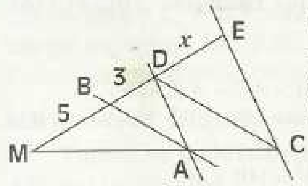


1er cas : AB = 8 ;
B'C' = 5 ; C'C = 2 ;
B'B = 4.
Calcule B'A ; C'A ;
BC et AC.

2e cas : AB' = 2 ; B'B = 3,5 ; C'C = 7 ; B'C' = 5.
Calcule C'A ; AC et BC.

8 A, B et C sont trois points alignés tels que :
AC = $\frac{3}{2}$ AB.
Place un point E qui n'appartient pas à la droite (AB). Construis le point F de [AC] tel que :
AF = $\frac{3}{2}$ AE.
1) La droite passant par B et parallèle à (CE) coupe la droite (AE) au point G.
Démontre que : AG = $\frac{2}{3}$ AE.
2) La droite passant par F et parallèle à (CE) coupe la droite (AB) au point H.
x est le nombre tel que AH = x AB.
Calcule x.

9 L'unité de longueur est le centimètre.



Sur l'esquisse ci-contre : (AB) // (CD) et (AD) // (CE).
Calcule x.

10 L'unité de longueur est le centimètre.
C et D sont deux points du plan tels que : CD = 7.

EXERCICES

1) Construis un point N de la droite (CD) tel que $\frac{CN}{CD} = \frac{3}{5}$.

2) Trouve un point P de (CD), distinct de N tel que $\frac{CP}{CD} = \frac{3}{5}$.

3 TRIANGLES SEMBLABLES

11 ABC est un triangle.
Le point I appartient au côté [AB] et est différent de A et de B. (D) est la droite passant par le point C et parallèle à la droite (AB).
La droite passant par I et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) au point J et la droite (D) au point K.
Démontre que les triangles ABC et JCK sont semblables.
Cite les sommets homologues de ces triangles.

12 $(\mathscr{C})$ est un cercle de rayon r et de diamètre [AB]. La droite (D) est la tangente à $(\mathscr{C})$ en B. Une droite passant par A recoupe $(\mathscr{C})$ en E et coupe (D) en F. Démontre que : $AE \times AF = 4r^2$.

13 (A'A), (B'B) et (C'C) sont les hauteurs d'un triangle ABC dont H est l'orthocentre.
Démontre les égalités suivantes :

$A'A \times A'H = A'B \times A'C$

$HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$

$BC \times AA' = CA \times BB' = AB \times CC'$

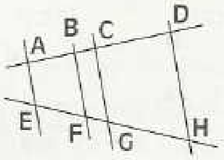
Les exercices 14 et 15 sont liés

14 ABC est un triangle rectangle en A et [AH] la hauteur relative à son hypoténuse.
1) Démontre que les triangles ABC et HAC sont semblables.
Démontre que :
$AC^2 = BC \times HC$; $AB \times AC = AH \times BC$
2) Démontre que les triangles HAB et HCA sont semblables.
Démontre que : $AH^2 = HB \times HC$.

15 [AB] est un segment de longueur 6 cm et H un point de [AB].
Construis un carré qui a pour aire $HA \times HB$.

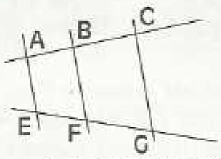
4 PROPRIÉTÉ DE THALÈS DANS LE CAS GÉNÉRAL

16 L'unité de longueur est le centimètre.
Dans la figure ci-dessous, les droites (AE), (BF), (CG) et (DH) sont parallèles.



1er cas : EF = 5 ;
AC = 6 et AB = 4.
Calcule EG.
2e cas : EH = 3,5 ;
AB = 4 et AD = 7.
Calcule EF.
3e cas : FG = 5 ; GH = 2,5 et CD = 1,5.
Calcule BC.

17 L'unité de longueur est le centimètre.



Sur l'esquisse ci-contre :
– les droites (AE), (BF) et (CG) sont parallèles;
– les points A, B, C, E, F et G sont tels que :
AB = 2 ; BC = 5 et EF =1.
Calcule EG.

APPROFONDISSEMENT

18 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD], (AB < CD). I est le milieu de [AB].
Les droites (AD) et (BC) se coupent en K.
Les droites (AC) et (BD) se coupent en L.
Les droites (KI) et (DC) se coupent en J.
Démontre que J est le milieu de [DC].
Les droites (IL) et (CD) se coupent en J'.
Démontre que J' est le milieu de [DC].
Justifie que les points I, J, K et L sont alignés.

19 ABC est un triangle. M est le point de [AB] tel que AM = AC.
La droite parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.
Démontre que : $AN \times AB = AC^2$.
Trouve un programme de construction d'un segment de longueur ℓ tel que : $3\ \ell = 16$.

20 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].
E est le point de [AD] tel que : $\frac{AE}{DE} = \frac{m}{n}$.
On pose : AB = a et CD = b.

La droite parallèle à (DC) qui passe par E coupe (BC) en F, (AC) en G et (BD) en H.

Calcule les quotients $\frac{DA}{DE}$ et $\frac{AD}{AE}$ en fonction de m et n.

Calcule EG, EH, FG, FH et EF en fonction de m, n, a et b.

Justifie que [EF] et [GH] ont le même milieu.

21 Dans un trapèze EFGH de bases [EF] et [HG], on sait que : HG > EF.

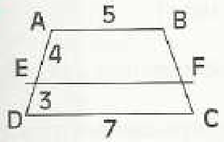
Par le milieu I du côté [EH], on trace la droite parallèle à (EF). Cette droite coupe respectivement les droites (EG), (FH) et (FG) aux points K, J et L.

1) Démontre que : $IL = \frac{EF + HG}{2}$.

2) Compare IJ et KL.

3) Exprime JK en fonction de EF et HG.

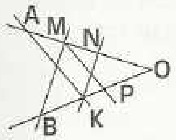
22



Sur l'esquisse ci-contre, les droites (AB), (EF) et (DC) sont parallèles.

Calcule EF.

23



Sur l'esquisse ci-contre, (AK)//(MP) et (KN)//(BM).

Démontre que : (AB)//(NP).

24 (D) et (L) sont deux droites sécantes en O. M, N et P sont trois points de (D). M' et N' sont deux points de (L) tels que les droites (MM') et (NN') sont parallèles. (D') est la droite passant par M' et parallèle à la droite (N'P). Q est le point d'intersection de (D) et (D').

Deux droites parallèles passant par Q et P coupent respectivement (L) en Q' et P'.

Démontre que : (MQ') // (NP').

25 ABC est un triangle.

E est le point du côté [AB] tel que : $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$.

La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) au point F.

La droite parallèle à (AB) passant par F coupe la droite (BC) au point G.

La droite parallèle à (AC) passant par G coupe la droite (AB) au point H.

Les droites (EF) et (GH) se coupent au point I.

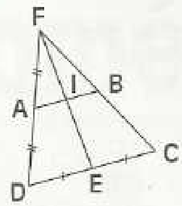
Démontre que :

1) $\frac{AH}{AB} = \frac{1}{3}$.

2) H est le milieu du segment [AE].

3) $\frac{HI}{AF} = \frac{1}{2}$.

26 Sur la figure codée ci-dessous, (AB) // (DC).



Démontre que le point I est le milieu du segment [FE] et est aussi le milieu du segment [AB].

27 ABC est un triangle. I est le milieu du côté [AB]. La droite passant par I et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) au point J.

La droite passant par le point J et parallèle à la droite (AB) coupe la droite (BC) au point K.

M est le point d'intersection des droites (IC) et (JK).

Démontre que :

1) (IK) // (AC)

2) M est le milieu du segment [JK].

28 ABC est un triangle. E est un point de la droite (AB). La droite passant par E et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) au point F.

La droite passant par F et parallèle à la droite (EC) coupe la droite (AB) au point H.

Démontre que : $AE^2 = AH \times AB$.

29 L'unité de longueur est le centimètre.

A, B et C sont trois points alignés tels que : $B \in [AC]$, AB = 5 et AC = 7.

1) Construis un parallélogramme AMNP de centre O tel que :

$C \in [MN]$, $B \in [MO]$, $B \neq M$ et $B \neq O$.

2) La droite (AB) coupe la droite (NP) au point D. Calcule DC.

30 ABCD est un quadrilatère quelconque.

Les points I, J, O, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [IJ], [AC] et [BD].

Démontre que O est le milieu du segment [KL].

Les exercices 31 et 32 sont liés

31 **Théorème de Ménélaüs.**

ABC est un triangle.

Une droite (D) coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement aux points M, N et P.

Démontre que : $\frac{PB}{PC} \times \frac{NC}{NA} \times \frac{MA}{MB} = 1$

EXERCICES

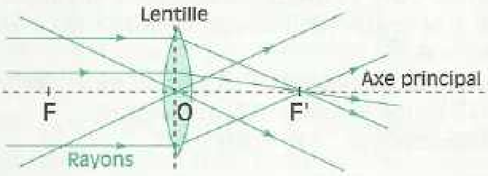
(Tu peux utiliser la droite passant par le point C et parallèle à (AB).)

32 Théorème de Céva.
ABC est un triangle.
A', B' et C' sont trois points tels que
A' ∈ [BC], B' ∈ [AC] et C' ∈ [AB] .
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en M.

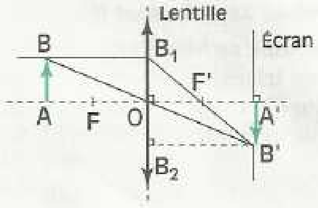
Démontre que : $\frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} \times \frac{AC'}{C'B} = 1$

(Tu peux utiliser la droite passant par le point A et parallèle à (BC).)

33 Lentille convergente
Une lentille convergente possède deux foyers F et F', symétriques par rapport au centre optique O de la lentille et a pour propriété de dévier les rayons lumineux qui arrivent parallèlement à son axe vers un des foyers ; les rayons qui passent par le centre O de la lentille ne sont pas déviés. OF = OF' = *f*.
f est appelé distance focale de la lentille ;
[FF'] s'appelle l'axe principal.

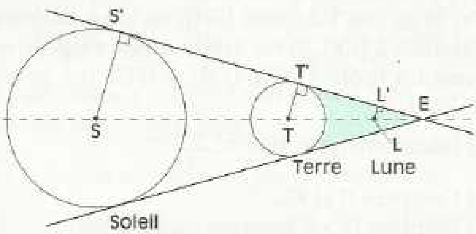


Dans la pratique, on néglige l'épaisseur de la lentille.
On considère une lentille convergente de 5 cm de distance focale que l'on éclaire par un faisceau lumineux parallèle à son axe principal. On place, devant la lentille, un objet plan de 3 cm de hauteur, posé sur l'axe principal à 8 cm du centre O (sur la figure, cet objet est représenté par le segment [AB]). On recueille l'image inversée [A'B'] de [AB] sur un écran placé perpendiculairement à l'axe principal comme indiqué ci-dessous.



1) Fais une figure en vraie grandeur.
2) Calcule la distance de l'écran à la lentille et la hauteur de l'image de l'objet.
Vérifie sur ton dessin.

34 Éclipse de Lune
L'unité de longueur est le kilomètre.
Le Soleil éclairant la Terre, il se forme derrière celle-ci une zone d'ombre.



SS' ≡ 696 000 ; TT' ≡ 6 360 et
ST ≡ 149 600 000.
Le centre L de la Lune est à environ 382 000 km du centre T de la Terre.
Sur la figure, la Lune occupe une position telle que son centre L est un point du segment [TE].
Désignons par L' le projeté orthogonal de L sur (S'E).
1) Calcule TE.
2) Calcule LL'.
3) Sachant que le rayon de la Lune est d'environ 1 738 km, explique pourquoi celle-ci est entièrement dans la zone d'ombre de la Terre.

La Terre étant représentée par un disque de 1 cm de diamètre, le Soleil aurait dû être représenté par un disque de 1,09 m. Quant à la distance TS, elle devrait être représentée par un segment de 117,6 m !!!
Le dessin ci-dessus est une esquisse, non un dessin à l'échelle.