Comment faire un raisonnement par récurrence
Le principe

On va très souvent utiliser le *raisonnement par récurrence* en Terminale S.
Les étapes de ce raisonnement sont toujours les mêmes et elles sont à bien respecter :

- *Initialisation* : on doit vérifier que ce que l'on veut montrer (encadrement, formule ...) est *vérifié pour un certain rang*. C'est à dire que l'on fera la *vérification* pour le rang 0 ou le rang 1 ou .....
C'est comme si l'on vérifiait la *source d'une information*.
Attention, le rang de cette initialisation nous permettra ensuite d'affirmer que la propriété est vérifiée *à partir de ce rang*.

- ***Hérédité*** : c'est la particularité du raisonnement par récurrence.
On va *supposer* que ce que l'on veut montrer est vraie pour le rang n , et en utilisant cette suppositon on doit montrer que cela reste vraie pour le rang suivant $n + 1$.
C'est comme si l'on vérifiait la *bonne transmission d'une information*.

- *Conclusion* : elle nous permet de résumer la démarche et le résultat obtenu.

Les trois grands types de raisonnement par récurrence (à voir sur les fiches suivantes)

Le **premier type** correspond au fait d'obtenir un ***encadrement*** pour une suite (ou parfois juste une ***minoration*** ou une ***majoration***).
Les questions posés seront du type :

- pour tout n , montrons que $3 \leqslant U_n \leqslant 4$ (c'est un *encadrement*).
- pour tout n , montrons que $U_n \leqslant 10$ (c'est une *majoration*)
- pour tout n , montrons que $U_n \geqslant 2$ (c'est une *minoration*)

Dans l'hérédité, il faudra prendre l'habitude de t***oujours partir des inégalités avec U_n*** afin de construire petit à petit les inégalités pour U_{n+1} .

Le **deuxième type** correspond au fait d'obtenir une ***formule explicite*** (en fonction de n).
Les questions posés seront du type :

- pour tout n , montrons que $U_n = 12 \times 2^n - 5$

Dans l'hérédité, il faudra prendre l'habitude de ***toujours partir du lien existant entre U_{n+1} et U_n*** .

Le **troisième type** correspond au fait d'utiliser une fonction f définie par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$.
On rencontrera très souvent ce type de récurrence lorsque, dans la définition de la suite, on se retrouve avec U_n au numérateur et au dénominateur d'une fraction.
Les questions posés seront du type :

- montrer que la suite (U_n) est croissante , c'est à dire que $U_n \leqslant U_{n+1}$.
- montrer que la suite (U_n) est décroissante , c'est à dire que $U_n \geqslant U_{n+1}$.
- prouver un encadrement (ou une majoration ou un minoration).

Dans l'hérédité, il faudra juste vérifier que la fonction f est bien croissante afin de conserver le sens des inégalités.

Raisonnement par récurrence
Pour encadrer (ou minorer) une suite (1)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de partir de ***la minoration de*** U_n .
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1}, et on obtient la même minoration pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}95\,U_n + 200$ avec $U_0 = 10\,000$.
On veut montrer la minoration suivante : **pour tout n , montrons que $U_n \geqslant 4\,000$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = 10\,000$
Donc on a bien $U_0 \geq 4\,000$
L'inégalité $U_n \geq 4\,000$ est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité
On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la minoration initiale de U_n .
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $U_n \geqslant 4\,000$

On suppose que la minoration est vraie au rang n,
soit $U_n \geq 4\,000$
Montrons que cela reste vrai au rang $(n+1)$,
soit $U_{n+1} \geq 4\,000$

On part de : $U_n \geq 4\,000$

bien respecter ce point de départ !

soit $0{,}95\,U_n \geq 0{,}95 \times 4000$ soit 3800

soit $0{,}95\,U_n + 200 \geq 3800 + 200$

soit $U_{n+1} \geq 4000$

↳ c'est bon !!

Conclusion
Si la minoration est vérifié au rang *n*
Alors cette minoration reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette minoration est vraie au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la minoration sera vérifiée pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Pour encadrer une suite (2)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de l'encadrement de U_n***.
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1} et on obtient le même encadrement pour U_{n+1}.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \sqrt{2Un+3}$ avec $U_0 = 4$.
On veut montrer l'encadrement suivant : **pour tout *n*, montrons que $3 \leqslant U_n \leqslant 4$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = 4$

Donc on a bien $3 \leq U_0 \leq 4$

L'encadrement $3 \leq U_n \leq 4$ est bien vérifié au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de l'encadrement initial de U_n.
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $3 \leqslant U_n \leqslant 4$

On suppose que l'encadrement est vrai au rang n,
soit $3 \leq U_n \leq 4$

Montrons que cela reste vrai au rang $(n+1)$,
soit $3 \leq U_{n+1} \leq 4$

On part de : $3 \leq U_n \leq 4$

bien respecter ce point de départ !

soit $6 \leq 2U_n \leq 8$ (en multipliant par 2)

soit $9 \leq 2U_n + 3 \leq 11$ (en ajoutant 3)

soit $\sqrt{9} \leq \sqrt{2U_n+3} \leq \sqrt{11}$ (≤ 4) à vérifier !

soit $3 \leq U_{n+1} \leq 4$

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang *n*
Alors cet encadrement reste vérifié au rang $n + 1$.
Or cet encadrement est vrai au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l'encadrement sera vérifié pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Pour encadrer une suite (3)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de l'encadrement de U_n***.
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1}, et on obtient le même encadrement pour U_{n+1}.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{Un}+1}$ avec $U_0 = \dfrac{1}{3}$.
On veut montrer l'encadrement suivant : **pour tout n, montrons que $0 \leqslant U_n \leqslant 1$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \dfrac{1}{3}$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq 1$

L'inégalité $0 \leq U_n \leq 1$ est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de l'encadrement initial de U_n.
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

On suppose que l'encadrement est vrai au rang n,
soit $0 \leq U_n \leq 1$.

Montrons que cela reste vrai au rang $(n+1)$,
soit $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

On part de : $0 \leq U_n \leq 1$

bien respecter ce point de départ

soit $0 \leq 2U_n \leq 2$ (en multipliant par 2)

soit $1 \leq 2U_n + 1 \leq 3$ (en ajoutant 1)

soit $\dfrac{1}{1} \geq \dfrac{1}{2U_n+1} \geq \dfrac{1}{3}$ (on inverse les inégalités)

c'est à dire $(0 \leq)\, \dfrac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 1$

c'est évident !

c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang n
Alors cet encadrement reste vérifié au rang $n+1$.
Or cet encadrement est vérifié au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l' encadrement sera vérifié pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (1)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de n) et on montre que cette expression reste vérifiée pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 2\,U_n + 5$ avec $U_0 = 7$
On veut montrer la formule suivante : **pour tout n , montrons que $U_n = 12 \times 2^n - 5$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \boxed{7}$

On remplace alors n par 0 dans la formule de U_n

$\rightarrow$ on obtient $U_0 = 12 \times 2^0 - 5 = 12 \times 1 - 5 = \boxed{7}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = 12 \times 2^n - 5$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = 12 \times 2^{n+1} - 5$

On part de : $U_{n+1} = 2U_n + 5$

bien respecter ce point de départ

on a remplacé U_n par sa formule

soit $U_{n+1} = 2(12 \times 2^n - 5) + 5$

soit $U_{n+1} = 2 \times 12 \times 2^n - 10 + 5$

$U_{n+1} = 12 \times 2 \times 2^n - 5$

⚠ ne pas calculer $2 \times 12 = 24$ et faire apparaître $2 \times 2^n = 2^{n+1}$

$U_{n+1} = 12 \times 2^{n+1} - 5$

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion

Si la formule est vérifiée au rang n
Alors cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette formule est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (2)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de *n*) et on montre que cette expression reste vraie pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{Un}{Un+1}$ avec $U_0 = 1$

On veut montrer la formule suivante : **pour tout *n* , montrons que $U_n = \dfrac{1}{n+1}$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \boxed{1}$

on remplace alors n par 0 dans la formule de U_n

$\longrightarrow$ on obtient $U_0 = \dfrac{1}{0+1} = \boxed{1}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 0.

Hérédité
On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$

$(n+1)+1$

On part de : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$

bien respecter ce point de départ

soit $U_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1+n+1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+2}$

on remplace U_n par sa formule

$\hookrightarrow$ c'est bon !

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \times \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$!

Conclusion
Si la formule est vérifiée au rang *n*
Alors cette formule reste vérifiée au rang *n + 1*.
Or cette formule est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (3)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de n) et on montre que cette expression reste vraie pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$

On veut montrer la formule suivante : **pour tout $n \geqslant 1$, montrons que $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_1 = \boxed{1}$ (on aurait $U_2 = 1+2 = 3$)

On remplace alors n par 1 dans la formule de U_n

→ on obtient $U_1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \boxed{1}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 1.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

Mais, avec cet énoncé, c'est à vous de trouver ce lien !

On écrit alors $U_{n+1} = \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n}_{U_n} + (n+1) = U_n + (n+1)$ soit $U_{n+1} = U_n + (n+1)$

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On part de : $U_{n+1} = U_n + (n+1)$ on a remplacé U_n par sa formule

bien respecter ce point de départ

soit $U_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

soit $U_{n+1} = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

on a factorisé par $(n+1)$ ↳ c'est bon !!

Conclusion

Si la formule est vérifiée au rang n

Alors cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.

Or cette formule est vérifiée au rang 1.

Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Raisonnement par récurrence
Monotonie d'une suite définie à l'aide d'une fonction

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné .
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{3\ \text{Un} + 2}{\text{Un} + 1}$ avec $U_0 = 1$.

On veut montrer que la suite (U_n) est croissante, c'est à dire que $U_{n+1} > U_n$.

La méthode

Préambule

La méthode de base consistant à déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ serait fastidieuse (on arriverait sur un trinôme du second degré et il faudait alors situer les valeurs de U_n à l'aide d'un encadrement).
De même, tout raisonnement direct par récurrence serait rendu difficile à cause du terme U_n qui se retrouve deux fois dans l'écriture. Il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.

→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f(x) = \dfrac{3\ x + 2}{x + 1}$.

Mais il faut montrer que f est croissante (sur $[0\ ;\ +\infty[$ car les termes U_n sont clairement positifs).

On a $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ soit $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\left(\text{avec } \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$

↪ f' est positive sur $[0\ ;+\infty[$ → f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

Initialisation

On sait que $U_0 = 1$

On calcule $U_1 = \dfrac{3U_0 + 2}{U_0 + 1} = \dfrac{3\times 1 + 2}{1+1} = \dfrac{5}{2}$

On a donc $U_1 > U_0$.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

On suppose donc $U_{n+1} > U_n$

On obtient $f(U_{n+1}) > f(U_n)$ La fonction est CROISSANTE donc elle CONSERVE l'ordre !

soit $U_{n+2} > U_{n+1}$

↪ c'est bon !!

Conclusion et (U_n) est bien croissante !!

Si la propriété est vérifiée au rang *n*
Alors cette propriété reste vérifiée au rang *n + 1*.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la suite est bien croissante pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Monotonie d'une suite définie à l'aide d'une fonction (2)

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné **.**
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}95\ U_n + 200$ avec $U_0 = 10\ 000$.
On veut montrer que la suite (U_n) est décroissante, c'est à dire que $U_{n+1} < U_n$.

La méthode

Préambule
La méthode de base consistant à déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ fonctionnerait mais cela demanderait d'encadrer la suite (U_n) afin de pouvoir conclure sur le signe du résultat.
→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f\,(\,x\,) = 0{,}95\,x + 200$.
Mais il faut juste montrer que f est croissante .

On a $f(x) = 0{,}95x + 200$ soit $f'(x) = 0{,}95$
→ f' est positive sur $\mathbb{R}$ → f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Initialisation

on sait que $U_0 = 10\ 000$
on calcule $U_1 = 0{,}95 U_0 + 200 = 0{,}95 \times 10\ 000 + 200$
on obtient $U_1 = 9700$ et on a bien $U_1 < U_0$.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*
On va ici obtenir un résultat qui surprend la première fois qu'on le voit.
En effet, on va travailler avec une fonction <u>croissante</u> qui va nous permettre de montrer que la suite est, quant à elle, <u>décroissante</u>.

on suppose donc $U_{n+1} < U_n$
on obtient $f(U_{n+1}) < f(U_n)$
soit $U_{n+2} < U_{n+1}$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

↳ c'est bon !!
et (U_n) est bien décroissante !

Conclusion
Si la propriété est vérifiée au rang n
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la suite est bien décroissante pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Encadrement d'une suite définie à l'aide d'une fonction

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné .
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{3\,\text{Un}+2}{\text{Un}+1}$ avec $U_0 = 1$.

On veut montrer que, pour tout *n* , on a l'encadrement : $1 \leqslant U_n \leqslant 3$.

La méthode

Préambule

La méthode de base consistant à travailler sur les inégalités, en partant de l'encadrement de U_n , serait ici très piègeuse !! Il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.

→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f(x) = \dfrac{3\ x+2}{x+1}$.

Mais il faut montrer que f est croissante (sur $[0\ ;+\infty[$ car les termes U_n sont clairement positifs).

On a $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ soit $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

→ f' est positive sur $[0;+\infty[$ → f est croissante sur $[0;+\infty[$

Initialisation

On sait que $U_0 = 1$

Donc on a bien $1 \leq U_0 \leq 3$

L'encadrement est bien vérifié au rang 0.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

on suppose donc $1 \leq U_n \leq 3$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

on obtient $f(1) \leq f(U_n) \leq f(3)$

et donc $(1 \leq)\ \dfrac{5}{2} \leq U_{n+1} \leq \dfrac{11}{4}\ (\leq 3)$

évident évident

On a bien $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

↳ c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang *n*
Alors cet encadrement reste vérifié au rang *n + 1*.
Or cet encadrement est vérifié au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l'encadrement sera vérifié pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Encadrement et monotonie en un seul coup (1)

Certains exercices nous proposent de faire un raisonnement par récurrence qui permettra d'un seul coup de prouver la monotonie d'une suite **et** de trouver un encadrement de cette suite.
Si c'est bien maitrisé, cela fait gagner un peu de temps car on fait un seul raisonnement plutôt que deux.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}94\, U_n + 1{,}5$ avec $U_0 = 1$.
On veut montrer que ,pour tout n , on a $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 25$.

Cela prouvera en même temps que la suite est croissante (car on a $U_n \leqslant U_{n+1}$) et que la suite est bornée (car elle est encadrée par 0 et par 25).

La méthode

Initialisation

On a $U_0 = 1$

On calcule $U_1 = 0{,}94\, U_0 + 1{,}5$
$= 0{,}94 \times 1 + 1{,}5 = 2{,}44$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 25$

Hérédité

La relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n est suffisamment simple pour que l'on puisse partir directement de $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 25$ et que l'on passe au rang d'après en multipliant par 0,94 puis en ajoutant 1,5.

On suppose donc $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 25$

soit $0 \leq 0{,}94\, U_n \leq 0{,}94\, U_{n+1} \leq 23{,}5$ en multipliant par 0,94.

soit $1{,}5 \leq 0{,}94\, U_n + 1{,}5 \leq 0{,}94\, U_{n+1} + 1{,}5 \leq 25$ en ajoutant 1,5.

On a bien $1{,}5 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 25$

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion

Si la propriété est vérifiée au rang *n*
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété sera vérifiée pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Encadrement et monotonie en un seul coup (2)

Certains exercices nous proposent de faire un raisonnement par récurrence qui permettra d'un seul coup de prouver la monotonie d'une suite **et** de trouver un encadrement de cette suite.
Si c'est bien maitrisé, cela fait gagner un peu de temps car on fait un seul raisonnement plutôt que deux.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}75\, U_n\ (1 - 0{,}15\, U_n)$ avec $U_0 = 0{,}6$.
On veut montrer que ,pour tout n , on a $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 1$.

Cela prouvera en même temps que la suite est décroissante (car on a $U_{n+1} \leqslant U_n$) et que la suite est bornée (car elle est encadrée par 0 et par 1).

La méthode

Préambule
La relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n va poser problème à cause du terme U_n qui se retrouve deux fois dans l'écriture. Je rappelle que cela signifierait que tout raisonnement direct par récurrence serait difficile et qu'il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.
→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (U_n)$.
On aura $f(x) = 0{,}75\, x\ (1 - 0{,}15\, x)$. Et il faut juste montrer que f est croissante sur [0 ; 1].

On a $f(x) = 0{,}75x(1-0{,}15x) \rightarrow f'(x) = -0{,}225x + 0{,}75$
Si $x \in [0;1]$, il est évident que $f'(x) > 0$
Et la fonction f est donc bien croissante sur $[0;1]$.

Initialisation

On a $U_0 = 0{,}6$
On calcule $U_1 = 0{,}75 U_0 (1 - 0{,}15 U_0)$
$= 0{,}75 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}6)$
$= 0{,}4095$
Donc on a bien $0 \leq U_1 \leq U_0 \leq 1$

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

On suppose donc $0 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 1$
On obtient $f(0) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(1)$
On a bien $0 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 0{,}6375\ (\leq 1)$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

↳ c'est bon !!

Conclusion
Si la propriété est vérifiée au rang n
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété sera vérifiée pour tout entier n.

Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 6

Le raisonnement par récurrence

Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

Pierre Dac a dit un jour :

« *Quand on ne travaillera plus le lendemain des jours de repos, la fatigue sera vaincue.* »

Suivant cette maxime pleine de sagesse, un gouvernement décide de faire passer le texte de loi suivant :

« *Si l'on ne travaille pas toute une journée, alors on travaille pas le lendemain non plus.* »

Le dimanche venu, les gens ne travaillent pas. Et selon la loi, ils ne doivent pas travailler le lendemain, *i.e* le lundi. Comme ils ne travaillent pas le lundi, ils ne doivent pas non plus travailler le mardi. Et ainsi de suite. Ainsi, plus personne ne travaillera à partir du premier jour de repos.

L'exemple précédent se traduit mathématiquement comme suit :

- Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété, « les gens ne travaillent pas le jour n ».
- La loi « Si l'on ne travaille pas toute une journée, alors on ne travaille pas le lendemain non plus », se traduit par :
$$\mathscr{P}(n) \text{ est vraie } \implies \mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie}$$
Autrement dit, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie. On dit que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est **héréditaire**.
- Le premier jour de repos permet d'écrire que $\mathscr{P}(1)$ est vraie. C'est ce que l'on appelle **l'initialisation**.

1. Principe du raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un donc principe de démonstration, visant á établir une propriété portant sur tous les entiers naturels.

Théorème 1 : Principe de récurrence

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si les conditions suivantes sont véfiriées :

1. **Initialisation.** $\mathscr{P}(0)$ est vraie ;
2. **Hérédité.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie ;

alors, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Métaphoriquement, on peut se représenter le principe du raisonnement par récurrence comme une ligne infinie de dominos qu'il s'agirait de faire tomber. Si l'on est capable de faire tomber le premier domino (*i.e* si l'hypothèse **d'initialisation** est vérifiée), et si la chute d'un domino fait tomber le suivant (*i.e* si l'étape **d'hérédité** est vérifiée), alors tous les dominos vont tomber.

Illustrons désormais ce nouveau mode de raisonnement sur un exemple, afin d'en fixer les règles de rédaction (passages surlignés), auxquelles il est **très vivement** recommandé de se conformer!

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3\,, \quad \text{pour } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

On souhaite montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 3$.
Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $u_n \geqslant 3$ ».

1. **Initialisation** $u_0 = 4 \geqslant 3$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
   Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 3$, donc
   $$u_{n+1} = 2u_n - 3 \geqslant 2\times 3 - 3 = 3$$
   Soit $u_{n+1} \geqslant 3$. Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 3$$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.
Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $u_n = 2^{n+1} + 1$ ».

1. **Initialisation** $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
   Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n = 2^{n+1} + 1$, donc
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 1 \\ &= 2\left(2^{n+1} + 1\right) - 1 \\ &= 2\times 2^{n+1} + 2 - 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$
   Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^{n+1} + 1$$

2. Propriété vraie pour $n \geqslant n_0$

Certaines propriétés dépendant d'un entier naturel n ne sont vraies qu'à partie d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Le cas échéant, l'étapte d'initialisation ne porte plus sur $\mathscr{P}(0)$ (ce qui n'aurait *a priori* pas de sens), mais sur $\mathscr{P}(n_0)$, le premier rang à partir duquel la propriété $\mathscr{P}$ est vraie. Le principe du raisonnement reste ensuite le même.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ».

1. **Initialisation** $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $1 - \dfrac{1}{1+1} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

   Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

   Soit $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{(n+2)}$. Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exemple : Démontrer que pour tout $n \geqslant 6$, $(n+2)^2 \leqslant 2^n$.

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $2^n \geqslant (n+2)^2$ ».

1. **Initialisation** Pour $n = 6$:$2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 64$. Ainsi, $\mathscr{P}(6)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 6$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $2^n \geqslant (n+2)^2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2\times 2^n \geqslant 2\times(n+2)^2 \\ &\geqslant 2\times(n^2+4n+4) \\ &\geqslant 2n^2+8n+8 \\ &\geqslant n^2+6n+9 \\ &= (n+3)^2 \\ &= ((n+1)+2)^2 \end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

3. **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \geqslant 6$, à savoir :

$$\forall n \geqslant 6, \qquad 2^n \geqslant (n+2)^2$$

3. Récurrences impliquant le signe Σ

Proposition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}$$

Remarque :

- Évidemment, on a également :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\,, \quad \sum_{k=2}^{n+1} u_k = \sum_{k=2}^{n} u_k + u_{n+1}\,, \quad \text{etc.}$$

- Cette propriété permet de démontrer un très grand nombre de formules portant sur le signe Σ, à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exemple : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

1. **Initialisation** Pour $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \quad \text{d'après la Proposition ci-dessus}\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

3. **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

1. **Initialisation** Pour $n = 1$:$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

   Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
3. **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Exercices

6.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n + 4$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

6.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

6.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

6.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.

6.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 3$.

6.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

6.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

6.8 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

6.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

6.10 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

6.11 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

6.12 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

6.13 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

6.14

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

5. Corrigé des exercices

6.1 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $u_n > 0$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = 2 > 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 0$, donc

$$u_{n+1} = 5u_n + 4 > 5 \times 0 + 4 = 4 > 0$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 0$$

6.2 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = -3$ et $(-4)^{0+1} + 1 = (-4)^1 + 1 = -4 + 1 = -3$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = (-4)^{n+1} + 1$, donc

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n = 5 - 4 \times \left((-4)^{n+1} + 1\right) = 5 + (-4)^{n+2} - 4 = (-4)^{n+2} + 1$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (-4)^{n+1} + 1$$

6.3 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $0 < u_n < 1$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 < u_n < 1$. Donc,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2} > 0 \text{ comme quotient de nombres strictements positifs}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2} < \frac{1 + 1}{0 + 2} = \frac{2}{2} = 1$$

Bref,

$$0 < u_{n+1} < 1$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_n < 1$$

6.4 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $u_n \leqslant 4$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = 1$ et $1 \leqslant 4$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \leqslant 4$. Donc,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \leqslant \frac{1}{4} \times 4 + 3 = 1 + 3 = 4$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant 4$$

6.5 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $0 < u_n \leqslant 3$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = 3$ et $0 < 3 \leqslant 3$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 < u_n \leqslant 3$. Donc,

$$1 = \sqrt{0+1} < \sqrt{u_n + 1} \leqslant \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Ainsi,

$$1 < u_{n+1} \leqslant 2$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_n \leqslant 3$$

6.6 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $u_n = 2^n + n + 1$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = 2$ et $2^0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^n + n + 1$, donc

$$u_{n+1} = 2u_n - n = 2 \times (2^n + n + 1) - n = 2 \times 2^n + 2n + 2 - n = 2^{n+1} + (n+1) + 1$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n + n + 1$$

6.7 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $0 < u_n \leqslant 3$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Donc,

$$\sqrt{\frac{0+1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1+1}{2}}$$

Ainsi,

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

6.8

1. On a :

$$u_2 = 2u_1 - u_0 - 2 = 2 \times 1 - 1 - 2 = -1$$

$$u_3 = 2u_2 - u_1 - 2 = 2 \times (-1) - 1 - 2 = -5$$

2. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $u_{n+1} \leqslant u_n$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc on a bien $u_1 \leqslant u_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_{n+1} \leqslant u_n$, et donc $-u_n \leqslant -u_{n+1}$. Ainsi,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2 \leqslant 2u_{n+1} - u_{n+1} - 2 \leqslant u_{n+1} - 2 \leqslant u_{n+1}$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

6.9

1. On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} \times 1 - 2 = -\frac{5}{3}$$
$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{14}{9}$$
$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{9}\right) = -\frac{14}{27}$$

2. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $u_n \geqslant 0$ »

Initialisation $(n = 4)$:
$u_4 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 3 - 2 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81}$, donc on a bien $u_4 \geqslant 0$ donc $\mathscr{P}_4$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 4$ un entier quelconque. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \geqslant 0$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant \frac{1}{3} \times 0 + 4 - 2 \geqslant 2$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 0$$

3. Soit $n \geqslant 5$. Alors $n - 1 \geqslant 4$ et donc, d'après la question précédente, $u_{n-1} \geqslant 0$. Dès lors,

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 1 - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geqslant n - 3$$

Ainsi, on a bien, pour tout $n \geqslant 5$,

$$u_n \geqslant n - 3$$

6.10 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $2^n \geqslant n$ »

Initialisation $(n=0$ et $n=1)$:

$2^0=1>0$ et $2^1=2>1$, donc $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ un entier quelconque. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $2^n>n$. Ainsi,

$$2^{n+1}=2\times 2^n>2n=n+n\geqslant n+1 \qquad \text{car } n\in\mathbb{N}^*$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad 2^n>n$$

6.11 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$ »

Initialisation $(n=1)$:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$. Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

6.12 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ »

Initialisation $(n=1)$:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$ et $\displaystyle\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

6.13 Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ »

Initialisation $(n=0)$:

$\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 0\times(0+1) = 0$ et $\displaystyle\frac{0(0+1)(0+2)}{3} = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

6.14

1. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ »

Initialisation $(n=0)$:

$\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$ et $\displaystyle\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. On sait (voir le chapitre 4), que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Donc, on a bien

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

---

6. Table des matières

Chapitre 1. Le raisonnement par récurrence

I. Découverte du raisonnement par récurrence

On considère la suite de nombres $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Ainsi, $u_0 = 1$ puis $u_1 = 2 \times u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ puis $u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ puis $u_3 = 2 \times u_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$.

Décrivons les premières valeurs de u_n dans un tableau et comparons ces valeurs aux premières puissances de 2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
2^{n+1}	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Il semblerait que chaque terme de la suite soit 1 au-dessous d'une certaine puissance de 2. On **conjecture** donc ou encore on pense fortement que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Conjecture : pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Nous avons la sensation que ce résultat est vrai mais nous ne l'avons jamais démontré et il s'agit maintenant de le montrer. Le tableau donné plus haut montre la formule quand n est un entier compris entre 0 et 10 au sens large. Mais ce tableau ne montre pas la formule quand $n = 11$. On peut bien sûr vérifier « à la main » si oui ou non le nombre u_{11} est égal à $2^{12} - 1$:

$$u_{11} = 2 \times u_{10} + 1 = 2 \times 2047 + 1 = 4095 = 4096 - 1 = 2^{12} - 1,$$

et la formule est encore vraie pour $n = 11$. Mais elle n'est pas démontrée pour $n = 12$ ...

Lançons nous maintenant dans ce que l'on appellera au paragraphe suivant, un **raisonnement par récurrence**. Nous ne savons pas si la formule est vraie quand $n = 12$ car nous n'avons pas pris la peine de le vérifier. Par contre,

si la formule est vraie au rang 12, **alors** elle sera vraie au rang 13.

En effet, si $u_{12} = 2^{13} - 1$, alors $u_{13} = 2 \times u_{12} + 1 = 2 \times (2^{13} - 1) + 1 = 2^{14} - 2 + 1 = 2^{14} - 1$. Ainsi, nous ne savons pas que la formule est vraie au rang 12 mais nous savons que si elle est vraie au rang 12, alors elle est encore vraie au rang 13. De même, si la formule est vraie au rang 17 ou encore si $u_{17} = 2^{18} - 1$ alors

$$u_{18} = 2 \times u_{17} + 1 = 2 \times (2^{18} - 1) + 1 = 2^{19} - 2 + 1 = 2^{19} - 1,$$

et la formule est alors vraie au rang 18. Plus généralement, si on suppose que la formule est vraie pour un certain rang n donné, alors la formule est automatiquement vraie au rang suivant. En effet, si on suppose que $u_n = 2^{n+1} - 1$, alors

$$u_{n+1} = 2 \times u_n + 1 = 2 \times (2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{(n+1)+1} - 2 + 1 = 2^{(n+1)+1} - 1.$$

Ainsi, si on savait que la formule était vraie pour $n = 0$ alors elle serait automatiquement vraie pour $n = 1$ et si on savait que la formule était vraie pour $n = 1$ alors elle serait automatiquement vraie pour $n = 2$ et si on savait que la formule était vraie pour $n = 2$ alors elle serait automatiquement vraie pour $n = 3$ ...

Finalement, il ne reste plus qu'à se convaincre que la formule est vraie quand $n = 0$ car alors la formule devient vraie pour $n = 1$ puis $n = 2$ puis, de proche en proche, pour tout entier naturel n.

Comme $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ et que $u_0 = 1$, on a effectivement $u_0 = 2^{0+1} - 1$. Mais alors, d'après la remarque précédente, on a montré que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Le type de raisonnement que nous avons tenu est un **raisonnement par récurrence** et le type de démonstration que l'on a effectué est une **démonstration par récurrence**. Dans le paragraphe suivant, on va formaliser ce type de démonstration.

II. Le raisonnement par récurrence

On énonce maintenant le principe du raisonnement par récurrence. On admet le théorème suivant :

Théorème. On veut prouver qu'une certaine propriété $\mathscr{P}(n)$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier naturel n.

Si

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie,
- pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ vraie implique $\mathscr{P}(n+1)$ vraie,

alors

pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Il se peut que la propriété $\mathscr{P}(n)$ ne soit pas vraie pour quelques valeurs de n parmi les premières et ne commence à être vraie qu'à partir d'un certain rang n_0 auquel cas on utilise le théorème suivant :

Théorème. On veut prouver qu'une certaine propriété $\mathscr{P}(n)$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un certain entier naturel n_0.

Si

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,
- pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ vraie implique $\mathscr{P}(n+1)$ vraie,

alors

pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

L'étape qui consiste à vérifier que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie s'appelle l'**initialisation** et l'étape qui consiste à vérifier que pour tout $n \geqslant n_0$, si la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie s'appelle l'**hérédité** ou encore cette étape consiste à vérifier que la propriété est **héréditaire**. L'hypothèse faite dans l'hérédité à savoir « si $\mathscr{P}(n)$ est vraie » s'appelle l'**hypothèse de récurrence**.

Exemple. Reprenons l'exemple du paragraphe I et rédigeons complètement la démonstration par récurrence. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On veut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Solution.	**Description des étapes de la solution.**
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.	**Etape 1.** On écrit explicitement la propriété à démontrer sans oublier de préciser explicitement les valeurs de n pour lesquelles la propriété va être démontrée.
• Si $n = 0$, $u_0 = 1$ et $2^{0+1}-1 = 2-1 = 1$. Donc, $u_0 = 2^{0+1}-1$. La propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.	**Etape 2 (initialisation).** On vérifie que la propriété à démontrer est vraie pour la première valeur de n envisagée c'est-à-dire ici $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = 2^{n+1} - 1$ et montrons que $u_{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$. $u_{n+1} = 2u_n + 1$ $= 2 \times (2^{n+1} - 1) + 1$ (par hypothèse de récurrence) $= 2^{(n+1)+1} - 2 + 1$ $= 2^{(n+1)+1} - 1$.	**Etape 3 (hérédité).** On se donne un entier naturel n fixé mais quelconque, supérieur ou égal à la valeur initiale c'est-à-dire ici 0 grâce à la phrase « Soit $n \geqslant 0$ ». On décrit explicitement le travail à effectuer : on suppose la propriété vraie au rang n et sous cette hypothèse, on la démontre au rang suivant $n+1$. Puis on effectue ce travail.
On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2^{n+1} - 1.}$	**Etape 4 (conclusion).** On énonce de nouveau le résultat qu'on a maintenant démontré et on encadre ce résultat.

La rédaction « Soit $n \geqslant 0$. Supposons que ... et montrons que ... » ne peut en aucun cas être remplacée par la rédaction « Supposons que pour tout $n \geqslant 0$ ... et montrons que ... ». Cette deuxième phrase n'a pas du tout la même signification. **Une démonstration par récurrence ne consiste pas à supposer ce que l'on veut montrer**.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = -1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 3u_n + 4$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2$.

Solution. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2$.

• $u_0 = -1$ et $3^0 - 2 = 1 - 2 = -1$. Donc $u_0 = 3^0 - 1$. La formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = 3^n - 2$ et montrons que $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 4 = 3 \times (3^n - 2) + 4 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 3^{n+1} - 6 + 4 \\ &= 3^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 3^n - 2.}$$

Exercice 2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $2^n > n + 3$.

Solution. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $2^n > n + 3$.

• $2^3 = 8$ et $3 + 3 = 6$. Donc $2^3 > 3 + 3$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 3$.
• Soit $n \geqslant 3$. Supposons que $2^n > n + 3$ et montrons que $2^{n+1} > (n + 1) + 3$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &> 2 \times (n + 3) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2n + 6 = (n + 1) + 3 + n + 2 \\ &> (n + 1) + 3. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 3,\ 2^n > n + 3.}$$

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Solution. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

• $u_0 = 1$ puis $u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 - 2 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$. Donc $u_1 \leqslant u_0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$ et montrons que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{3}u_{n+1} - 2 \\ &\leqslant \frac{1}{3}u_n - 2 \text{ (car } \frac{1}{3} \geqslant 0 \text{ et par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} \leqslant u_n.}$$

Pour l'exercice suivant nous avons besoin de définir une notation. L'écriture $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ signifie

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ est une somme de n termes. k prend successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$ puis la fraction $\dfrac{1}{k(k+1)}$ prend successivement les valeurs $\dfrac{1}{1 \times 2}, \dfrac{1}{2 \times 3}, \ldots, \dfrac{1}{n(n+1)}$ et enfin on additionne les n fractions ainsi obtenues. Donc,

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2},\quad \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3},\quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4}$$

Enfin, on passe de la somme à n termes à la somme à $n+1$ termes en ajoutant le $n+1$-ème terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Solution. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n=1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.}$$

Exercice 1 : Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 2 : Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+\ldots+n)^2$

Exercice 3 : Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 4 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$. 1) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

2) Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.

3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 5 : Même consigne que l'exercice 4 avec $u_{n+1}=\sqrt{4+u_n^2}$

Exercice 6 : On définit la suite (u_n) par $u_1=1$ et, pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=-2u_n+9$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=(-2)^n+3$

Exercice 7 (d'après BAC) : Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$u_0=3$ et, pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=2u_n-1$.

$v_0=1$ et, pour tout entier $n\geqslant 0$, $v_{n+1}=2v_n+3$

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n\geqslant 0$: a) $u_n=2^{n+1}+1$ b) $2u_n-v_n=5$

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 8 : On utilise la notation suivante : pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, $n!=1\times 2\times 3\times\ldots\times n$

$n!$ se lit « factorielle n ».

1) Démontrez que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1+2\times 2!+3\times 3!+\ldots+n\times n!=(n+1)!-1$

2) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $n!\geqslant 2^{n+1}$

Exercice 9 :On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$. Prouver par récurrence :

1) Que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs

2) Que la suite est croissante.

3) Que, pour tout entier naturel n, $u_n<2$

Exercice 10 : Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier.
« Si la suite (v_n) est définie par : $v_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=v_n+2n+2$, alors $v_n=n(n+1)$ pour tout entier $n\geqslant 0$. »

Exercice 11 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+2n+1$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.

Exercice 12 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+5}$.
Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n < 3$.

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n^2-u_n+1$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$.

Exercice 14 : Soit (q_n) la suite définie par $q_1=\frac{1}{3}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $q_{n+1}=\frac{n+1}{3n}q_n$.
Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $q_n=\frac{n}{3^n}$.

Exercice 15 : On place n points distincts sur un cercle, $n \geqslant 2$, et on note S_n le nombre de segments qu'on peut tracer ayant pour extrémités 2 de ces points.
1) Déterminer S_2, S_3, S_4 et S_5.
2) Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n.
3) Démontrer par récurrence la conjecture de la question 2.

Exercice 16 : Pour tout entier $n \geqslant 4$, on note d_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe[1] à n côtés.
1) Déterminer graphiquement d_4, d_5, d_6 et d_7.
2) Un exemple : tracer un pentagone ABCDE. Ajouter un point F à l'extérieur du pentagone. Quelles sont les diagonales de ABCDEF qui ne sont pas diagonales de ABCDE ?
3) Établir une relation entre d_n et d_{n+1}.
4) Montrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $d_n=\frac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 17 : Soit $u_0=2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.
Montrer que, pour tout entier naturel $\mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 18 : On définit la suite (u_n) par $u_0=1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}=2u_n-n+1$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

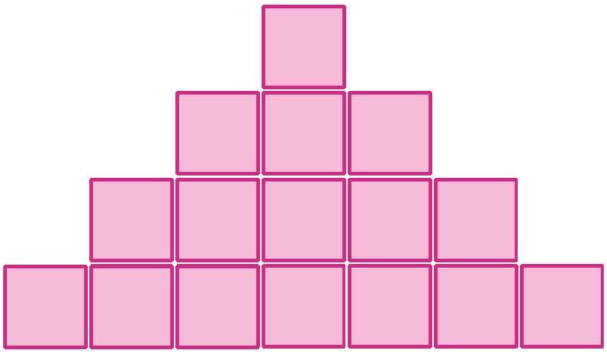
Exercice 19 (d'après BAC) : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}=u_n+2n+3$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$.

1 On dit qu'une figure est convexe lorsque, quel que soit le couple de points choisi à l'intérieur ou sur le pourtour de cette figure, le segment qui relie ces 2 points soit entièrement inclus dans la figure.

Exercice 20 : 1) Comparer 2^n et n^2 pour différentes valeurs de n.
2) Résoudre dans ℕ l'inéquation $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
3) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
4) Cette inégalité est-elle vraie pour $n<4$?

Exercice 21 (d'après l'examen du Baccalauréat allemand) : Les 7 premiers termes d'une suite sont : $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=13$, $a_5=21$ et $a_6=31$.
1) Trouver une formule de récurrence pour définir la suite (a_n).
2) Vérifiez si la formule trouvée au 1) satisfait à la condition : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^2 - n + 1$.

Exercice 22 : On note u_n le nombre de cubes nécessaires pour construire une pyramide à n étages selon le modèle ci-contre.
1) Déterminer les 7 premiers termes de cette suite.
2) Émettre une conjecture sur la formule de u_n en fonction de n.
3) Démontrer par récurrence cette conjecture.



Exercice 23 : Démontrer par récurrence que, $\forall\ a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Exercice 24 : Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est divisible par 5.

Exercice 25 : Les suites (x_n) et (y_n) sont définies par : $x_0=10$, $y_0=15$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = y_n + 9x_n$.
1) Calculer x_1 et y_1.
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier w_n tel que : $x_n = 10w_n$ et $y_n = 15w_n$.
3) Définir la suite (w_n) et exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de n.
4) En déduire les valeurs de x_5 et y_5.

Exercice 26 : Soient a et b deux nombres réels tels que $0<b\leqslant a$. Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0=a$, $v_0=b$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n}$.
1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leqslant u_n$.
2) a) En déduire que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{2}$.

c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$

3) Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = u_n v_n$. Montrer que (w_n) est constante.