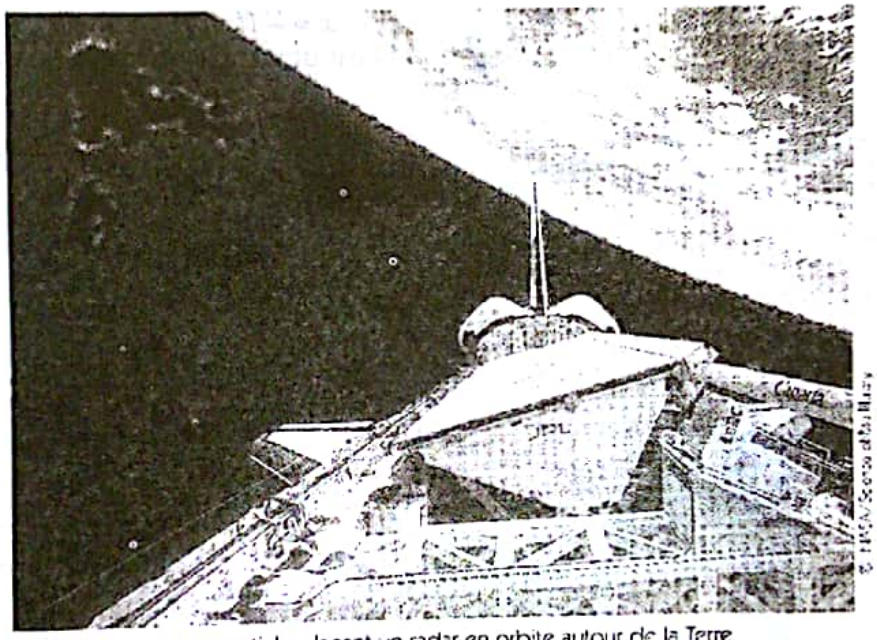
3 Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Introduction

En retournant au sol, la navette suit une trajectoire qui peut être approchée par des représentations graphiques de fonctions rationnelles.



Navette spatiale plaçant un radar en orbite autour de la Terre.

SOMMAIRE

1. Fonctions polynômes 36
2. Fonctions rationnelles 40
3. Résolution de problèmes 48

1 Fonctions polynômes

1.1. Fonctions polynômes de degré 3

Étude de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Démontrer que f est une fonction impaire.
En déduire l'ensemble d'étude de f.

2°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

3°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Construire $(\mathcal{C}_f)$.

Solution

1°) ***a) Ensemble de définition***
f est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

b) Ensemble d'étude
On a : pour tout nombre réel x, $f(-x) = (-x)^3 - x = -f(x)$.
Donc f est une fonction impaire et le point O est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
On peut restreindre l'étude de f à $[0 ; +\infty[$.

2°) ***Limites aux bornes de $[0 ; +\infty[$***
On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

3°) ***a) Dérivée et sens de variation***
f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 3x^2 + 1$.
On a : pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$;
donc la fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

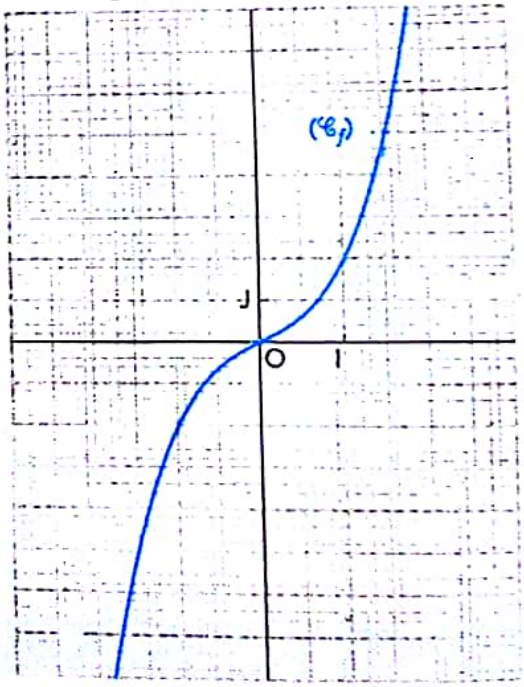
b) Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

4°) ***Table de valeurs***

x	0	1	2
$f(x)$	0	2	10

Représentation graphique



Étude de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 2$

On désigne par $(\mathcal{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
b) Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.

b) Dresser le tableau de variation de g.

3°) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_g)$ au point A d'abscisse 0.
b) Étudier la position de $(\mathscr{C}_g)$ par rapport à (T).

4°) Construire $(\mathscr{C}_g)$.

5°) Démontrer que le point A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*

g est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

b) Limites aux bornes de $\mathbb{R}$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*

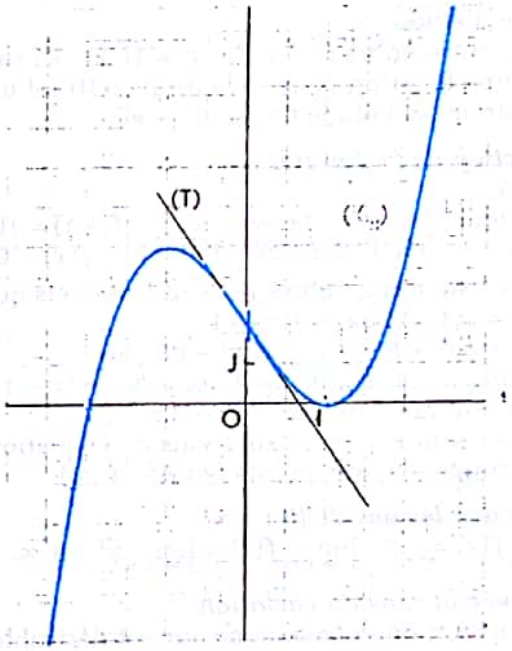
g est une fonction polynôme,
donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $g' : x \mapsto 3(x+1)(x-1)$.

On a : pour tout x de $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$; donc, g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; +\infty[$;
pour tout x de $]-1 ; 1[$, $g'(x) < 0$; donc, g est décroissante sur l'intervalle $]-1 ; 1[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Représentation graphique



3°) *Tangente en A(0 ; 2)*

a) Une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_g)$ en A est :
$y - 2 = g'(0)(x - 0)$; c'est-à-dire : $y = -3x + 2$.

b) On a : $g(x) - (-3x + 2) = x^3$.
Pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $x^3 < 0$; donc, $(\mathscr{C}_g)$ est au-dessous de (T) sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$; donc, $(\mathscr{C}_g)$ est au-dessus de (T) sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4°) *Table de valeurs*

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	0	4	2	0	4

5°) Pour tout nombre réel x, on a : $-x \in \mathbb{R}$;

et : $\dfrac{g(-x) + g(x)}{2} = \dfrac{-x^3 + 3x + 2 + x^3 - 3x + 2}{2} = 2$.

Donc, le point A(0 ; 2) est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

M

Soit $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les représentations graphiques respectives de deux fonctions f et g.
Pour étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, on peut étudier le signe de $f(x) - g(x)$:
- si $f(x) - g(x) < 0$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$;
- si $f(x) - g(x) = 0$, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ se coupent ;
- si $f(x) - g(x) > 0$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$.

1.2. Fonctions polynômes de degré 4

Étude de la fonction $f : x \mapsto x^4 + x^2 - 2$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
***b)* Démontrer que f est une fonction paire. En déduire l'ensemble d'étude de f.**

2°) *a)* Vérifier que : $f(1) = 0$.
En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une deuxième solution.
***b)* Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de (OI).**

3°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

4°) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

5°) Construire $(\mathscr{C}_f)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
f est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

***b)* Ensemble d'étude**
On a : pour tout nombre réel x, $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 2 = x^4 + x^2 - 2 = f(x)$.
Donc, f est une fonction paire et la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
On peut restreindre l'étude de f à $[0 ; +\infty[$.

2°) *Intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (OI)*
a) On a : $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$.
f étant une fonction paire, on en déduit : $f(-1) = f(1) = 0$;
donc, 1 et -1 sont solutions de l'équation : $f(x) = 0$.

b) Donc, il existe des nombres réels a, b et c tels que : pour tout nombre réel x,
$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$
$= ax^4 + bx^3 + (c - a)x^2 - bx - c$.
On en déduit : $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$ et $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$.
On a : pour tout nombre réel x, $x^2 + 2 > 0$;
donc, 1 et -1 sont les seules solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
Ainsi, $(\mathscr{C}_f)$ coupe (OI) aux points I et A$(-1 ; 0)$.

3°) *Limites aux bornes de $[0 ; +\infty[$*
On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.

4°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 4x^3 + 2x$.
Pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2x(2x^2 + 1)$;
donc la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

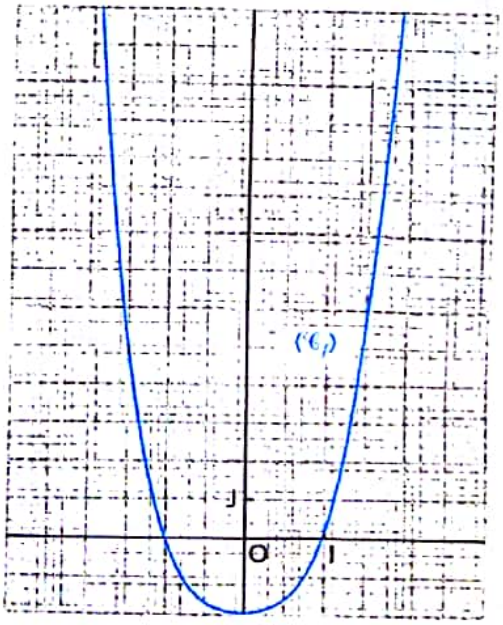
b) Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$

5°) *Table de valeurs*

x	0	1	2
$f(x)$	-2	0	18

Représentation graphique



Étude de la fonction $g : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
***b)* Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.
***b)* Dresser le tableau de variation de g.**

3°) Construire $(\mathscr{C}_g)$.

4°) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) ***a) Ensemble de définition***
g est une fonction polynôme, donc elle est définie en tout élément de $\mathbb{R}$.

b) Limites aux bornes de $\mathbb{R}$
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.

2°) ***a) Dérivée et sens de variation***
g est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$;
sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 8x$.
On a : pour tout nombre réel x, $g'(x) = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x - 1)(x - 2)$.
Pour tout x de $]-\infty ; 0[\cup]1 ; 2[$, $g'(x) < 0$;
donc, g est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]1 ; 2[$.
Pour tout x de $]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$;
donc, g est croissante sur chacun des intervalles $]0 ; 1[$ et $]2 ; +\infty[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

3°) ***Table de valeurs***

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	10	1	2	1	10

4°) On a : pour tout nombre réel h,

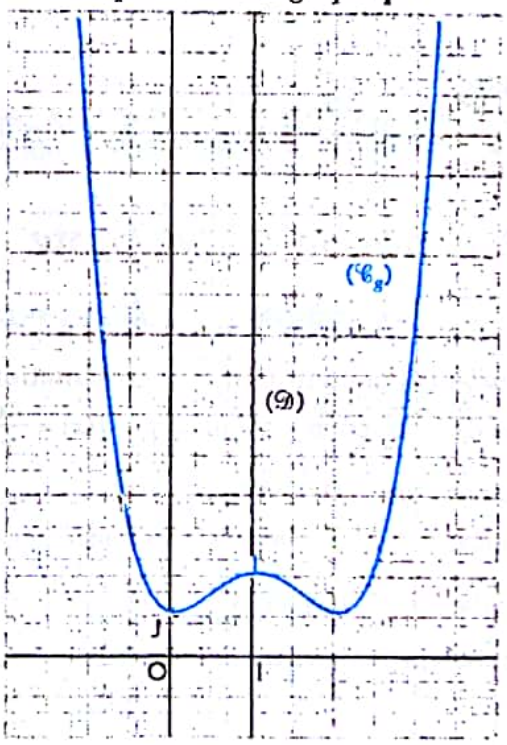
$$\begin{aligned} f(1-h) &= (1-h)^4 - 4(1-h)^3 + 4(1-h)^2 + 1 \\ &= (h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h + 1) \\ &\quad + (4h^3 - 12h^2 + 12h - 4) \\ &\quad + (4h^2 - 8h + 4) + 1 \\ &= h^4 - 2h^2 + 2h \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^4 - 4(1+h)^3 + 4(1+h)^2 + 1 \\ &= (h^4 + 4h^3 + 6h^2 + 4h + 1) \\ &\quad - (4h^3 + 12h^2 + 12h + 4) \\ &\quad + (4h^2 + 8h + 4) + 1 \\ &= h^4 - 2h^2 + 2 \ ; \end{aligned}$$

donc : $f(1-h) = f(1+h)$.

On en déduit que $(\mathscr{D})$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

Représentation graphique



Exercices

1.a Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
- 1,5 cm représente 1 unité en abscisse ;
- 1 cm représente 2 unités en ordonnée.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x + 1$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique sur $[-2 ; 2]$.

1. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur $[-2 ; 2]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

b) Construire $(\mathscr{C})$.

1.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par
$$f(x) = x^4 - 2x^2$$
et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. Démontrer que f est paire.
En déduire l'ensemble d'étude D de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D.
3. Étudier les variations de f sur D et dresser son tableau de variation.
4. Construire $(\mathscr{C})$ sur $[-2 ; 2]$.

1.c Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
- 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
- 1 cm représente 2 unités en ordonnée.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 3$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique sur $[-3 ; 3]$.

1. *a)* Étudier les variations de f sur $[-3 ; 3]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Construire $(\mathscr{C})$.

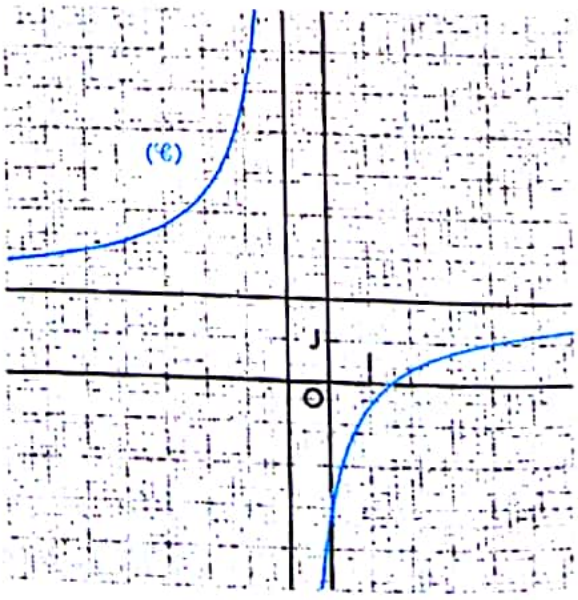
1.d Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par
$$f(x) = (x^2 + 1)^2$$
et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Étudier les variations de f sur $[-1 ; 1]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. Construire $(\mathscr{C})$.

2 Fonctions rationnelles

2.1. Notion d'asymptote

Asymptotes parallèles aux axes du repère

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$.



- Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

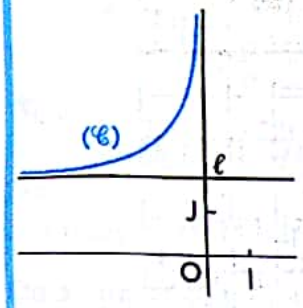
- Calculer : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

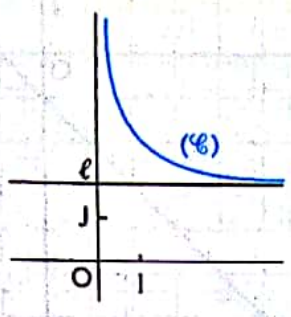
Définitions

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

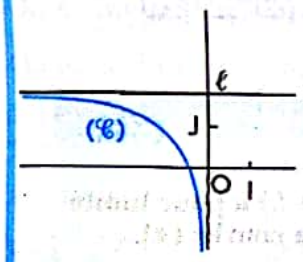
Lorsque f a une limite finie ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

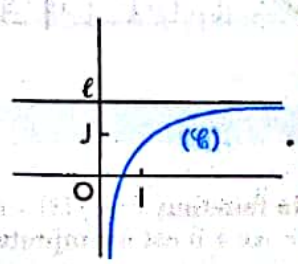


$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

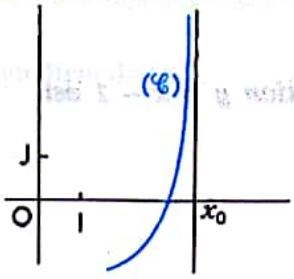


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

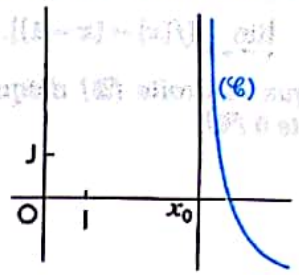




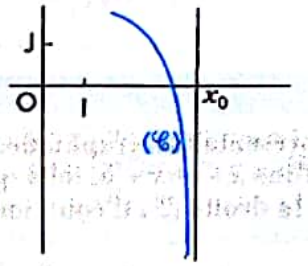
Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



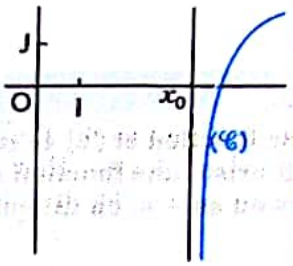
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = -\infty$

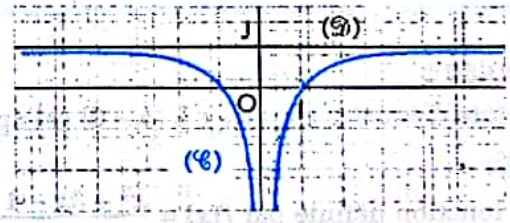
Vocabulaire

Dans un repère orthogonal :

- l'asymptote d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale** ;
- l'asymptote d'équation $x = x_0$ est appelée **asymptote verticale.**

Exemples

- La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.
On peut conjecturer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ et la droite (OJ) sont asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.



- Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{-3x}{x-2}$ et (Γ) sa représentation graphique.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{x} = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{x} = -3$;

donc, la droite d'équation $y = -3$ est asymptote à la courbe (Γ).

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = -\infty$;

donc, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe (Γ).

Asymptotes obliques

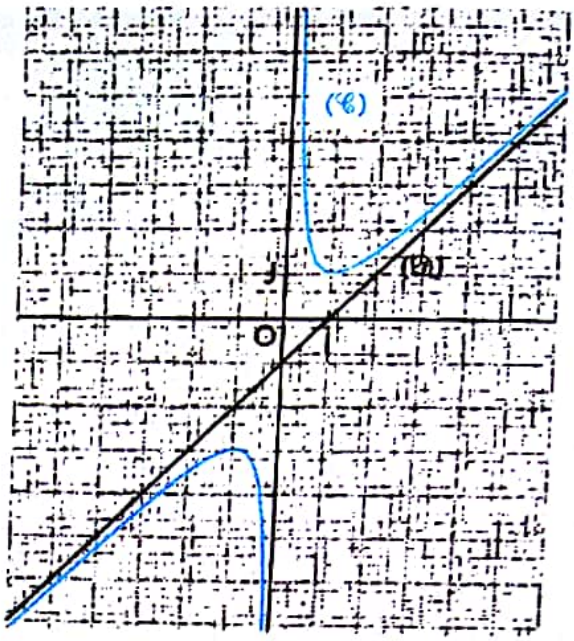
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}.$$

Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)]$;

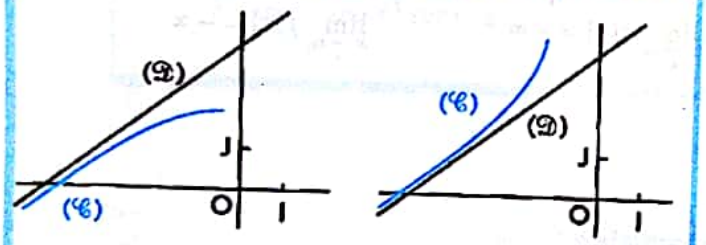
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$.

On dit que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

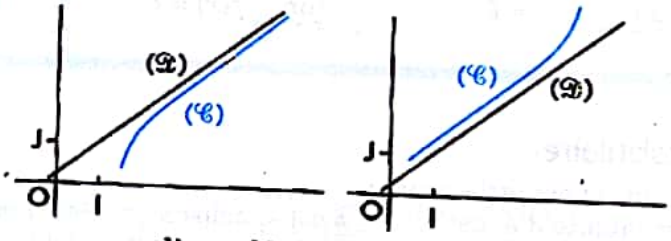


Définition

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
Lorsqu'il existe une fonction affine $x \mapsto ax + b$, telle que la fonction $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ a pour limite 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Vocabulaire

L'asymptote d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est appelée **asymptote oblique.**

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

On a : pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{3x}{x} - \dfrac{1}{x} = x + 3 - \dfrac{1}{x}$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = 0$.

On en déduit que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

2.2. Fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 1}$

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.
1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de f.
***b)* Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

3°) *a)* Vérifier que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{x-1}$.
En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.
***b)* Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$.**

4°) *a)* Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
***b)* Construire $(\mathcal{C}_f)$.**

5°) Démontrer que le point $\Omega(1 ; 3)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
On a : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b) Limites aux bornes de D_f

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x - 6) = -4$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ > }} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ < }} f(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur D_f ;
sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$.

L'équation du second degré $x^2 - 2x + 5 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 4 - 20 = -16$.
On a : $\Delta < 0$; donc, pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $x^2 - 2x + 5 > 0$.
On en déduit que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3°) *a) Asymptote oblique*
On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $x + 2 - \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{(x+2)(x-1) - 4}{x-1} = \dfrac{x^2 + x - 2 - 4}{x-1} = f(x)$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-4}{x-1}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-4}{x-1}\right) = 0$.
Donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

b) Position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$
On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) - (x+2) = \dfrac{-4}{x-1}$.

- Si $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) - (x+2) > 0$; donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$ sur $]-\infty ; 1[$.
- Si $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) - (x+2) < 0$; donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]1 ; +\infty[$.

4°) *a) Détermination de $(\mathcal{C}_f) \cap (OI)$*
Soit M un point de coordonnées (x, y).

M $\in (\mathcal{C}_f) \cap (OI)$ *équivaut à* $\begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = 0 \end{cases}$.

$f(x) = 0$ *équivaut à* $\begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$.

L'équation du second degré $x^2 + x - 6 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 24 = 5^2$.
Cette équation a deux solutions : $x' = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x'' = \dfrac{-1+5}{2} = 2$.
Notons : A$(-3 ; 0)$ et B$(2 ; 0)$. On a : $(\mathcal{C}_f) \cap (OI) = \{A, B\}$.

b) Table de valeurs

x	-3	-1	0	2	3	5
$f(x)$	0	3	6	0	3	6

5°) Soit h un nombre réel non nul.
On a : $1 + h < 1$ *équivaut à* $1 - h > 1$;
donc : $1 + h \in D_f$ *entraîne* $1 - h \in D_f$.

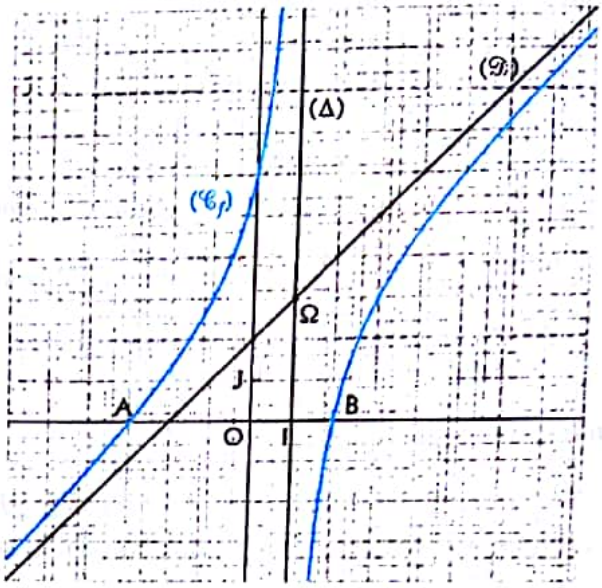
• De plus : $f(1 - h) = -h - 3 + 4h$

et : $f(1 + h) = h + 3 - \frac{4}{h}$;

donc : $\frac{f(1-h) + f(1+h)}{2} = 3$.

On en déduit que le point $\Omega(1 ; 3)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Représentation graphique



Étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$

On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
***b)* Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.
***b)* Dresser le tableau de variation de g.**

3°) *a)* Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
En déduire que $(\mathscr{C}_g)$ admet une asymptote oblique que l'on précisera.
***b)* Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_g)$ et de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$.**

4°) Construire la droite $(\mathscr{D})$, puis la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
On a : $D_g =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.

b) Limites aux bornes de D_g

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to -1} x^2 = -1$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_g)$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*
g est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur D_g ;
sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.
On a : $g'(0) = g'(-2) = 0$.

Pour tout $x \in]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$;
donc g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -2[$ et $]0 ; +\infty[$.
Pour tout $x \in]-2 ; -1[\cup]-1 ; 0[$, $g'(x) < 0$;
donc g est décroissante sur chacun des intervalles $]-2 ; -1[$ et $]-1 ; 0[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3°) ***a) Asymptote oblique***

On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$,

$g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ *équivaut à* $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$

équivaut à $x^2 = ax^2 + (a+b)x + b + c$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0. \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1. \end{cases}$

Donc : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, $g(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$.

On en déduit que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_g)$.

b) Position relative de $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{D})$

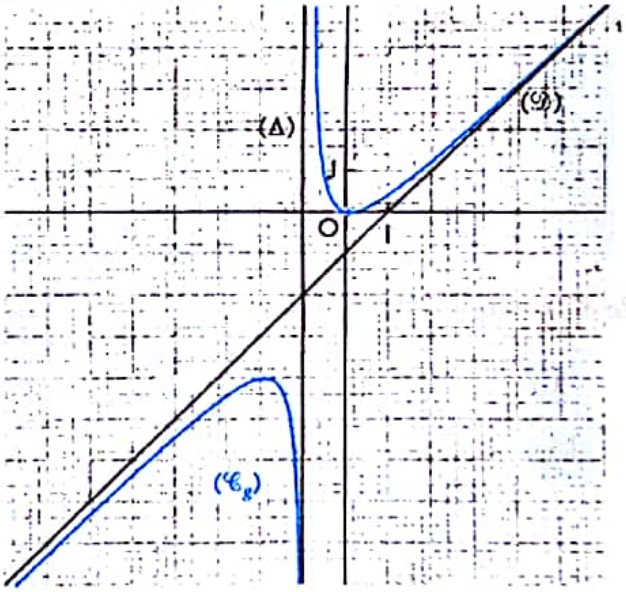
On a : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$,

$g(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x+1}$.

• Si $x \in]-\infty ; -1[$, $g(x) - (x-1) < 0$; donc, $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]-\infty ; -1[$.

• Si $x \in]-1 ; +\infty[$, $g(x) - (x-1) > 0$; donc, $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$ sur $]-1 ; +\infty[$.

Représentation graphique



4°) ***Table de valeurs***

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
$g(x)$	-4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$

2.3. Fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f.

1°) ***a)*** **Déterminer l'ensemble de définition de f.**
b) **Démontrer que f est une fonction paire.**
En déduire l'ensemble d'étude de f.

2°) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

3°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

4°) Construire $(\mathscr{C}_f)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*
On a : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b) Ensemble d'étude
On a : pour tout x de D_f, $-x$ appartient à D_f et $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = f(x)$.
Donc f est une fonction paire et la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
On peut restreindre l'étude de f à $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

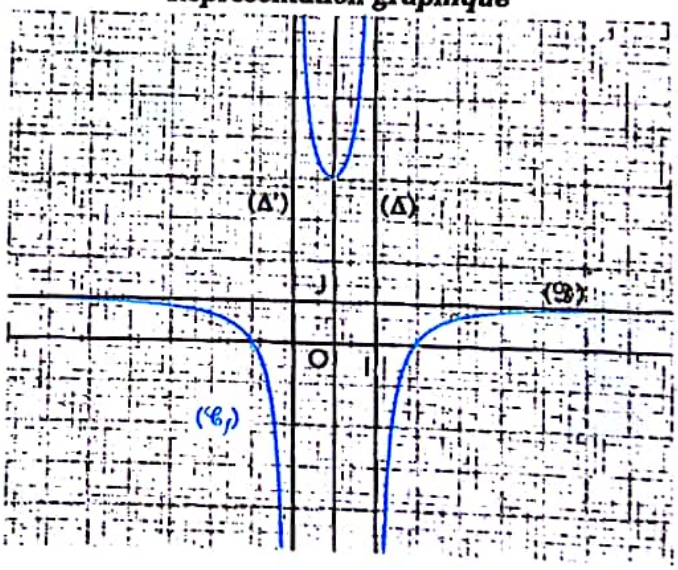
2°) *Limites aux bornes de l'ensemble d'étude*
On a : $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4) = -3$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$.
On en déduit que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.
Donc, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.

3°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur D_f ;
sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{6x}{(x^2 - 1)^2}$.
On a : pour tout x de $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$;
donc la fonction f est croissante sur chacun des intervalles $[0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

b) Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	‖	+	
$f(x)$	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Représentation graphique



4°) *Table de valeurs*

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	4	5	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{5}{8}$

Étude de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1}$

On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.

1°) *a)* Déterminer l'ensemble de définition de g.
***b)* Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.**

2°) *a)* Déterminer la fonction dérivée g' de g.
En déduire le sens de variation de g.
***b)* Dresser le tableau de variation de g.**
3°) Construire $(\mathscr{C}_g)$.

Solution

1°) *a) Ensemble de définition*

On a : $D_g = \mathbb{R}$.

b) Limites aux bornes de $\mathbb{R}$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

Donc, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2$ est asymptote à $(\mathscr{C}_g)$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*

g est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$;

sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$.

On a : $g'(-2) = g'(\frac{1}{2}) = 0$.

Pour tout x de $]-\infty ; -2[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$, $g'(x) > 0$;

donc g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -2[$ et $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Pour tout x de $]-2 ; \frac{1}{2}[$, $g'(x) < 0$; donc g est décroissante sur $]-2 ; \frac{1}{2}[$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	↗	3	↘	-2	↗	2

Représentation graphique

3°) *Table de valeurs*

x	-7	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

Exercices

2.a Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-2}$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. *a)* Écrire l'ensemble de définition D_f de f sous forme d'une réunion d'intervalles.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
4. *a)* Démontrer que le point $\Omega(2 ; 1)$ est un centre symétrie de $(\mathscr{C})$.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

2.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.

1. *a)* Écrire l'ensemble de définition D_f de f sous forme d'une réunion d'intervalles.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Vérifier que :
pour tout x de D_f, $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
4. *a)* Démontrer que le point $\Omega(1 ; 2)$ est un centre symétrie de $(\mathscr{C})$.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

3 Résolution de problèmes

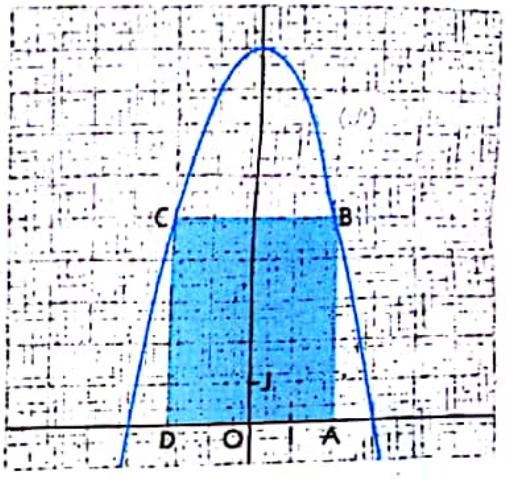
3.1. Problèmes conduisant à une fonction polynôme

Rectangle inscrit dans une parabole

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Sur la figure ci-contre, ($\mathcal{P}$) est la parabole d'équation :

$$y = -x^2 + 9.$$

On y a inscrit un rectangle ABCD tel que le sommet A ait pour abscisse x.



1°) Pour tout élément x de l'intervalle [0 ; 3], exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de ABCD en fonction de x.

2°) *a)* Étudier les variations de la fonction $\mathcal{A}$.
b) **Dresser le tableau de variation de $\mathcal{A}$.**
c) **Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans ($\mathcal{P}$).**

3°) Construire la représentation graphique ($\mathcal{C}$) de $\mathcal{A}$ sur [0 ; 3].

Solution

1°) On a : pour tout x de [0 ; 3], A(x , 0), B(x, $9 - x^2$), C($-x$, $9 - x^2$) et D($-x$, 0).
Donc : AD = $2x$, AB = $9 - x^2$ et $\mathcal{A}(x) = 2x(9 - x^2) = -2x^3 + 18x$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*

$\mathcal{A}$ est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur [0 ; 3] et sa dérivée est la fonction

$\mathcal{A}' : x \mapsto -6(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

On a : $\mathcal{A}'(\sqrt{3}) = 0$. et $\mathcal{A}(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$.

Pour tout x de $[0 ; \sqrt{3}[$, $\mathcal{A}'(x) > 0$; donc la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $[0 ; \sqrt{3}[$.

Pour tout x de $]\sqrt{3} ; 3]$, $\mathcal{A}'(x) < 0$; donc la fonction $\mathcal{A}$ est décroissante sur $]\sqrt{3} ; 3]$.

b) Tableau de variation

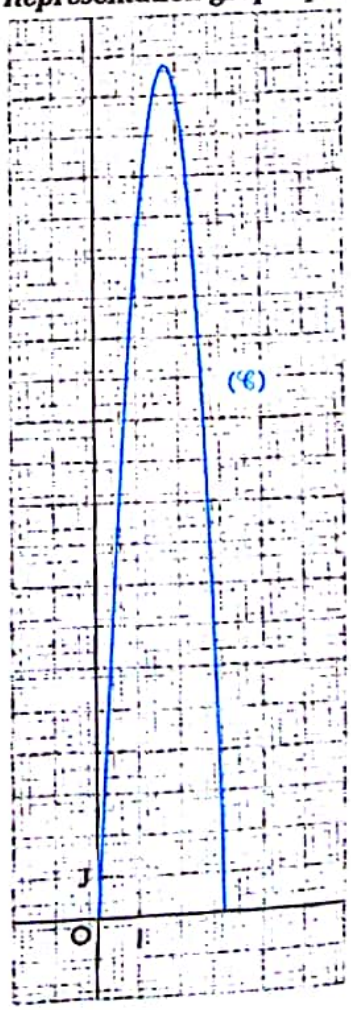
x	0		$\sqrt{3}$		3
$\mathcal{A}'(x)$		+	0	−	
$\mathcal{A}(x)$	0	↗	$12\sqrt{3}$	↘	0

c) Le rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans ($\mathcal{P}$) a pour dimensions :
AD = $2\sqrt{3}$ et AB = $9 - \sqrt{3}^2 = 6$.

3°) *Table de valeurs*

x	0	1	2	3
$\mathcal{A}(x)$	0	16	20	0

Représentation graphique



Production d'une entreprise

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit.
Soit x la quantité produite en tonnes ; x est un nombre réel compris entre 0 et 30.
Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par :

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x.$$

1°) *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $[0 ; 30]$.
En déduire le sens de variation de f.
***b)* Dresser le tableau de variation de f.**

2°) *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

***b)* Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de f.**

3°) On suppose que toute la production est vendue à 100 000 francs CFA l'unité.
***a)* Déterminer, en fonction de x, la recette totale $g(x)$ exprimée en francs CFA.**
***b)* Construire, sur la même figure, la représentation graphique de g.**

4°) On désigne par $h(x)$ le bénéfice total.
***a)* Exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.**
***b)* Résoudre graphiquement l'équation : $h(x) = 0$.**
Retrouver le résultat par le calcul.
***c)* Étudier graphiquement le signe de $h(x)$.**
Donner une interprétation de ce résultat.

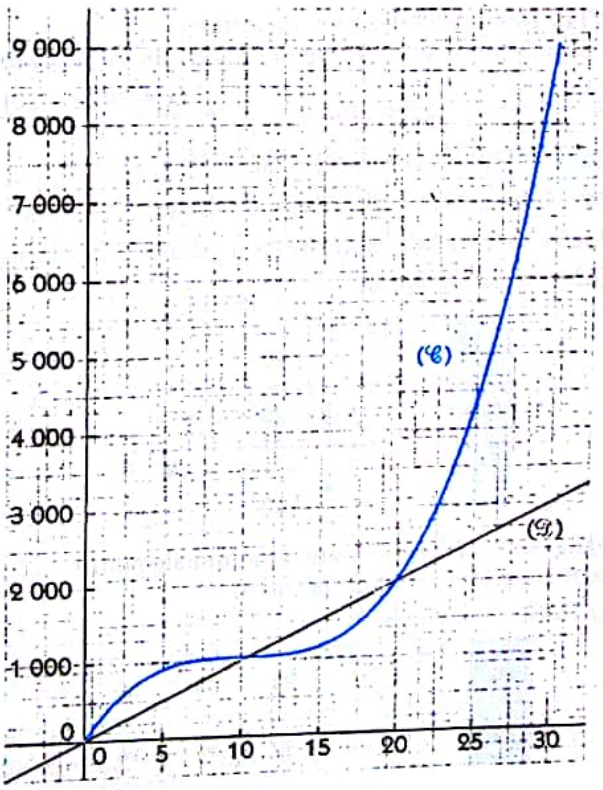
Solution

1°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $[0 ; 30]$;
sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto 3(x - 10)^2$.
On a : pour tout x de $[0 ; 30]$, $f'(x) \geq 0$; donc la fonction f est croissante sur $[0 ; 30]$.

b) Tableau de variation

x	0		10		30
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	0	↗	1 000	↗	9 000

Représentation graphique



2°) *a) Table de valeurs*

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$	0	875	1 000	1 125	2 000	4 375	9 000

3°) *a)* On a : $g(x) = 100x$.
b) La représentation graphique de la fonction g est la droite ($\mathscr{D}$) sur la figure.

4°) *a)* $h(x) = g(x) - f(x) = -x^3 + 30x^2 - 200x$.
b) Les solutions de l'équation $h(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{D}$).
Par lecture graphique, on a : $S = \{0 ; 10 ; 20\}$.
Vérifions ce résultat par le calcul :
pour tout x de $[0 ; 30]$,

$$h(x) = -x(x^2 - 30x + 200)$$
$$= -x(x - 10)(x - 20).$$

Donc : $h(x) = 0$ *équivaut à* $x \in \{0 ; 10 ; 20\}$.

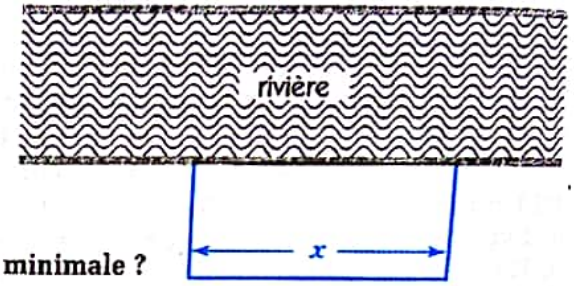
c) Par lecture graphique, on a :
- si $x \in]0 ; 10[\cup]20 ; 30[$, $h(x) < 0$;
- si $x \in]10 ; 20[$, $h(x) > 0$.

Interprétation
- Si la production est inférieure à 10 tonnes ou supérieure à 20 tonnes, l'entreprise fait des pertes ;
- si la production est comprise entre 10 tonnes et 20 tonnes, l'entreprise fait des bénéfices.

3.2. Problèmes conduisant à une fonction rationnelle

Construction d'un enclos

Le long d'une rivière, on veut construire un enclos rectangulaire d'aire 200 m².
Soit x la dimension, exprimée en mètres, du côté parallèle au cours d'eau. On désigne par $f(x)$ la longueur totale, exprimée en mètres, de clôture nécessaire à la réalisation de l'enclos.



1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2°) *a)* Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [5 ; 50].
***b)* Pour quelle valeur de x la longueur de la clôture est-elle minimale ? Déterminer alors ce minimum.**
***c)* On munit le plan du repère orthogonal (O, I, J).**
Construire la représentation graphique (℄) de f sur l'intervalle [5 ; 50].

3°) On dispose de 50 m de clôture. Quelles sont les dimensions des enclos que l'on peut construire en utilisant toute la clôture ?

Solution

1°) Désignons par y la dimension du côté perpendiculaire à la rivière.

On a : $\begin{cases} f(x) = x + 2y \\ xy = 200 \end{cases}$; donc : $f(x) = x + \dfrac{400}{x}$, avec $x > 0$.

2°) *a) Dérivée et sens de variation*
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur [5 ; 50] ;

sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{(x + 20)(x - 20)}{x^2}$.

On a : $f'(20) = 0$ et $f(20) = 40$.

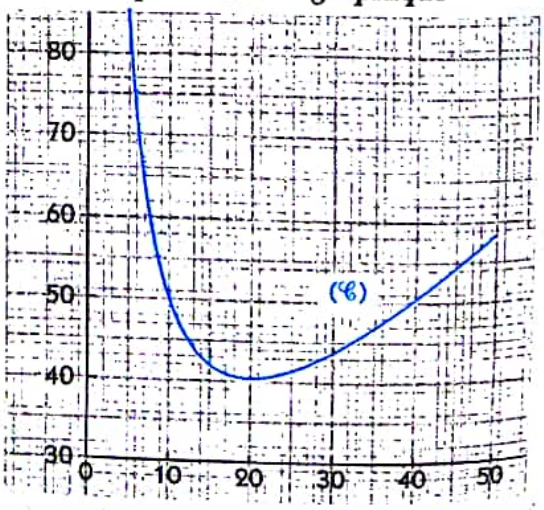
Pour tout x de [5 ; 20[, $f'(x) < 0$; donc la fonction f est décroissante sur [5 ; 20[.

Pour tout x de]20 ; 50], $f'(x) > 0$; donc la fonction f est croissante sur]20 ; 50].

Tableau de variation

x	5		20		50
$f'(x)$	‖	−	0	+	‖
$f(x)$	85	↘	40	↗	58

Représentation graphique



b) La longueur de la clôture est minimale pour $x = 20$; cette longueur minimale est 40 m.

c) Table de valeurs

x	5	10	20	40	50
$f(x)$	85	50	40	50	58

3°) $f(x) = 50$ *équivaut à* $x^2 - 50x + 400 = 0$.
L'équation du second degré $x^2 - 50x + 400 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 2\,500 - 1\,600 = 30^2$.
L'équation a deux solutions : $x' = \dfrac{50 - 30}{2} = 10$ et $x'' = \dfrac{50 + 30}{2} = 40$.
• Si $x = 10$, alors $y = \dfrac{200}{10} = 20$;
• si $x = 40$, alors $y = \dfrac{200}{40} = 5$.
On a donc deux possibilités : construire un enclos de dimensions 10 m et 20 m,
ou construire un enclos de dimensions 40 m et 5 m.

Coût du trajet d'un routier

Un routier doit faire un trajet de 150 km. Si sa vitesse moyenne est x kilomètres par heure, alors sa consommation en gas-oil est $6 + \dfrac{x^2}{100}$ litres par heure.
Le prix du gas-oil est de 400 francs CFA le litre, et le chauffeur est payé 1 200 francs CFA de l'heure.
1°) *a)* Exprimer, en fonction de x, le salaire du chauffeur et le coût du gas-oil.
***b)* En déduire que le coût du trajet, exprimé en francs CFA, est donné par : $f(x) = 600x + \dfrac{540\,000}{x}$.**
2°) *a)* Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
***b)* Déterminer la vitesse moyenne v pour laquelle le coût du trajet est minimal et calculer ce coût.**
3°) On désigne par (℄) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
***a)* Déterminer les asymptotes à (℄).**
***b)* Compléter la table de valeurs suivante.**

x	10	20	30	40	60	90
$f(x)$						

***c)* Construire (℄).**

Solution

1°) *a)* Le temps mis pour parcourir le trajet est : $\dfrac{150}{x}$.
Le salaire du chauffeur est : $1\,200 \times \dfrac{150}{x}$;
le coût du gas-oil est : $400 \times \dfrac{150}{x} \times \left(6 + \dfrac{x^2}{100}\right)$.

b) Donc le coût du trajet est :
$f(x) = \dfrac{150}{x} \times \left[1\,200 + 400\left(6 + \dfrac{x^2}{100}\right)\right] = \dfrac{150}{x} \times (3\,600 + 4x^2) = 600x + \dfrac{540\,000}{x}$.

2°) ***a) Dérivée et sens de variation***
f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur $]0 ; +\infty[$;
sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{600(x + 30)(x - 30)}{x^2}$.

On a : $f'(30) = 0$ et $f(30) = 36\,000$.
Pour tout x de $]0 ; 30[$, $f'(x) < 0$; donc la fonction f est décroissante sur $]0 ; 30[$.
Pour tout x de $]30 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$; donc la fonction f est croissante sur $]30 ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		30		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$36\,000$	↗	$+\infty$

b) Le coût du trajet est minimal pour : $v = 30$. Le coût minimal est : $f(v) = 36\,000$.

3°) *a)* On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc l'axe des ordonnées est asymptote à (𝒞).

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 600x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{540\,000}{x} = 0$;

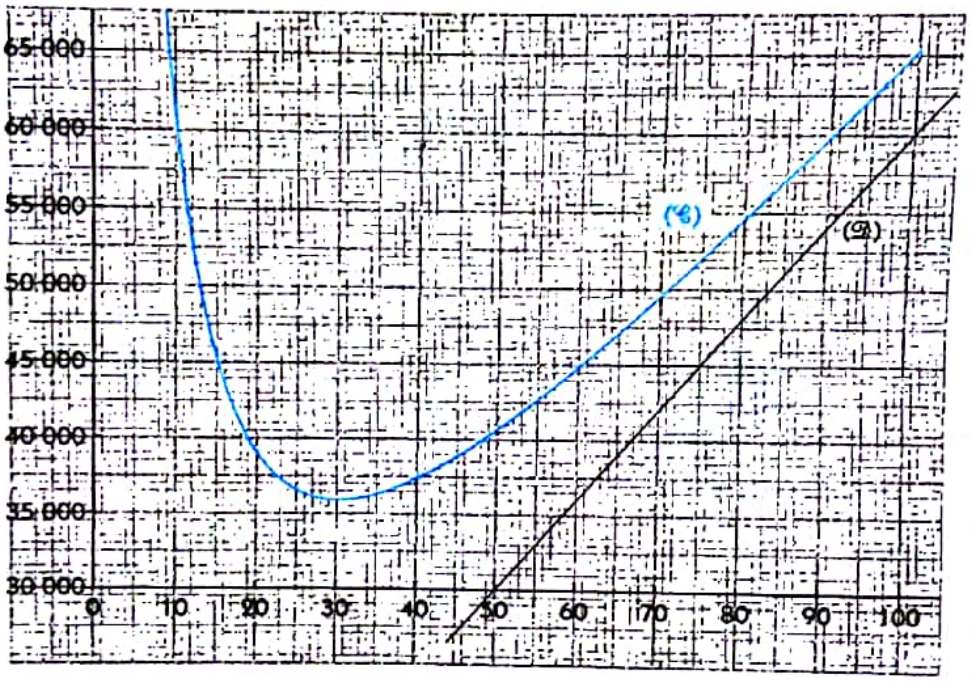
donc la droite (𝒟) d'équation $y = 600x$ est asymptote à (𝒞).

On a : pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\dfrac{540\,000}{x} > 0$; donc (𝒞) est au-dessus de (𝒟).

b) Table de valeurs

x	10	20	30	40	60	90
$f(x)$	60 000	39 000	36 000	37 500	45 000	60 000

Représentation graphique



Exercices

APPRENTISSAGE

Fonctions polynômes

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 2 unités en ordonnée.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Vérifier que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 8)$.
b) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses.
2. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$								

b) Construire $(\mathscr{C})$.

2 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 2 unités en ordonnée.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Vérifier que : $f(1) = 0$.
b) Déterminer deux nombres réels b et c tels que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = (x - 1)(x^2 + bx + c)$.
c) En déduire les solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
2. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Construire $(\mathscr{C})$.

3 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1,5 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 2 unités en ordonnée.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x + 3$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Compléter la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

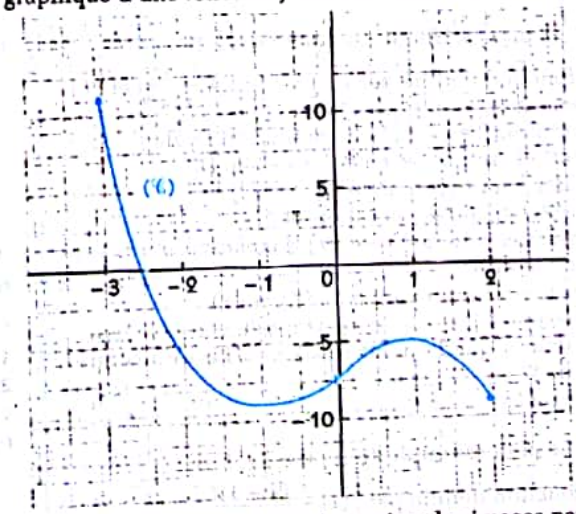
b) Construire $(\mathscr{C})$.

4 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
• 1 cm représente 4 unités en ordonnées.
Soit f la fonction définie par $f(x) = (3 - x)(x + 3)^2$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
(Il est conseillé de dériver sans développer $f(x)$).
En déduire les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Préciser les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

5 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Démontrer que f est une fonction impaire.
En déduire l'ensemble d'étude de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.
3. *a)* Étudier les variations de f sur l'ensemble d'étude.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire $(\mathscr{C})$.
5. *a)* Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (T).

6 Soit f la fonction définie par :
$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.
1. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur $[-3 ; 3]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[-3 ; -2]$, $[-2 ; 2]$ et $[0 ; 2]$.

7 La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $[-3 ; 2]$.



1. *a)* Par lecture graphique, déterminer les images par f des nombres -3, -1, 1 et 2.

b) Par lecture graphique, compléter le tableau de variation de f.

x	-3		-1		1		2
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$							

2. La fonction f est définie par : $f(x) = -x^3 + 3x - 7$.
a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
b) Vérifier les conjectures faites à la question 1.

8 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Démontrer que f est une fonction paire.
b) Vérifier que : $f(1) = 0$.
c) En déduire un autre nombre α tel que : $f(\alpha) = 0$.
2. *a)* Vérifier que : pour tout nombre réel x,

$$f(x) = (x - 1)(x - \alpha)(x^2 + 5).$$

b) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
3. *a)* Déterminer la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Construire $(\mathscr{C})$.
4. *a)* Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :
- $f(x) = 2$
- $f(x) = -5$
- $f(x) = -7$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > 0$.

Fonctions rationnelles

9 Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
b) Préciser la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
2. Indiquer une équation de l'asymptote verticale.

10 Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
c) Indiquer une équation de l'asymptote verticale (Δ).
4. *a)* Démontrer que le point $\Omega(-2 ; -1)$ est un centre symétrie de $(\mathscr{C})$.
b) Construire $(\mathscr{C})$.

11 Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{-x}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Démontrer que :
pour tout x de D_f, $f(x) = -x + 2 - \dfrac{1}{x}$.
b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
d) Préciser l'asymptote verticale.
4. *a)* Construire $(\mathscr{C})$.
b) Démontrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie.

12 Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
- 1 cm représente 1 unité en abscisse ;
- 1 cm représente 2 unités en ordonnée.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. *a)* Étudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :
pour tout x de D_f, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
b) En déduire une équation de l'asymptote oblique.
4. *a)* Construire la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$.
b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
c) Préciser les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
d) Construire $(\mathscr{C})$.

13 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
1. *a)* Démontrer que f est une fonction paire.
En déduire l'ensemble d'étude D de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. *a)* Étudier les variations de f sur D.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3. *a)* Vérifier que :
pour tout nombre réels x, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2+1}$.
b) En déduire que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
c) Quelle est la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$?
d) Construire $(\mathscr{C})$.

Résolution de problèmes

14 Seydou a placé un abreuvoir de 80 cm de haut dans son champ. Soit x la hauteur de l'eau en centimètres. Le volume de l'eau, en litres, dans l'abreuvoir est donné par : $f(x) = \dfrac{x^2}{40} + 20x$.
1. Déterminer la contenance de l'abreuvoir.
2. *a)* Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 80]$.
b) Compléter la table de valeurs suivante.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$f(x)$									

c) Construire la représentation graphique (℄) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
(On pourra prendre 2 cm pour 10 cm en abscisse et 1 cm pour 100 litres en ordonnée.)
3. L'abreuvoir contient une hauteur d'eau de 40 cm.
De quelle quantité d'eau dispose chacune des dix vaches de Seydou ?

15 Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs de luxe. Chaque jour, elle produit un nombre x de sacs, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût, exprimé en milliers de francs CFA, de la production journalière de x sacs est donné par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x.$$

1. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
b) En déduire le sens de variation de f.
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente 1 sac en abscisse ;
• 1 cm représente 40 000 francs CFA en ordonnée.
a) Compléter la table des valeurs suivante.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$											

b) Construire la représentation graphique (℄) de f.
3. On suppose que toute la production est vendue au prix de 14 000 francs CFA l'unité. La recette journalière, exprimée en milliers de francs CFA, est alors donnée par : $g(x) = 14x$.
a) Exprimer le bénéfice journalier total $h(x)$ en fonction de $g(x)$ et $f(x)$.
b) Vérifier que :
pour tout x de $[0 ; 10]$, $h(x) = -x(x-1)(x-6)$.
4. *a)* Construire, sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction g.
b) Par lecture graphique, déterminer l'intervalle auquel x doit appartenir pour que l'entreprise réalise un bénéfice.
c) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

16 Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. La quantité produite, en tonnes, est un nombre réel x compris entre 0 et 13. Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par : $f(x) = x^3 - 15x^2 + 76x$.
1. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
b) En déduire le sens de variation de f.
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal tel que :
• 1 cm représente une tonne en abscisse ;
• 2 cm représentent 100 000 francs CFA en ordonnée.
a) Compléter la table de valeurs suivante.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$														

b) Construire la représentation graphique (℄) de f.
3. L'entreprise vend chaque tonne de sa production 40 000 francs CFA. La recette, exprimée en milliers de francs CFA, est alors : $g(x) = 40x$.
a) Construire, sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction g.
b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.

17 Une entreprise fabrique chaque année x jouets. Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par :

$$C(x) = 0{,}5x^2 + x + 4, \text{ avec } x \in]0 ; +\infty[.$$

Le coût unitaire moyen de fabrication d'un jouet est donné par : $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
1. Vérifier que :
pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $C_m(x) = 0{,}5x + 1 + \dfrac{4}{x}$.
2. *a)* Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} [C_m(x) - (0{,}5x + 1)]$.
b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c) Interpréter « économiquement » ce résultat, en précisant comment, pour les grandes valeurs de x, le coût unitaire moyen varie en fonction de x.

18 Une entreprise fabrique chaque mois une quantité x d'objets. Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA, est donné par :

$$C(x) = x^2 - 20x + 400, \text{ avec } x \in]0 ; +\infty[.$$

Le coût unitaire moyen de fabrication d'un objet est donné par : $C_m = \dfrac{C(x)}{x}$.
1. Déterminer la quantité d'objets à fabriquer pour minimiser le coût unitaire moyen de fabrication.
2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix de 10 000 francs CFA.
a) Déterminer le bénéfice $B(x)$ de cette entreprise en fonction de x.
b) Déterminer x pour que ce bénéfice soit maximal.

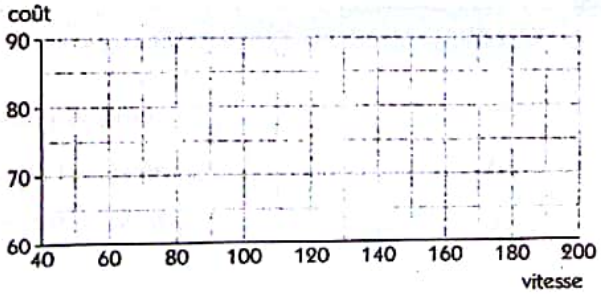
19 Le coût d'un voyage en car d'une entreprise se décompose en trois parties :
• frais fixes (assurance, entretien, ...) ;
• frais proportionnels à la vitesse moyenne du car (carburant) ;
• salaire du chauffeur proportionnel au temps de voyage, donc inversement proportionnel à la vitesse du car.
Soit x la vitesse moyenne du car, exprimée en km × h^{-1}.
Le coût total d'un trajet de 200 km, en milliers de francs CFA, est donné par :

$$C(x) = \frac{1}{4}x + 30 + \frac{1\,600}{x}.$$

1. *a)* Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[40 ; 200]$.
b) Compléter la table de valeurs suivante.

x	40	50	80	100	160	200
$C(x)$						

c) Construire la représentation graphique de C dans le plan muni du repère ci-dessous.



2. L'entreprise donne comme consigne au chauffeur de respecter une vitesse moyenne de 80 km × h^{-1}.
Expliquer pourquoi.

APPROFONDISSEMENT

20 Soit f la fonction de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

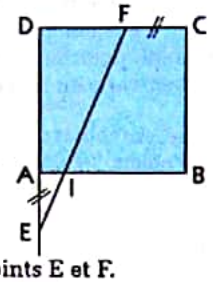
$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

1. *a)* Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
2. Démontrer que :
pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

21 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1.
Les points E et F sont tels que :

$$\begin{cases} E \in [DA] \\ F \in [CD] \\ AE = CF = x. \end{cases}$$

On note I le point d'intersection des droites (AB) et (EF).



1. On munit le plan du repère orthonormé (A, B, D).
a) Donner les coordonnées des points E et F.
b) Déterminer une équation de la droite (EF).
c) Déterminer les coordonnées du point I.
2. *a)* Démontrer que : $AI = \frac{x - x^2}{x + 1}$.
b) Déterminer la position du point E pour que la distance AI soit maximale.

22 Un promoteur de spectacles organise un festival de musiques africaines dans la salle des fêtes de la ville.
1. Les frais engagés se constituent d'une somme fixe de 450 000 francs CFA pour la location de la salle, à laquelle s'ajoute 15 000 francs CFA par jour de publicité. Soit x le nombre de jours de publicité. On suppose que x est compris entre 0 et 30.
a) Déterminer les frais engagés $F(x)$, en milliers de francs CFA, en fonction de x.
b) Construire la représentation graphique ($\mathcal{D}$) de la fonction F dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
- 2 cm représentent 10 jours en abscisse ;
- 1 cm représente 100 000 francs CFA en ordonnée.

2. La recette prévue, en milliers de francs CFA, est donnée par : $R(x) = -\frac{1}{5}x^3 + 6x^2 + 200$.
a) Déterminer la dérivée R' de la fonction R.
En déduire les variations de R.
b) Dresser le tableau de variation de R.
c) Compléter la table de valeurs suivante.

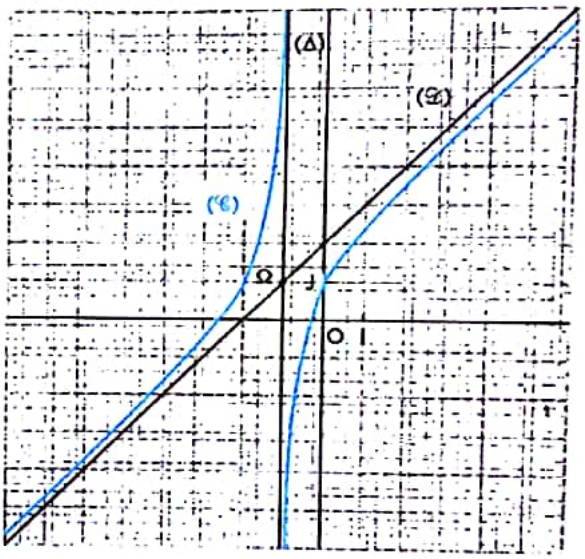
x	0	5	10	15	20	25	30
$R(x)$							

d) Construire la représentation graphique ($\mathcal{C}$) de R sur le même dessin.
e) Combien de jours de publicité le promoteur doit-il faire pour avoir une recette maximale ?
3. *a)* Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de $R(x)$ et $F(x)$.
b) Vérifier que :
pour tout x de $[0 ; 30]$, $B(x) = -\frac{1}{5}(x + 5)(x - 10)(x - 25)$.
c) Combien de jours de publicité faut-il pour que le promoteur réalise des bénéfices ?

23 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
La courbe ($\mathcal{C}$) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f du type :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + d}.$$

La courbe ($\mathcal{C}$) admet pour asymptotes les droites ($\mathcal{D}$) et (Δ), et elle passe par le point J.



1. Conjecturer le tableau de variation de f.
2. *a)* En utilisant le graphique, déterminer une équation de chacune des droites ($\mathcal{D}$) et (Δ).
b) En déduire les valeurs des nombres a, b, c et d.
3. *a)* Étudier les variations de f et vérifier la conjecture faite à la question 1.
b) Démontrer que le point d'intersection Ω des droites ($\mathcal{D}$) et (Δ) est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).
c) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.