1 Limites et continuité en a

Tableau récapitulatif

① **Limites de référence**

- a et c étant des nombres réels, $\lim\limits_{x \to a} c = \lim\limits_{x \to +\infty} c = \lim\limits_{x \to -\infty} c = c$

- On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

- a étant un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to a} (x-a)^n = 0$$

Pour n pair :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

Pour n impair :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty \end{cases}$$

② **Calcul de limite à l'infini de fonctions polynômes et rationnelles**

$$\lim_{x \to -\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

③ **Critères de continuité en a**

- f étant une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a,

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.

1.1. Limites de référence et continuité en a

Limite à gauche - Limite à droite

Tableau récapitulatif

① Définition

a et l sont des nombres réels, f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que f admet une *limite à gauche* en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]-\infty\,;a[$ admet en a une limite égale à l.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l.$$

On dit que f admet une *limite à droite* en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]a\,;+\infty[$ admet en a une limite égale à l.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l.$$

② Propriété

a et l sont des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a, sauf éventuellement en a.

Dans le cas où f n'est pas définie en a,

f admet une limite l en a

si et seulement si

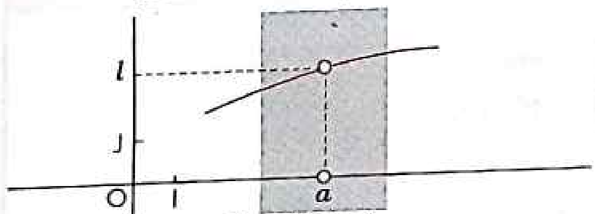
f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à l.

Dans le cas où f est définie en a,

f admet une limite en a

si et seulement si

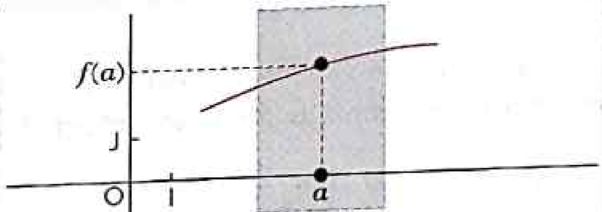
f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.



$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

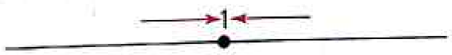
si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

Exemple

Étudions la limite et la continuité en 1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1],\ f(x) = x^2 - x + 2 \\ \text{pour } x \in\ ]1\,;+\infty[,\ f(x) = x + 1 \end{cases}$$



Calculons la limite à gauche en 1 de f.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - x + 2) = 2$$

Calculons la limite à droite en 1 de f.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

d'où : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$ et $f(1) = 2$

donc f admet une limite en 1 égale à $f(1)$; par conséquent la fonction f est continue en 1.

Prolongement par continuité

Exemple introductif

Étudions la limite et la continuité en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

On veut trouver une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, continue en 1 et qui coïncide sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec f.

Calcul de la limite

Pour tout élément x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = x + 2$

donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 2) = 3$.

La fonction f admet une limite en 1, égale à 3.

Étude d'une fonction auxilliaire

Considérons la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ g(x) = f(x) \\ g(1) = 3 \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = g(1)$.

donc g est continue en 1. On dit que g est le **prolongement par continuité de f en** 1.

Définition et propriété

f est une fonction d'ensemble de définition D_f, a un nombre réel n'appartenant pas à D_f.
On suppose que f admet une limite finie l en a.

Alors la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in D_f\setminus\{a\},\ g(x) = f(x) \\ g(a) = l \end{cases}$

est continue en a. Elle est appelée *prolongement par continuité de f en a*.

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
Démontrons que f admet un prolongement par continuité en 0.

On a : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Donc f admet un prolongement par continuité en 0, la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Exercices

1.a Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

1.b Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité en 2 de la fonction f définie par :

$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;2[,\ f(x) = 2x^2 - 4x - 4 \\ \text{pour } x \in [2\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;2[,\ f(x) = 2x^2 - 4x - 4 \\ \text{pour } x \in [2\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x-6}{x-1} \end{cases}$

1.c Étudier la continuité en 1 de la fonction f définie par :

$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;1[,\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 1} \\ \text{pour } x \in]1\,;+\infty[,\ f(x) = -x^2 + 4x - 4 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

1.d On donne la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Justifier que f admet un prolongement par continuité en 1 et préciser ce prolongement.

1.2. Limites, opérations, composition

Tableau récapitulatif

① **Limites d'une somme**

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite en a	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**on ne peut pas conclure**

② **Limites d'un produit**

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si f a pour limite en a	l	$l,\ l>0$	$l,\ l<0$	$l,\ l>0$	$l,\ l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors fg a pour limite en a	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**on ne peut pas conclure**

③ **Limites d'un inverse**

f est une fonction ; l un nombre réel ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si g a pour limite en a	$l',\ l'\neq 0$	0 (g étant positive sur K) *	0 (g étant négative sur K) *	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\frac{1}{g}$ a pour limite en a	$\frac{1}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

④ **Limites d'un quotient**

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et si g a pour limite en a	$l',\ l'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l',\ l'>0$	$l',\ l'<0$	$l',\ l'>0$	$l',\ l'<0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**on ne peut pas conclure**	

*

Dans le tableau « **Limite d'un inverse** », K désigne un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de g et est l'un des types suivants :

– lorsque x tend vers le nombre réel a

– lorsque x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$) $\quad]-\infty\,;A[$ (resp. $]B\,;+\infty[$)

Exemples d'utilisation des opérations sur les limites

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + \sqrt{x}) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7) = -7$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{1}{x^3} - 7) = -7$.

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$.

Limite d'un inverse

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

pour $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

pour $x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[$, $\sin x < 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{\sin x} = -\infty$.

Formes indéterminées

Notations

Lorsque les tableaux ci-dessus ne permettent pas de déterminer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, connaissant leurs limites respectives, on dit qu'il y a une forme indéterminée.

On relève quatre types de formes indéterminées :

$\boxed{\infty - \infty}$	$\boxed{0 \times \infty}$	$\boxed{\frac{0}{0}}$ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$
traduit la dernière colonne du tableau « Limite d'une somme »	traduit la dernière colonne du tableau « Limite d'un produit »	traduisent les dernières colonnes du tableau « Limite d'un quotient »

Exemples

En faisant la somme des limites pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [(3x^2 + 5x - 1) - \sqrt{x}]$ on obtient la forme indéterminée : $\boxed{\infty - \infty}$	En faisant le produit des limites pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x^2 + 2x - 5)\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)]$ on obtient la forme indéterminée : $\boxed{0 \times \infty}$	En faisant le quotient des limites pour calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-5}$ on obtient respectivement les formes indéterminées : $\boxed{\frac{0}{0}}$ et $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

Limite d'une fonction composée

Exemple introductif

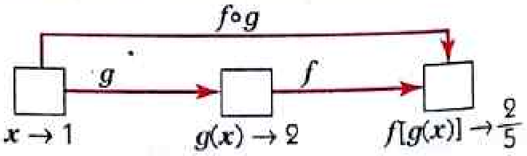
On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = x + 1$.
On veut étudier la limite en 1 de $f \circ g$.

Ensemble de définition de $f \circ g$

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$; donc $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f \circ g(x) = \frac{x+1}{(x+1)^2+1}$.

On obtient le schéma ci-contre.



On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

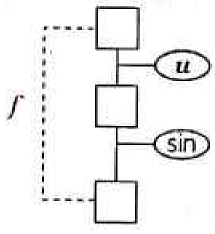
f et g sont des fonctions, a, l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ **et** $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l'$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} f \circ g(x) = l'$.

■ **Exemples**

Calculons la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \sin \dfrac{\pi x^2}{x+1}$.

f est la composée de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\pi x^2}{x+1}$ suivie de la fonction sinus.



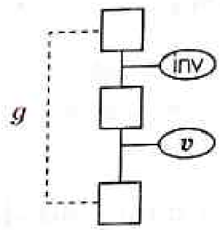
$f = \sin \circ u$

$$\text{or : } \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\pi x^2}{x+1} = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{X \to \frac{\pi}{2}} \sin X = 1 \end{cases}$$

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \sin \dfrac{\pi x^2}{x+1} = 1$.

Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$.

g est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction $v : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.



$g = v \circ \text{inv}$

$$\text{or : } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{cases}$$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin \dfrac{1}{x} = 1$.

Limites de $\sqrt{f}$ et $|f|$

■ **Cas particuliers de limites de fonctions composées**

Propriété

f est une fonction, a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, l un nombre réel positif ou nul, l' un nombre réel .

- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l'|$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$
- ***Si*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$

■ **Exemples**

Calculons les limites en $-\infty$ et en 0 de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2+x+3}$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+x+3) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+3} = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x^2+x+3) = 3$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2+x+3} = \sqrt{3}$.

Calculons les limites en 0 et en $-\infty$ de la fonction $h : x \mapsto |x^3+x-5|$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x^3+x-5) = -5$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} |x^3+x-5| = 5$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3+x-5) = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} |x^3+x-5| = +\infty$.

Exercices

1.e Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+1}+x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-\sqrt{x^2+3})$;

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-10}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$.

1.f Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2}$;

$\lim\limits_{x \to 1} \cos \dfrac{\pi x^2}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{3x}$.

1.3. Limites et inégalités

Passage à la limite dans une inégalité

Activité introductive

Considérons les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.
On vérifie aisément que $f \geq g$.
Comparer les limites de f et g en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$, f et g deux fonctions admettant des limites en a.

Si $f \geq g$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Cette propriété ne permet pas de calculer des limites mais de les comparer.

Calcul de limites par comparaison

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes. Elles permettent de calculer des limites.

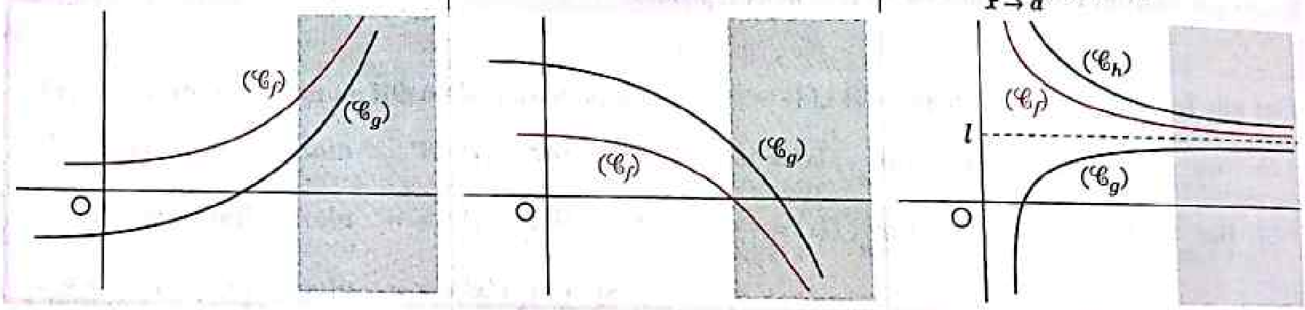
Propriétés

a et l sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$, f et g des fonctions.

Si $f \geq g$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Si $f \leq g$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Si $g \leq f \leq h$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.



Exemples

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Soit x un nombre réel strictement positif,

on a : $-1 < \sin x \leq 1$

d'où : $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x\cos x)$.

Soit x un nombre réel strictement positif,

on a : $-1 < \cos x \leq 1$

d'où : $x^2 - x \leq x^2 - x\cos x \leq x^2 + x$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x\cos x) = +\infty$.

Exercices

1.g On donne la fonction f définie par :
$$f(x) = 2x - \mathrm{E}(x).$$
1. Justifier que : pour tout nombre réel x,
$x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x$ et $x \leq f(x) < x + 1$.
2. En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.

1.h Calculer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \sin x$.

1.i On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{2x^3}{(1 + x^3)\sqrt{1 + x^4}}.$$
1. Démontrer que :
pour tout nombre réel x, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x^3}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de f.

1.4. Calcul de limites et formes indéterminées

Les exemples ci-dessous fournissent quelques procédés classiques permettant de calculer une limite dans le cas où les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée.

Exemples d'utilisation d'une factorisation

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$.

Pour $x > 0$

on a : $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$.

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) = +\infty$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 8}}$.

Pour $x > 0$

on a : $\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 8}} = \dfrac{x(3 - \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(x + 1 + \frac{8}{x^2})}}$

$= \dfrac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{x + 1 + \frac{8}{x^2}}}$

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (3 - \frac{1}{x}) = 3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 1 + \frac{8}{x^2}} = +\infty. \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 8}} = 0$.

Exemples d'utilisation de l'expression conjuguée

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$.

Transformation de l'expression $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.
(On multiplie et on divise par l'expression conjuguée)

$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 0$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} + 3x)$.

Transformation de l'expression $\sqrt{9x^2 + 7} + 3x$.
(On multiplie et on divise par l'expression conjuguée)

$\sqrt{9x^2 + 7} + 3x = \dfrac{7}{\sqrt{9x^2 + 7} - 3x}$

or : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} - 3x) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{\sqrt{9x^2 + 7} - 3x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} + 3x) = 0$.

Exemple d'utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation

Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x)$.

Transformons l'expression $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x$ en multipliant et en divisant par l'expression conjuguée.

On obtient : $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 2} - x}$.

La dernière expression donne encore une forme indéterminée.

Poursuivons la transformation en mettant x en facteur au numérateur et au dénominateur.

On obtient : $\dfrac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 2} - x} = \dfrac{x(3 - \frac{2}{x})}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} - x} = \dfrac{x(3 - \frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} - x}$

Pour $x < 0$ $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x = \dfrac{x(3 - \frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} - x} = \dfrac{-3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1}$

or : $\lim\limits_{x \to -\infty}(-3 + \frac{2}{x}) = -3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1\right) = 2$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty}(\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x) = -\dfrac{3}{2}$.

Exemples d'utilisation d'un taux de variation

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 1 et on a :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2}.$$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}}$.

On a : $\dfrac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}(\cos x + \frac{1}{2})$

or : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = (\cos)'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}}(\cos x + \frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemples de changement d'écriture

Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

Transformation d'écriture

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x}$$

Calcul des limites

or : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3}$.

Transformation d'écriture

$$\frac{\sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x^2}$$

Calcul des limites

or : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3} = +\infty$.

On examinera comme dernier exemple le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\dfrac{1}{x}$ effectué à l'aide de la décomposition, dans le paragraphe 1.2.

Exercice

1.j Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + 2x}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + 2x}{x}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

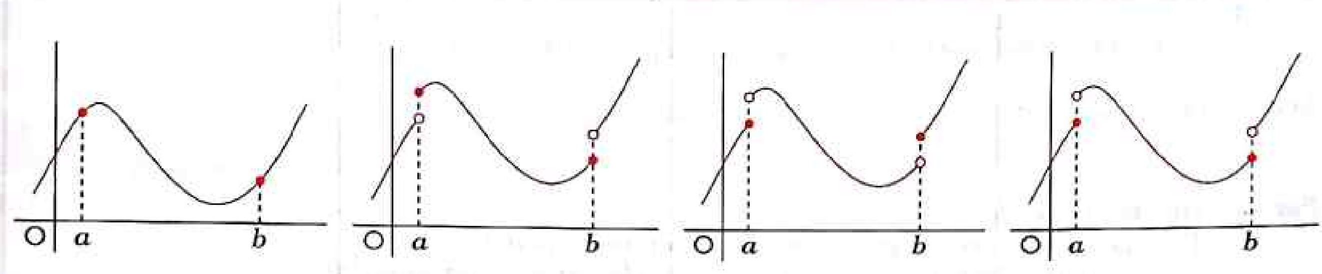
2 Continuité sur un intervalle

2.1. Définition – Propriétés

Continuité d'une fonction sur un intervalle

Propriété

Une fonction f est dite *continue sur un intervalle* K lorsque sa restriction à K est continue en tout élément de K.



f est continue sur $[a\,;\,b]$

f est continue sur $[a\,;\,b]$

f n'est pas continue sur $[a\,;\,b]$
f est continue sur $]a\,;\,b[$

f n'est pas continue sur $[a\,;\,b]$
f est continue sur $]a\,;\,b]$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exemple introductif

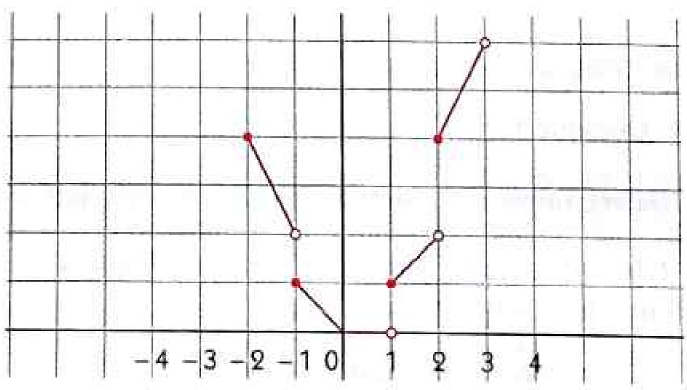
On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,3[$ par : $f(x) = x\mathrm{E}(x)$.
Pour chaque intervalle K ci-dessous, étudions graphiquement la continuité de f sur K et déterminons graphiquement l'image $f(\mathrm{K})$ de K par f :
$[-2\,;\,-1[$; $[-1\,;\,1[$; $]-1\,;\,1[$; $]0\,;\,1[$; $[-1\,;\,0]$; $[1\,;\,3[$; $[0\,;\,2[$; $[-1\,;\,1]$.

Formules explicites de la fonction f

x	-2		-1		0		1		2		3
$\mathrm{E}(x)$	$\boxed{-2}$	-2	$\boxed{-1}$	-1	$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$	1	$\boxed{2}$	2	$\boxed{3}$
$f(x)$	$\boxed{4}$	$-2x$	$\boxed{1}$	$-x$	$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$	x	$\boxed{4}$	$2x$	

$$\begin{cases} \text{pour } x \in [-2\,;\,-1[, & f(x) = -2x \\ \text{pour } x \in [-1\,;\,0[, & f(x) = -x \\ \text{pour } x \in [0\,;\,1[, & f(x) = 0 \\ \text{pour } x \in [1\,;\,2[, & f(x) = x \\ \text{pour } x \in [2\,;\,3[, & f(x) = 2x \end{cases}$$

Représentation graphique de f
Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)



Continuité de f sur K et image de K par f

K	$[-2 ; -1[$	$[-1 ; 1[$	$]-1 ; 1[$	$]0 ; 1[$	$[-1 ; 0]$	$]1 ; 2[$	$]1 ; 3[$	$[-1 ; 1]$
Continuité de f sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f n'est pas continue sur K	f n'est pas continue sur K	f n'est pas continue sur K
f(K)	$]2 ; 4]$	$[0 ; 1]$	$[0 ; 1[$	$\{0\}$	$[0 ; 1]$	$]1 ; 2[$	$[1 ; 2[\cup [4 ; 6[$	$[0 ; 1]$

Conclusion

On constate que :

Si f est continue sur K alors f(K) est un intervalle ou un singleton.

Si f est continue sur K et K fermé alors f(K) est un intervalle fermé ou un singleton.

Les réciproques ne sont pas vraies.

En effet : f n'est pas continue sur $[-1 ; 1]$; cependant $f([-1 ; 1]) = [0 ; 1]$.

f est continue sur $[-1 ; 1[$; cependant $f([-1 ; 1[) = [0 ; 1]$.

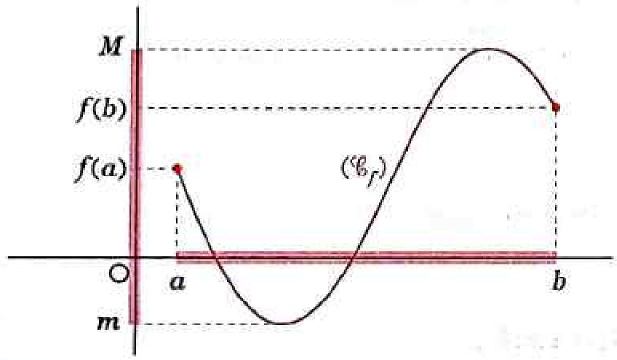
On démontre et nous admettons la propriété fondamentale suivante :

Propriété

Par une fonction continue :

– l'image d'un intervalle est un intervalle ou un singleton.

– l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé ou un singleton.

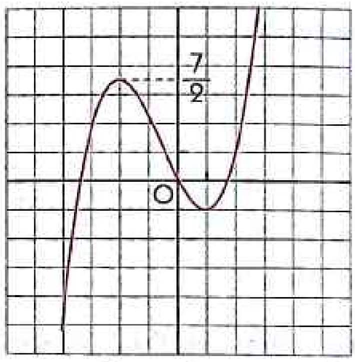


f est continue sur $[a ; b]$

$f([a ; b]) = [m ; M]$

m est le minimum de f sur $[a ; b]$

M est le maximum de f sur $[a ; b]$



$f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{6}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

$f([-3 ; 2]) = [-1 ; \frac{7}{2}]$

$f([-2 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$

Cette propriété est très importante. Elle permet,

– d'une part, de déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue dans les cas particuliers où :

l'intervalle est fermé

la fonction est strictement monotone,

– d'autre part, de démontrer l'existence de zéros d'une fonction et de déterminer des valeurs approchées de ces zéros.

Détermination de l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue

Exemple 1

Déterminons l'image de l'intervalle $[-1 ; 2]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Détermination du maximum et du minimum de f sur $[-1 ; 2]$

Soit x un nombre réel.

$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$ car f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$

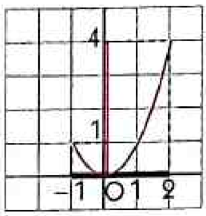
$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$ car f est croissante sur $]0 ; +\infty[$

donc : Pour tout nombre réel x, $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$
d'où : 0 est un minorant de f et 4 un majorant de f sur $[-1 ; 2]$
or : $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$,
donc : 0 et 4 sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[-1 ; 2]$.

Détermination de l'image de $[-1 ; 2]$ par f

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [-1 ; 2] \\ \text{le minimum de } f \text{ sur } [-1 ; 2] \text{ est } 0 \\ \text{le maximum de } f \text{ sur } [-1 ; 2] \text{ est } 4 \end{cases}$$

donc : $f([-1 ; 2]) = [0 ; 4]$.



Exemple 2

Déterminons l'image de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$ par la fonction cosinus.

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

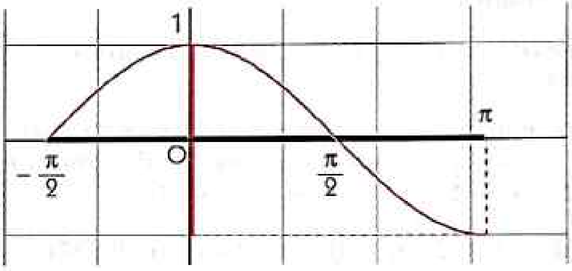
Détermination du minimum et du maximum de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$

Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$
donc : -1 est un minorant de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$ et 1 est un majorant de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$
or : $\cos\pi = -1$ et $\cos 0 = 1$.
donc : -1 et 1 sont respectivement le minimum et le maximum de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

Détermination de l'image de $[-\frac{\pi}{2} ; \pi]$ par cos

$$\begin{cases} \cos \text{ est continue sur } [-\frac{\pi}{2} ; \pi] \\ \text{le minimum de } \cos \text{ sur } [-\frac{\pi}{2} ; \pi] \text{ est } -1 \\ \text{le maximum de } \cos \text{ sur } [-\frac{\pi}{2} ; \pi] \text{ est } 1 \end{cases}$$

donc : $\cos([-\frac{\pi}{2} ; \pi]) = [-1 ; 1]$.



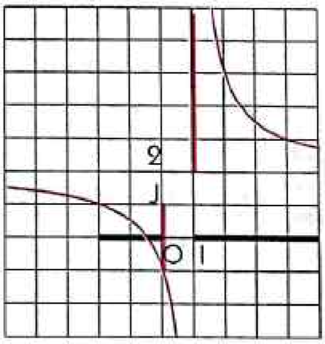
Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Exemple introductif

On donne la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.
Déterminons graphiquement l'image par f de chacun des intervalles $[-2 ; 0]$ et $]1 ; +\infty[$.

Tableau de variation et représentation graphique de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$



Détermination graphique de $f([-2 ; 0])$ et de $f(]1 ; +\infty[)$

$f([-2 ; 0]) = [-1 ; 1]$; $f(]1 ; +\infty[) =]2 ; +\infty[$

Conclusion

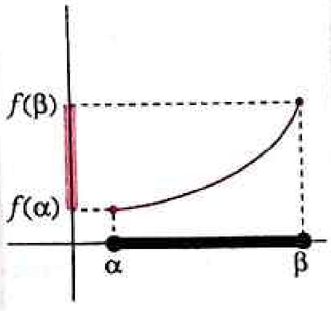
f est continue et strictement décroissante sur $[-2 ; 0]$ donc : $f([-2 ; 0]) = [f(0) ; f(-2)]$;
f est continue et strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$ donc : $f(]1 ; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to 1} f(x)[$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

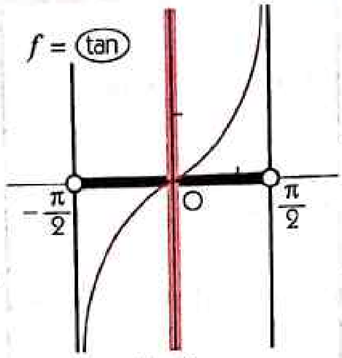
Propriété

α et β sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ tels que $\alpha < \beta$.
f est une fonction admettant une limite à droite en α et une limite à gauche en β.

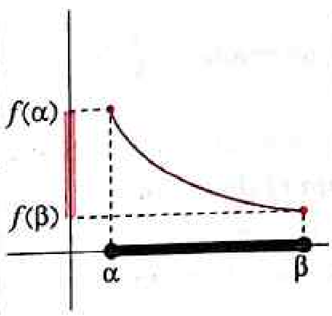
- ***Si** f* **est continue et strictement croissante sur $[\alpha ; \beta]$ *alors* $f([\alpha ; \beta]) = [f(\alpha) ; f(\beta)]$.**
- ***Si** f* **est continue et strictement croissante sur $]\alpha ; \beta[$ *alors* $f(]\alpha ; \beta[) =]\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \alpha} f(x) ; \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \beta} f(x)[$**
- ***Si** f* **est continue et strictement décroissante sur $[\alpha ; \beta]$ *alors* $f([\alpha ; \beta]) = [f(\beta) ; f(\alpha)]$**
- ***Si** f* **est continue et strictement décroissante sur $]\alpha ; \beta[$ *alors* $f(]\alpha ; \beta[) =]\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \beta} f(x) ; \lim\limits_{x \underset{>}{\to} \alpha} f(x)[$**



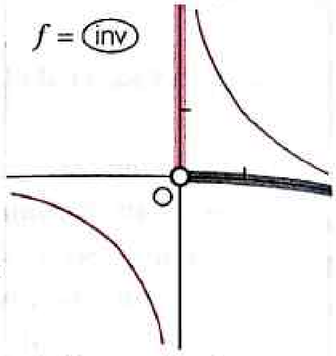
$f([\alpha ; \beta]) = [f(\alpha) ; f(\beta)]$



$f(]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$



$f([\alpha ; \beta]) = [f(\beta) ; f(\alpha)]$



$f(]0 ; +\infty[) =]0 ; +\infty[$

Exemples

Déterminons l'image de chacun des intervalles $[-2 ; 3]$, $]-1 ; 1[$, $]0 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 1]$ par la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

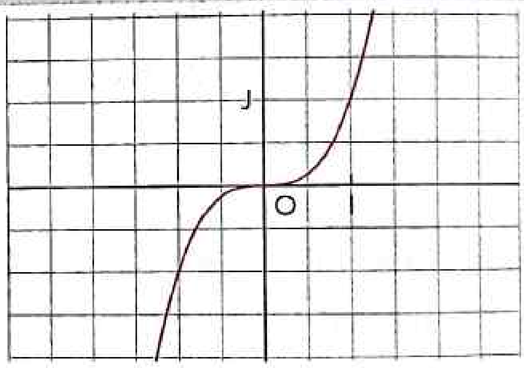
La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur chacun des intervalles $[-2 ; 3]$, $]-1 ; 1[$, $]0 ; +\infty[$ et $]-\infty ; 1]$

donc : $f([-2 ; 3]) = [f(-2) ; f(3)] = [-8 ; 27]$

$f(]-1 ; 1[) =]f(-1) ; f(1)[=]-1 ; 1[$

$f(]0 ; +\infty[) =]f(0) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[=]0 ; +\infty[$

$f(]-\infty ; 1]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; f(1)] =]-\infty ; 1]$



Déterminons l'image de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par la fonction tangente.

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$,

donc :

$\tan(]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[) = \left]\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x ; \lim\limits_{x \to +\frac{\pi}{2}} \tan x\right[= \mathbb{R}$.

Déterminons l'image de $]0 ; +\infty[$ par la fonction inverse.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$,

donc :

$f(]0 ; +\infty[) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} ; \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}\right[=]0 ; +\infty[$.

Exercices

2.a On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}.$$

1. Étudier les variations et dresser le tableau de variation de f.

2. En déduire l'image de chacun des intervalles $[0 ; 4]$ et $[3 ; +\infty[$.

2.b On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

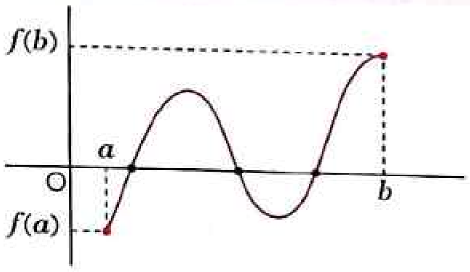
Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[0 ; \frac{7}{2}]$, $[2 ; +\infty[$, $]-\infty ; 1[$.

2.2. Calcul approché des zéros d'une fonction continue

Propriété

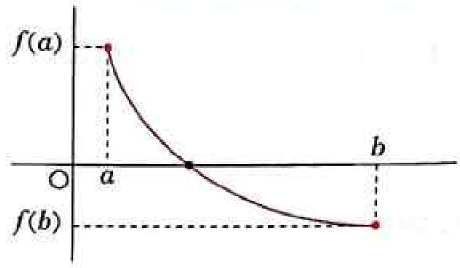
a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a\,;b]$, (E) l'équation $f(x) = 0$.

- ***Si*** **$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires *alors* l'équation (E) admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.**
- ***Si*** **de plus f est strictement monotone sur $[a\,;b]$ *alors* l'équation (E) admet une unique solution dans $[a\,;b]$.**



L'équation (E) admet trois solutions.

(E) $f(x) = 0$



L'équation (E) admet une seule solution.

Exemple d'utilisation de la méthode par balayage

Démontrons que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ a une seule solution x_0 appartenant à $]-1\,;0[$ et déterminons un encadrement de x_0 d'amplitude 0,001.

Résoudre l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ revient à chercher les zéros de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

Localisation du zéro de f

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

or : $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$

donc : f a un seul zéro, x_0, appartenant à $]-1\,;0[$.

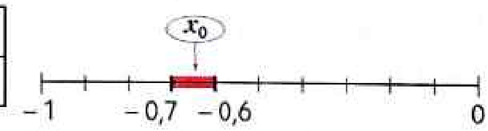
Encadrement de x_0 par la méthode de balayage

Illustrations graphiques

- *Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 1*

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $[-1\,;0]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$					

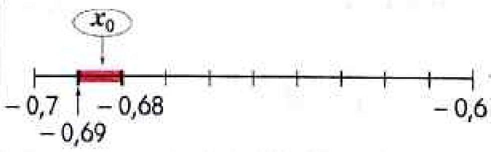


On obtient : $-0,7 < x_0 < -0,6$ et $-0,6 - (-0,7) = 0,1$.

- *Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 2*

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 2 de l'intervalle $[-0,7\,;-0,6]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	$-0,69$	$-0,68$	$-0,67$	$-0,66$	$-0,65$	$-0,64$	$-0,63$	$-0,62$	$-0,61$
$f(x)$	$-$	$+$							

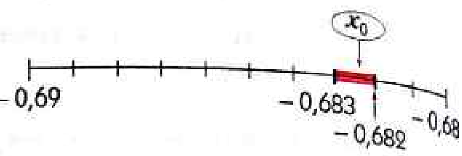


On obtient : $-0,69 < x_0 < -0,68$ et $-0,68 - (-0,69) = 0,01$.

• *Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 3*

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 3 de l'intervalle $[-0{,}69 ; -0{,}68]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	$-0{,}689$	$-0{,}688$	$-0{,}687$	$-0{,}686$	$-0{,}685$	$-0{,}684$	$-0{,}683$	$-0{,}682$	$-0{,}681$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	



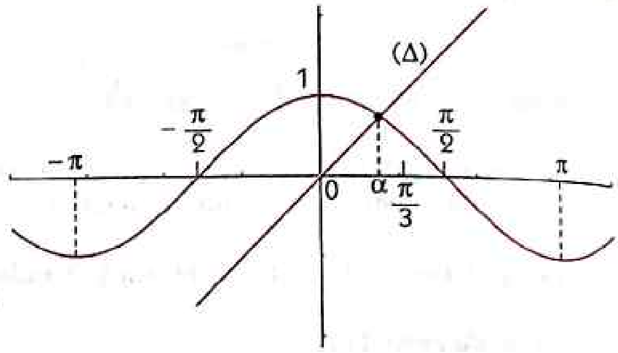
On obtient : $-0{,}683 < x_0 < -0{,}682$ et $-0{,}682 - (-0{,}683) = 0{,}001$.

Exemple d'utilisation de la méthode de dichotomie

On considère l'équation (E) $\cos x = x$. Démontrons que l'équation (E) a une seule solution α et déterminons une valeur approchée de α à 0,1 près.

Approche graphique

Le plan est muni d'un repère. Désignons par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction cosinus et par (Δ) la droite d'équation $y = x$.



La courbe $(\mathscr{C})$ coupe (Δ) en un seul point, ce point a pour abscisse α tel que :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

donc l'équation (E) admet une seule solution α et cette solution vérifie $\alpha \in]0 ; \pi[$.

Étude algébrique

Résoudre l'équation (E) revient à chercher le zéro de la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \cos x - x$.

Localisation du zéro de f

f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) = -\sin x - 1$

d'où : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) < 0$.

f est donc continue et strictement décroissante sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$.

De plus : $f(0) > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$ (car $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}$)

d'où : f a un seul zéro α ; ce zéro appartenant à $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, l'équation (E) admet donc une seule solution α et $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{3}]$.

Encadrement de α par la méthode de dichotomie

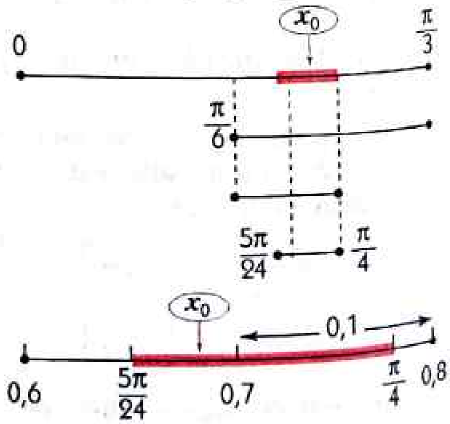
$f(0) > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$; donc $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$

$f(\frac{\pi}{6}) > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$; donc $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$

$f(\frac{\pi}{6}) > 0$ et $f(\frac{\pi}{4}) < 0$; donc $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{5\pi}{24}) > 0$ et $f(\frac{\pi}{4}) < 0$; donc $\frac{5\pi}{24} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

Illustrations graphiques



Conclusion

On a : $0{,}6 < \frac{5\pi}{24} < \alpha < \frac{\pi}{4} < 0{,}8$

donc : 0,7 est une valeur approchée de α à 0,1 près.

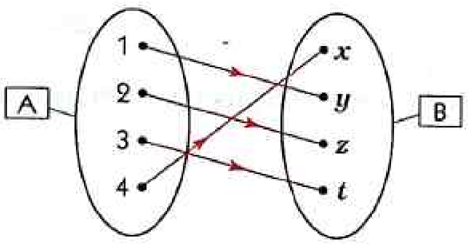
3 Fonctions continues strictement monotones

3.1. Applications bijectives, injectives, surjectives

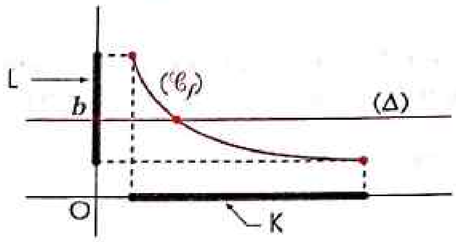
Applications bijectives

Définition

A et B sont des ensembles non vides, f est une application de A dans B.
On dit que f est une *application bijective* lorsque tout élément de B a un unique antécédent dans A.
On dit aussi que f est une *bijection*.



f est une bijection de A dans B
si et seulement si
pour tout élément b de B
l'équation $f(x) = b$
admet $\boxed{\text{une seule}}$ solution dans A.



f est une bijection de K dans L
si et seulement si
pour tout élément b de L
la droite d'équation $y = b$
coupe $(\mathscr{C}_f)$ en $\boxed{\text{un seul}}$ point.

Exemples

On considère l'application

$$f : [2\,;+\infty[\;\to\; [-3\,;+\infty[$$
$$x \mapsto x^2 - 4x + 1$$

Démontrons que f est une bijection.

Soit b un élément de $[-3\,;+\infty[$.
Résolvons l'équation (E) d'inconnue x :

(E) $\quad f(x) = b$

Résoudre (E) revient à :
- résoudre l'équation (E') $x^2 - 4x + 1 = b$
- ne retenir que les solutions de (E') appartenant à $[2\,;+\infty[$.

Résolution de (E')

$$\text{(E')}\quad x^2 - 4x + 1 = b \quad [b \geq -3]$$
$$(x-2)^2 - (b+3) = 0$$
$$(x - 2 - \sqrt{b+3})\,(x - 2 + \sqrt{b+3}) = 0$$

L'équation (E') admet pour solutions :

$$2 + \sqrt{b+3} \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{b+3}.$$

On considère l'application

$$g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$$
$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

Démontrons que g est une bijection.

Soit b un élément de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
Résolvons l'équation (E) d'inconnue x :

(E) $\quad g(x) = b$

Résoudre (E) revient à :
- résoudre l'équation (E') $\dfrac{2x+1}{x-1} = b$
- ne retenir que les solutions de (E') appartenant à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Résolution de (E')

Ensemble de validité : $V = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$$\text{(E')}\quad \frac{2x+1}{x-1} = b \quad [b \neq 2]$$
$$(2-b)x + 1 + b = 0$$
$$x = \frac{b+1}{b-2}$$

Solutions de (E)

– Pour $b > -3$,

$2 + \sqrt{b+3} > 2$ et $2 - \sqrt{b+3} \leq 2$

(E) admet une seule solution : $2 + \sqrt{b+3}$.

– Pour $b = -3$,

(E) admet une seule solution : 2.

Conclusion

Tout élément b de $[-3\ ;+\infty[$ admet un antécédent unique par f, le nombre réel $2 + \sqrt{b+3}$.

L'application f est donc bijective.

Sa réciproque est $f^{-1} : [-3\ ;+\infty[\ \to [2\ ;+\infty[$
$x \mapsto 2 + \sqrt{b+3}$

Solutions de (E)

On a : $b + 1 \neq b - 2$;

donc : $\dfrac{b+1}{b-2} \neq 1$

(E) admet une seule solution : $\dfrac{b+1}{b-2}$.

Conclusion

Tout élément b de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ admet un unique antécédent par g, le nombre réel $\dfrac{b+1}{b-2}$.

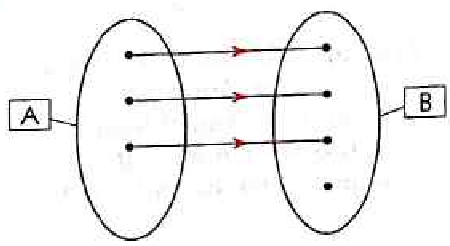
L'application g est donc bijective.

Sa bijection réciproque est $g^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$
$x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$

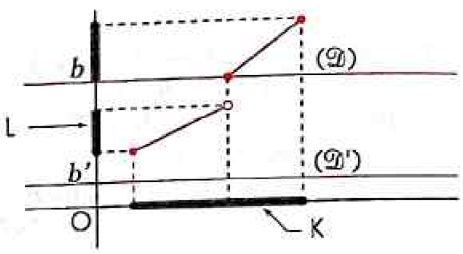
Applications injectives

Définition

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.
On dit que f est une *application injective* lorsque les images de deux éléments distincts de A sont différentes.
On dit aussi que f est une *injection*.



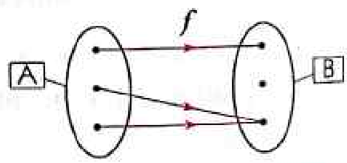
f est une injection de A dans B
si et seulement si
pour tout élément b de B
l'équation $f(x) = b$
admet $\boxed{\text{une ou zéro}}$ solution dans A.



f est une injection de K dans L
si et seulement si
pour tout élément b de L
la droite d'équation $y = b$
coupe $(\mathscr{C}_f)$ en $\boxed{\text{un ou zéro}}$ point.

Remarque

L'application f de A dans B, de diagramme ci-contre, n'est pas injective car deux éléments de A ont la même image.



Propriétés

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.

f est injective *si et seulement si* $\begin{cases} \textbf{pour tous éléments } x_1 \textbf{ et } x_2 \textbf{ de A,} \\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$

f est injective *si et seulement si* $\begin{cases} \textbf{pour tous éléments } x_1 \textbf{ et } x_2 \textbf{ de A,} \\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2 \end{cases}$

Démonstration guidée

La première propriété caractéristique est une traduction de la définition.
La deuxième propriété caractéristique est déduite de la définition à l'aide du raisonnement par l'absurde suivant :

Supposons que f est injective
Soient x_1 et x_2 des éléments de A tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Démontrons par l'absurde que : $x_1 = x_2$.
Supposons que : $x_1 \neq x_2$
or : f est injective
donc : $f(x_1) \neq f(x_2)$;
ceci est absurde car $f(x_1) = f(x_2)$
d'où : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Supposons que :
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
Démontrer, en utilisant la définition et un raisonnement par l'absurde, que f est injective.

Exemple

Démontrons que l'application f de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$ est injective.

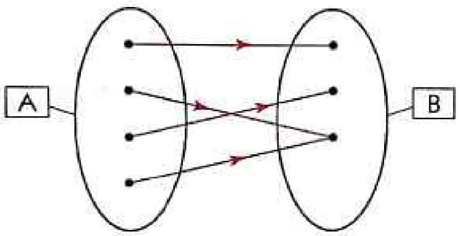
Démontrons que : pour tous éléments x_1 et x_2 de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Soient x_1 et x_2 des éléments de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

On a : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{x_1-1}{x_1-3} = \dfrac{x_2-1}{x_2-3}$
$\Leftrightarrow x_1x_2 - 3x_1 - x_2 + 3 = x_1x_2 - 3x_2 - x_1 + 3$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

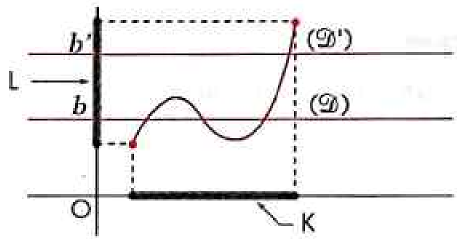
Applications surjectives

Définition

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.
On dit que f est une *application surjective* lorsque l'image de A par f est égale à B.
On dit aussi que f est une *surjection*.



f est une surjection de A dans B
si et seulement si
pour tout élément b de B
l'équation $f(x) = b$
admet $\boxed{\text{une ou plusieurs}}$ solutions dans A.



f est une surjection de K dans L
si et seulement si
pour tout élément b de L
la droite d'équation $y = b$
coupe $(\mathscr{C}_f)$ en $\boxed{\text{un ou plusieurs}}$ points.

Remarque

- *Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*
- *f étant une application de A dans B, E une partie de A, si la restriction de f à E est injective alors f permet de définir la bijection* $g : \begin{array}{l} E \to f(E) \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

*On dit que f **détermine une bijection** de E dans $f(E)$.*

Exercices

3.a Les applications suivantes sont-elles bijectives, injectives, surjectives ?

$f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+1}$ $\qquad g : \mathbb{R} \to [\dfrac{2}{3} ; +\infty[$, $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$

3.b On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}.$$
Trouver deux ensembles A et B pour que f détermine une application bijective de A dans B.

3.2. Fonctions continues strictement monotones

Bijection continue strictement monotone

Propriété

Toute application strictement monotone est injective.

Démonstration

Soient A et B des ensembles non vides de $\mathbb{R}$

f une application de A dans B strictement monotone

x_1 et x_2 deux éléments de A

Démontrons que : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Si f est strictement croissante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Si f est strictement décroissante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

d'où : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

L'application f est donc injective.

On déduit aisément de la propriété précédente la conséquence suivante :

Propriété

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle K détermine une bijection de K dans f(K).

Remarque

La continuité de f est une hypothèse superflue dans la propriété précédente. Cependant elle permet de déterminer $f(K)$.

Exemples

Démontrons que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$ détermine une bijection de $]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$.

Étude des variations de f

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2} \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \frac{1}{2}$

f étant continue et strictement croissante sur $]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$, on a : $f(]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[) =]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$.

Conclusion

f détermine une bijection de $]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$.

Démontrons que l'application g de $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$ dans $]\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$ définie par $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$ est bijective.

Étude des variations de g

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	$-$	‖
$g(x)$	$+\infty \searrow$	$\boxed{\frac{5}{2}}$

g étant continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$, on a : $g(]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[) =]\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$.

Conclusion

g est une bijection de $]-\infty\,;\dfrac{1}{2}[$ dans $]\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$.

Réciproque d'une bijection continue strictement monotone

Activité introductive

Considérons la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$.

On veut : – démontrer que f détermine une bijection φ de $]-2\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;3[$.
– étudier la continuité et le sens de variation de f^{-1}.

Pour cela, on peut :
– étudier les variations et dresser le tableau de variation de f ; en déduire que f détermine une bijection φ de $]-2\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;3[$;
– représenter graphiquement φ et φ^{-1} dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) et étudier graphiquement la continuité de φ^{-1} ;
– déterminer la formule explicite de φ^{-1} et étudier son sens de variation.

Propriété

φ est une bijection d'un intervalle K dans un intervalle L.
Si φ est continue et strictement monotone sur K,
alors sa bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement monotone sur L.
De plus, φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.

Démonstration

Admettons la continuité de φ^{-1} et démontrons que φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.
Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de K.
Posons : $y_1 = \varphi(x_1)$ et $y_2 = \varphi(x_2)$;
– Si φ est strictement croissante, alors $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$
d'où $\varphi^{-1}(y_1) < \varphi^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2$
donc φ^{-1} est strictement croissante.
– On prouve de même que si φ est strictement décroissante, alors φ^{-1} est strictement décroissante.
– On en déduit que φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.

Exemple

On a vu que l'application g de $]-\infty\,;0{,}5[$ dans $]2{,}5\,;+\infty[$ définie par $g(x) = 2x^2 - 2x + 5$ est bijective.
Déterminons sa bijection réciproque g^{-1}.

Résolution de l'équation (E) $2x^2 - 2x + 5 = y$ $[y > 2{,}5]$

(E) admet deux solutions x_1 et x_2 : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{2y-9}}{2}$; $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{2y-9}}{2}$.

On vérifie que : $x_1 < \dfrac{1}{2}$; $x_2 > \dfrac{1}{2}$.

L'équation $f(x) = y$ $[y > 2{,}5]$ admet x_1 pour unique solution dans $]-\infty\,;0{,}5[$.

Conclusion

On obtient $g^{-1} :]-\infty\,;0{,}5[\;\to\;]2{,}5\,;+\infty[$

$$y \mapsto \frac{1-\sqrt{2y-9}}{2}$$

Exercices

3.c Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie par sa formule.
Démontrer que f définit une bijection de l'intervalle K sur un intervalle que l'on précisera.

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$, $K = [2\,;+\infty[$.

(2) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$, $K =]1\,;5]$.

(3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$, $K =]2\,;+\infty[$.

(4) $f(x) = -4x^3 + 6x + 5$, $K = [1\,;+\infty[$.

(5) $f(x) = \dfrac{x-2}{3x^2-2x+8}$, $K = [0\,;2]$.

3.d Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

(1) $2x^3 - 24x + 3 = 0$.

(2) $x^3 + 2x + 2 = 0$.

3.3. Fonctions puissances d'exposants rationnels

Fonctions racine $n^{\text{ième}}$

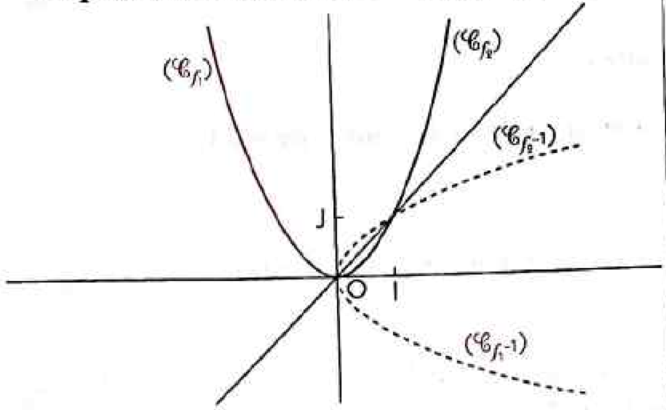
Activité d'approche

On donne la fonction carrée f et la fonction cube g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
Démontrer que :

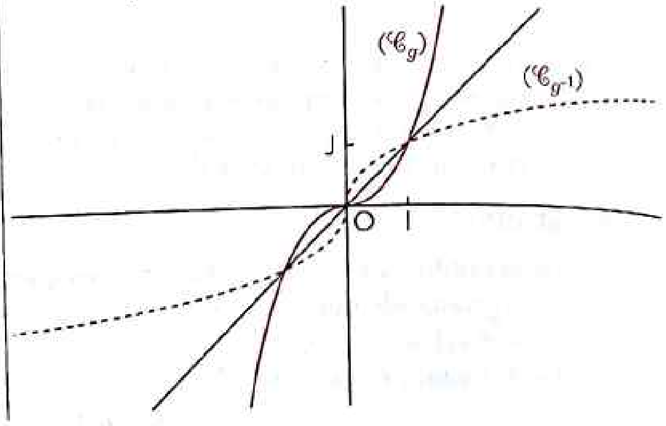
f détermine $\begin{cases} \text{une bijection } f_1 \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+ \\ \text{une bijection } f_2 \text{ de } \mathbb{R}_- \text{ dans } \mathbb{R}_+ \end{cases}$

g détermine $\begin{cases} \text{une bijection } g_1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \\ \text{une bijection } g_2 \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+ \\ \text{une bijection } g_3 \text{ de } \mathbb{R}_- \text{ dans } \mathbb{R}_- \end{cases}$

Représentation graphique de f_1, f_1^{-1}, f_2 et f_2^{-1}



Représentation graphique de g et g^{-1}



Présentation

n est un nombre entier naturel non nul, f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^n$.
Démontrons que f_n détermine une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Étude du sens de variation de f_n

f_n est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

n est pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$+\infty$

n est impair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$+\infty$

Recherche de bijections

f_n est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
f_n détermine donc :
- une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
- une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus,
$f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$
f_n détermine donc :
- une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
- une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_-$.
- une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Conclusion

D'une manière générale, f_n détermine une bijection f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, l'application $\varphi_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n \end{array}$ est une bijection.

Elle admet donc une bijection réciproque.

Définition

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle *fonction racine* $n^{\text{ième}}$ la bijection réciproque de la bijection $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^n$

Notation

y est un nombre réel positif ou nul.
L'antécédent de y par φ_n est noté :

$\sqrt[n]{y}$ et on lit « racine $n^{\text{ième}}$ de y »

ou bien

$y^{\frac{1}{n}}$ et on lit « y exposant $\frac{1}{n}$ »

– Pour $n = 2$,
on écrit $\sqrt{y}$ et on lit « racine carrée de y »

– Pour $n = 3$,
on écrit $\sqrt[3]{y}$ et on lit « racine cubique de y ».

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Propriétés

x et y étant des nombres réels positifs ou nuls et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2,

$x^n = y \iff x = \sqrt[n]{y}$

$\sqrt[n]{y} \geq 0$

$\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = \sqrt[n]{y^n} = y$

$x^n = y \iff x = y^{\frac{1}{n}}$

$y^{\frac{1}{n}} \geq 0$

$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(y^n\right)^{\frac{1}{n}} = y$

Exemples

$5^2 = 25$ donc $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$; $2^3 = 8$ donc $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$; $1{,}1^4 = 1{,}4641$ donc $\sqrt[4]{1{,}4641} = 1{,}4641^{\frac{1}{4}} = 1{,}1$.

Calculs avec les racines $n^{\text{ième}}$

Propriétés

a et b étant des nombres réels positifs, m et n deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

(1) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\qquad a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$

si $b \neq 0$ alors

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\qquad \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$

(4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$

(5) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$ $\qquad a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = \left(a^{m+n}\right)^{\frac{1}{nm}}$

Démonstration

(1) $\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

donc : $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

On démontre de même les propriétés (2), (3) et (4).

(5) $\left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} \times \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}$

$= \left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right]^n \times \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m$

$= a^n \times a^m = a^{n+m}$

donc : $\sqrt[mn]{a^{m+n}} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a}$.

Exemples

Simplifier au maximum : $\dfrac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3}$ $[a > 0]$	Simplifier au maximum : $\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{4}}$
$\dfrac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3} = \dfrac{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{a^9}}{8\sqrt{a^3}} = \dfrac{2a^3}{8a\sqrt{a}} = \dfrac{a\sqrt{a}}{4}$	$\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^3 2^2}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{4}} = \dfrac{5\times\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt{5}$

Fonctions puissances d'exposants rationnels

Convention d'écriture

x étant un nombre réel positif ou nul, p un nombre entier et q un nombre entier supérieur ou égal à 2 :

le nombre réel $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ est noté $x^{\frac{p}{q}}$;

pour $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$ est noté $x^{-\frac{p}{q}}$.

Exemples

$64^{\frac{2}{3}} = \left(64^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4^2 = 16$; $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left[(2^4)^{\frac{1}{4}}\right]^3} = \dfrac{1}{8}$.

Définition

r étant un nombre rationnel non nul, on appelle *fonction puissance d'exposant r*,
la fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^r$

On démontre aisément les propriétés suivantes :

Propriétés

r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs,

$x^r \times y^r = (xy)^r$ $\qquad$ $(x^r)^{r'} = x^{r\times r'}$

$\dfrac{x^r}{y^r} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^r$ $\qquad$ $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$

Exemples

$\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \times \left(\frac{26}{5}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{2}} = \dfrac{7^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{49\sqrt{7}}{243}$; $4^{\frac{3}{4}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$; $11^{\frac{2}{3}} \times 11^{\frac{1}{2}} = 11^{\frac{7}{6}}$.

Exercices

3.e Calculer :

(1) $\sqrt[3]{15625}$ (2) $\sqrt[6]{0{,}000064}$

(3) $\sqrt[3]{1728\times 81}$ (4) $\sqrt[4]{\sqrt{6561}}$.

3.f Simplifier :

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{32}\times\sqrt{675}}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{405}}$ (2) $\dfrac{12\times 14^{-\frac{4}{5}}}{7^{-\frac{5}{6}}\times 6^{-\frac{2}{3}}}$.

3.g À l'aide d'une calculatrice, calculer une valeur approchée de chacun des nombres réels suivants :

(1) $5^{0,1}$ (2) $2^{0,142\,857}$

(3) $7^{\frac{1}{3}}$ (4) $8^{\sqrt{3}}$

(5) $\left(\frac{2}{7}\right)^{0,09}$ (6) $\dfrac{3^{-1,4}}{2^{6,2}}$.

TP Travaux pratiques

TP1. Calcul de limite

Ce TP a pour objectif de donner un exemple spécifique de calcul de limite par comparaison.

Exercice commenté

E étant la fonction partie entière, calculer : $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

E éatnt la fonction « partie entière », la difficulté de cet exercice pourrait résider dans la recherche d'un « bon encadrement » de $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ par deux fonctions affines ayant la même limite en 0.

Encadrement de $E\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit x un nombre réel non nul, par définition de E,

on a : $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

d'où : $E\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \leq \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$

donc : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.

Encadrement de $xE\left(\frac{1}{x}\right)$ et conclusion

pour $x > 0$: $1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

pour $x < 0$: $1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$

or : $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

TP2. Démonstration par implication et par contraposition

L'objet de ce TP est de poursuivre la mise en place des différents types et méthodes de démonstration. Dans le cadre de l'apprentissage à la résolution de problèmes, ce TP doit être consulté tout le long de l'année et tendre à devenir une fiche de référence personnalisée par des annotations individuelles.

Implication

- **Dans un énoncé de propriété,** « l'implication » se traduit par : si (p) alors (q)
  on note : (p) $\Rightarrow$ (q)
  on lit : (p) implique (q)

Cependant, dans certains énoncés de propriété, l'implication est implicite.

- **Dans une démonstration**, l'utilisation d'une « implication » permet de déduire directement une conclusion C à partir d'une donnée D du problème, on évitera alors l'expression : « si D alors C », ce qui pourrait sous-entendre une supposition (ce qui n'est pas le cas d'une donnée D de problème).

En général,on écrit indifféremment :

(1) on a D ; donc C. (2) puisque D ; donc C.

L'implication permet une démonstration par déduction directe d'une conclusion C à partir de la donnée D d'un problème, ou de l'hypothèse H d'une propriété.

Contraposée d'une implication

Définition – Propriété

- **On appelle *contraposée* de l'implication : (p) $\Rightarrow$ (q)**
  l'implication : non (q) $\Rightarrow$ non (p).
- **On admet qu'une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.**

Lorsqu'il est difficile de démontrer une implication (p) $\Rightarrow$ (q), on peut penser à démontrer sa contraposée : non (q) $\Rightarrow$ non (p).

Exemple

Pour reconnaître une injection, on peut utiliser :

ou bien
- l'implication : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- sa contraposée : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Limite et continuité en a

Limite à gauche, limite à droite

1 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; -2[,\ f(x) = \dfrac{3x^2+5x}{x+2} \\ \text{pour } x \in]-2 ; +\infty[,\ f(x) = \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}. \end{cases}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en -2.

2 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{|x-3| - |x+5|}{x^2-4}.$$
Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 2 et en -2.

3 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x+5}}{x^2-1}.$$
Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 1 et en -1.

4 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = x\mathrm{E}(x)$.
Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 1, en -1 et en n (n étant un nombre entier).

5 Déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} (\frac{1}{x} + 1)(x^2+1)$ (2) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \dfrac{(1-2x)^2}{1-x}$

(3) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{x^2-4x+1}{x-2}$ (4) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 3} \dfrac{1-4x}{x^2-9}$

Prolongement par continuité

6 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 1[,\ f(x) = \dfrac{6x}{x+2} \\ \text{pour } x \in]1 ; +\infty[,\ f(x) = \sqrt{3x+1}. \end{cases}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

7 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0 ; 1]$.

(1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (2) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

(3) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ (4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

8 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $[0 ; 1[$.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(3) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x-1}$ (4) $f(x) = \dfrac{x(1-x)}{x-1}$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

Limites et opérations

9 Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$, de la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

10 Pour chacune des fonctions suivantes f et g déterminer leur limite en $+\infty$.

(1) $f : x \mapsto 3x\sqrt{x+7}$ (2) $g : x \mapsto 2x^3 + \sqrt{x+4}$

Limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles

11 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction rationnelle.
Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(1) $f(x) = \dfrac{7x^2+3x-8}{(x-1)(x-2)}$ (2) $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+1}{x+9}$

12 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme.
Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(1) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ (3) $f(x) = x^2 - 3x + 6$

(2) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ (4) $f(x) = -5x^3 - 3x + 6$

Limites d'une fonction composée

13 **1.** On sait que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Étudier les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$

2. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$ $[a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*]$.

3. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin \dfrac{1}{x}$.

14 Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

Étudier les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{2x}$

15 On sait que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Démontrer que $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2}$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2. Déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = 2$.

Passage à la limite dans une inégalité

16 On considère une fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ admettant une limite ℓ finie en $+\infty$, et vérifiant :
$$1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x} \quad \text{sur }]1 ; +\infty[.$$
Déterminer un encadrement de la limite ℓ.

Calcul de limites par comparaison

17 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x + 2\cos x$ (2) $x \mapsto x^2 - 2\cos(x^3)$

18 Étudier la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$ (2) $x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$

(3) $x \mapsto \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ (4) $x \mapsto x^3\cos\frac{1}{x}$

19 Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x + \sin x$ (2) $x \mapsto \dfrac{1}{x + \cos x}$

(3) $x \mapsto \dfrac{x + \cos x}{2 + \sin x}$ (4) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{3x + 2}$

(5) $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x - 1}$ (6) $x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$

20 On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x - 1}$.

Encadrer f par deux fonctions rationnelles.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

21 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x\cos x}{1 + x^2}.$$

Encadrer f par deux fonctions rationnelles.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

22 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$.

Encadrer f par deux fonctions.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

23 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + E(x)$.

1. En utilisant la définition de E, démontrer que : pour tout x, $x - 1 \leq E(x) \leq x$.
Encadrer f par deux fonctions affines.

2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Calcul de limites – Utilisation d'une factorisation

24 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3} + 8x$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Démontrer que : pour $x < 0$, $f(x) = x\left(-\sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}} + 8\right)$.
En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

25 On considère $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1} - 3x$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Démontrer que : pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}} - 3\right)$.
En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Calcul de limites – Utilisation de l'expression conjuguée

26 On considère $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3} - 5x$.
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en utilisant l'expression conjuguée.

27 En utilisant des expressions conjuguées, déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{9 - x}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x \to 3\\ >}} \dfrac{\sqrt{x - 3}}{2 - \sqrt{6x - 2}}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 4}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5 + x^2} - 5}{4x^2}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to 1\\ >}} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2}}{x^2 - 1}$ (6) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

28 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x + 1} - \sqrt{3x} + 1$.

1. Justifier que ni les règles opératoires sur les limites, ni la « mise en facteur » par $\sqrt{3x}$ ne permettent de déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. À l'aide d'une expression conjuguée de $f(x) - 1$, et en s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Calcul de limites – Utilisation du taux de variation

29 À l'aide du taux de variation de fonctions bien choisies, calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x - 5} - 3}{x - 2}$ (4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$ (5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{3x - \pi}$

(3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{2x - \pi}$ (6) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi}$

30 a étant un nombre réel, calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$ (2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$

Calcul de limites – Changement d'écriture

31 **1.** Rappeler les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

2. Calculer la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ (2) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(3) $x \mapsto x\sin x$ (4) $x \mapsto \sqrt{x}\sin x$

(5) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{x^3}$ (6) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\sin x}$

(7) $x \mapsto \dfrac{\tan x - \sin x}{x}$ (8) $x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

32 Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x} = 2$

(voir exercice n° 15), calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x\tan x}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{1 - \cos 2x}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin x}{1 - \cos 2x}$

Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle

33 Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

(1) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;0[, & f(x) = 1 - x \\ \text{pour } x \in]0\,;+\infty[, & f(x) = 5x^3 + x + 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty\,;0], & f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 9 \\ & f(0) = 9 \end{cases}$

34 Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que f soit une fonction continue sur $\mathbb{R}$:

(1) $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, & f(x) = \dfrac{8x - 13}{4x + 1} \\ & f(1) = a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}, & f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 7} \\ & f(7) = a \end{cases}$

35 Dans chacun des cas suivants, déterminer a et b pour que f soit une fonction continue sur l'intervalle $[-1\,;1]$:

(1) $\begin{cases} \text{pour } x \in [-1\,;1], & f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} + 2x + 3} \\ & f(-1) = a \\ & f(1) = b \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in [-1\,;1]\setminus\{0\,;-\frac{1}{2}\}, & f(x) = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{1}{4x^2 + 3} \\ & f(0) = a \\ & f(-\frac{1}{2}) = b \end{cases}$

Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue

36 1. Construire la courbe d'équation : $y = -x^3$.
En déduire la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = (x-1)^3 - 2$.
2. Justifier que f est une fonction strictement monotone (on évitera d'utiliser la dérivée de f).
3. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-3\,;1]$ et $[0\,;+\infty[$.
Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

37 1. Construire la courbe d'équation : $y = \frac{1}{x}$.
En déduire la représentation graphique de la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$.
2. Justifier que f est une fonction strictement monotone (on évitera d'utiliser la dérivée de f).
3. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[-2\,;2[$ et $[3\,;+\infty[$.
Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

38 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-4		-3		0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

Quelle est l'image par f de chacun des intervalles suivants ?
$]-4\,;-3[$; $]-3\,;0]$; $]-3\,;+\infty[$; $]-\infty\,;-4]$.

Calcul approché des zéros d'une fonction continue

39 1. Construire la courbe d'équation : $y = \cos x$.
En déduire la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \cos(x + \tfrac{\pi}{3}).$$

2. Déterminer graphiquement un encadrement du zéro de f ayant la plus petite partie entière positive par deux nombres entiers consécutifs.
On désigne par α ce zéro de f.
Déterminer par la méthode de balayage (ou de dichotomie) une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

40 f est la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = (x+2)^2 - 47.$$

1. Justifier que f est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle admet un unique zéro α.
2. À l'aide d'une calculatrice programmable, déterminer un encadrement de α par deux nombres consécutifs.
3. Déterminer par la méthode de balayage (ou de dichotomie) une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Fonctions continues strictement monotones

Applications bijectives, injectives, surjectives

41 Les application suivantes sont-elles bijectives, injectives, surjectives ?
$f : x \mapsto x^4 + 1$; $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$; $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$.

Bijection continue strictement monotone

42 f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^2+1}.$$

Donner des ensembles A et B tels que f détermine une application bijective de A dans B.

43 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Donner les ensembles A, B et C tels que f détermine les applications bijectives :
– de $]-\infty\,;0]$ dans A
– de $[0\,;1]$ dans B
– de $[1\,;+\infty[$ dans C.

Réciproque d'une bijection continue strictement monotone

44 On considère la fonction :

$$f :]-1\,;+\infty[\to]-4\,;+\infty[$$
$$x \mapsto x^2 + 2x - 3$$

1. Justifier que f est une bijection.
2. Déterminer la bijection réciproque de f.
3. Établir le tableau de variation de f^{-1}.
4. Construire la représentation graphique de f, en déduire celle de f^{-1}.

Fonctions puissances à exposants rationnels

45 Écrire sous la forme la plus simple possible chacun des nombres réels suivants :

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{3}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{200}}$ (3) $27^{\frac{2}{3}}$

(4) $8^{-\frac{4}{3}}$ (5) $\dfrac{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{9}}{3\sqrt[4]{3}}$