

Introduction

NEWTON (XVII^e siècle) fut, avec LEIBNIZ, l'un des fondateurs du calcul infinitésimal. Dans sa Méthode des fluxions et des suites infinies, il s'appuie sur un point de vue cinématique : il considère les quantités mathématiques comme les espaces décrits par un corps en mouvement et imagine les vitesses des mouvements qui les engendrent.



EULER et CAUCHY, aux XVIII^e et XIX^e siècles, vont structurer ces calculs pour étudier la notion de limite, puis celle de dérivée conduisant au calcul mathématique des vitesses.



L'objet de ce chapitre est de compléter les notions déjà vues en classe de première littéraire, notamment en ce qui concerne les applications de la dérivation d'une fonction sur un intervalle.

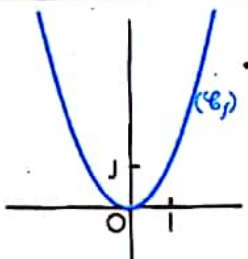
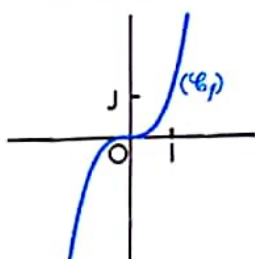
SOMMAIRE

1. Généralités	16
2. Notions de limite et de continuité	18
3. Dérivation	26

1 Généralités

1.1. Parité

Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D_f et pour représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.
Nous rappelons les résultats suivants vus en classe de première.

	f est une fonction paire	f est une fonction impaire
Définition	D_f est symétrique par rapport à zéro ; - pour tout x élément de D_f, $f(-x) = f(x)$.	D_f est symétrique par rapport à zéro ; - pour tout x élément de D_f, $f(-x) = -f(x)$.
Exemple	 $f : x \mapsto x^2$	 $f : x \mapsto x^3$
Interprétation graphique	Le repère (O, I, J) étant orthogonal, la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.	Le point O est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Remarque

Lorsque f est une fonction paire ou une fonction impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}^+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire, par symétrie par rapport à l'origine si f est impaire.

1.2. Éléments de symétrie

Axe de symétrie

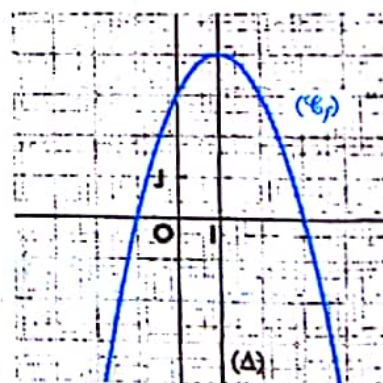
Le repère (O, I, J) est orthogonal.

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

On se propose de démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

- Vérifier que, pour tout nombre réel h , on a : $f(1-h) = f(1+h)$.
Donc les points M et M' , d'abscisses respectives $1-h$ et $1+h$, ont la même ordonnée.

- Conclure.



M

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

Pour démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, on peut vérifier que, pour tout nombre réel h tel que $a+h \in D_f$, on a : $a-h \in D_f$ et $f(a-h) = f(a+h)$.

Centre de symétrie

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}.$$

On se propose de démontrer que le point $\Omega(-1; 2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

• Vérifier que, pour tout nombre réel h , on a :

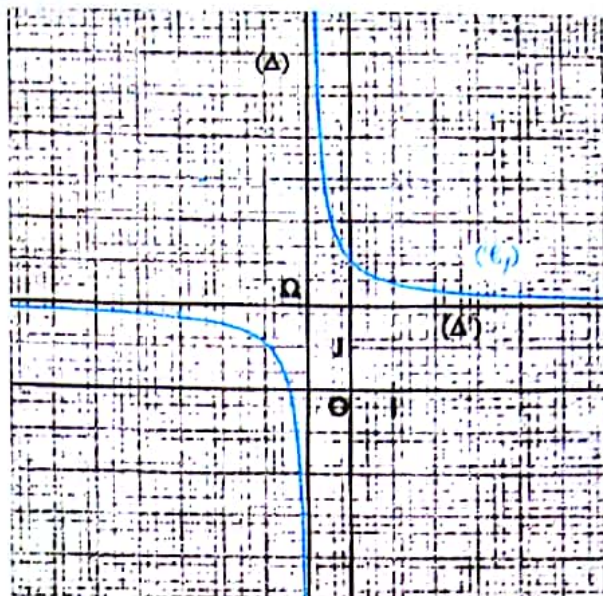
$-1+h \in D_f$ équivaut à $-1-h \in D_f$;

$$\frac{f(-1-h) + f(-1+h)}{2} = 2.$$

• On désigne par M et M' les points d'abscisses respectives $-1-h$ et $-1+h$.

Justifier que Ω est le milieu du segment $[MM']$.

• Conclure.



M

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

Pour démontrer que le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, on peut vérifier que,

pour tout nombre réel h tel que $a+h \in D_f$, on a : $a-h \in D_f$ et $\frac{f(a-h) + f(a+h)}{2} = b$.

Exercices

1.a Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = 1 - x^2$ b) $f(x) = x - 1$

c) $f(x) = -\sqrt{x}$ d) $f(x) = x(x^2 - 1)$

e) $f(x) = |x| - 2$ f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$

1.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction f . Démontrer, dans chaque cas, que la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.

a) $f(x) = x^2 - 4x - 1$; $(\Delta) : x = 2$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$; $(\Delta) : x = -1$

c) $f(x) = |x + 2|$; $(\Delta) : x = -2$

d) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; $(\Delta) : x = 1$

1.c Le plan est muni du repère (O, I, J) . $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction f . Démontrer, dans chaque cas, que le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

a) $f(x) = (x+1)^3 + 1$; $\Omega(-1; 1)$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $\Omega(1; 0)$

c) $f(x) = \frac{2x}{1-x}$; $\Omega(1; -2)$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; $\Omega(1; 2)$

1.d La courbe ci-contre est une partie de la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $[-2; 4]$. Compléter $(\mathcal{C})$ dans chacun des cas suivants :

a) la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$;
b) le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.



2

Notions de limite et de continuité

2.1 Limite d'une fonction en l'infini

Limite infinie

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^2$.

Examinons le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

- À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
x^2					

- On constate que x^2 est un grand nombre positif pour de grandes valeurs positives de x .

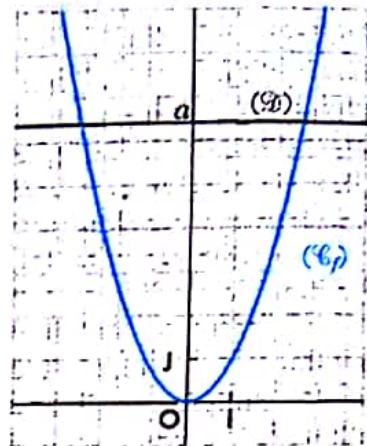
On dit que : « x^2 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ».

On dit aussi que : « la limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^2$ est $+\infty$ ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Interprétation graphique

Quel que soit le nombre a que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sont situés au-dessus de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient assez grandes.



Remarque

De même, on a : « x^2 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ »

ou : « la limite en $-\infty$ de $x \mapsto x^2$ est $+\infty$ ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Limite finie

La courbe $(\mathcal{C}_g)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{x}$.

Examinons le comportement de $g(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

- À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

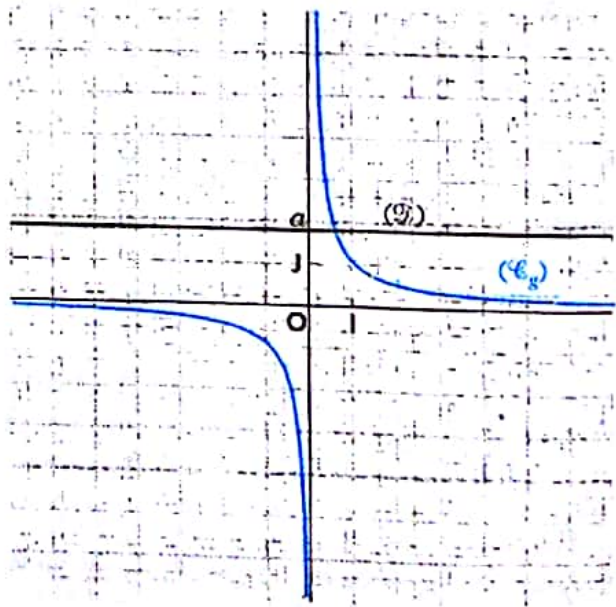
x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$\frac{1}{x}$					

- On constate que $\frac{1}{x}$ est très voisin de 0 pour de grandes valeurs positives de x .

On dit que : « $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ».

On dit aussi que : « la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 0 ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.



Interprétation graphique

Quel que soit le nombre a très proche de zéro que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sont situés entre la droite (OI) et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient assez grandes.

Remarque

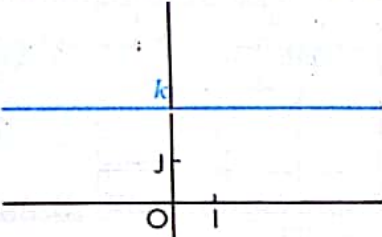
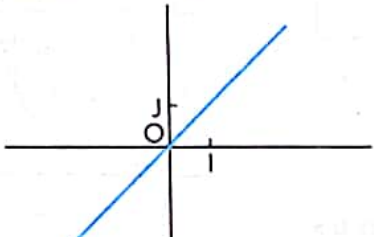
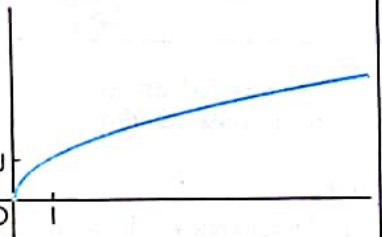
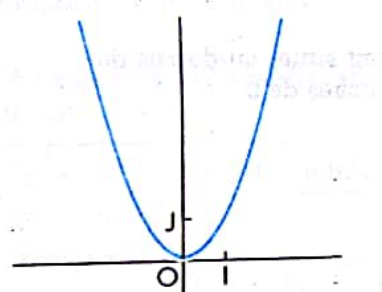
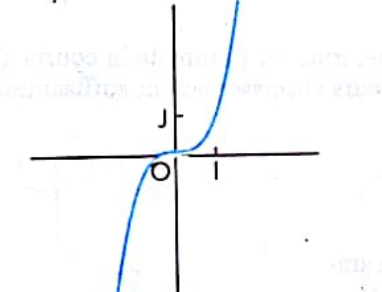
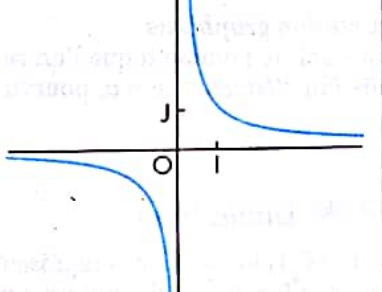
De même, on a : « $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ ».

ou : « la limite en $-\infty$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 0 ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Limites en l'infini de fonctions élémentaires

Nous admettons les résultats suivants.

		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k ; \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Lorsqu'une fonction admet une limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$), cette limite est unique.

2.2. Limite d'une fonction en un nombre x_0

Limite infinie

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

Examinons le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

- À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01
$\frac{1}{x^2}$					

- On constate que $f(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de 0.

On dit que :

« $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 ».

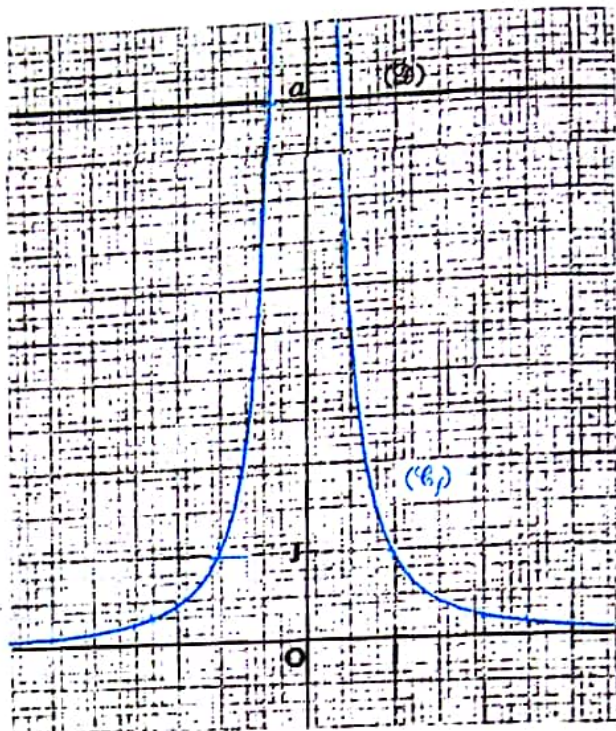
On dit aussi que :

« la limite en 0 de f est $+\infty$ ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique

Quel que soit le nombre a que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sont situés au-dessus de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient suffisamment proches de 0.



Limite finie

La courbe $(\mathcal{C}_g)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.

- À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

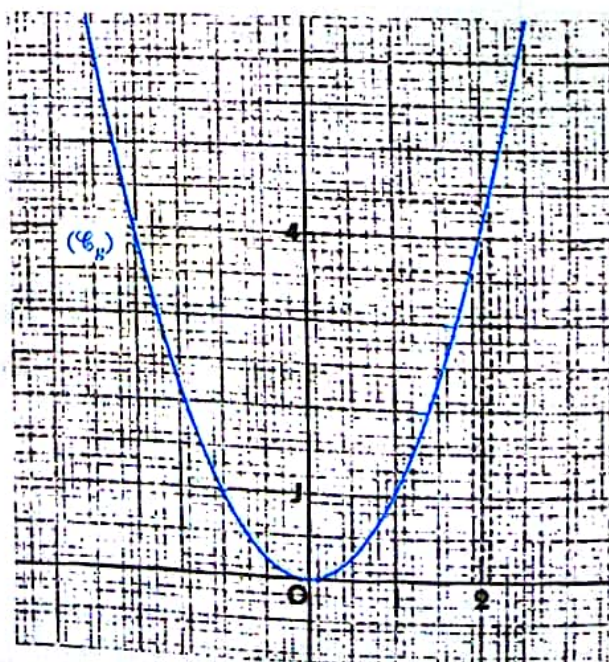
x	1,99	1,999	2	2,001	2,01
x^2					

- On constate que $g(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de 4 lorsque x se rapproche de 2.

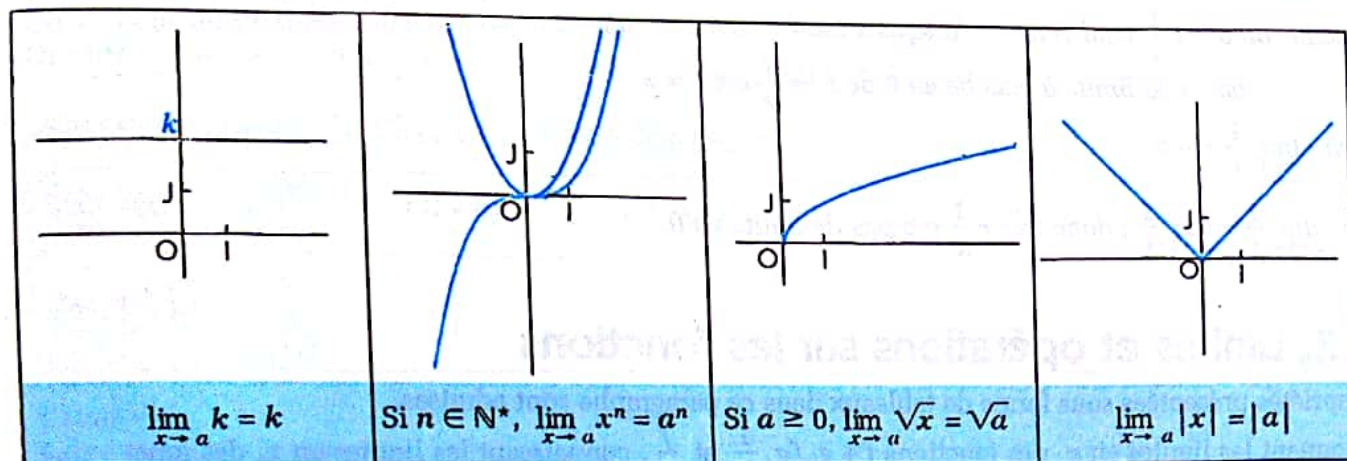
On dit que : « $g(x)$ tend vers 4 lorsque x tend vers 2 ».

On dit aussi que : « la limite en 2 de g est 4 ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$.



Plus généralement, nous admettons les résultats suivants.



Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Lorsqu'une fonction admet une limite en x_0 , cette limite est unique.

Limites à droite, limite à gauche

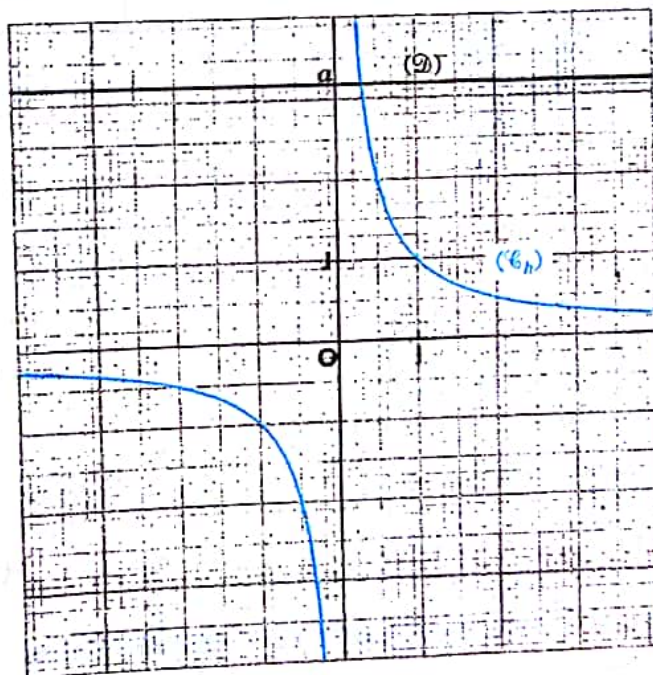
La courbe $(\mathcal{C}_h)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{x}$.

Examinons le comportement de $h(x)$ lorsque x se rapproche de zéro, en lui restant supérieur.

- À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	0	0,0001	0,001	0,01	0,1
$\frac{1}{x}$					

- On constate que $\frac{1}{x}$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de zéro par valeurs positives.



On dit que : « $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives ».

On dit aussi que : « la limite à droite en 0 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $+\infty$ ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Interprétation graphique

Quel que soit le nombre a que l'on se donne, tous les points de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ sont situés au-dessus de la droite (D) d'équation $y = a$, pourvu que leurs abscisses soient proches de zéro et positives.

Remarques

- De même, on a : « $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives »
ou : « la limite à gauche en 0 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $-\infty$ ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

- On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$; donc : $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

2.3. Limites et opérations sur les fonctions

Les propriétés présentées sous forme de tableaux dans ce paragraphe sont admises.

Elles donnent les limites en x_0 des fonctions $f + g$, fg , $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g .

Elles restent vraies pour les limites de ces fonctions en $+\infty$, en $-\infty$ et en x_0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures.

Dans certains cas, on ne peut conclure directement ; ces cas sont signalés par le symbole $?$.

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$?$

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + x$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$ et $\lim_{x \rightarrow -2} x = -2$; donc : $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4 - 2 = 2$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; on ne peut conclure directement.

- Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Limite du produit de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$l' (l' \neq 0)$	$l' (l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$	ll'	$\begin{cases} +\infty, \text{ si } l' > 0 \\ -\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty, \text{ si } l' > 0 \\ +\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$?$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

On en déduit que : si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, alors pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow x_0} f^n(x) = l^n$.

Exemple

Reprenons la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + x$.

On a : pour tout nombre réel x , $f(x) = x(x + 1)$.

Or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l \ (l \neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Exemples

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ et : $\begin{cases} x-1 < 0, & \text{si } x < 1 \\ x-1 > 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; donc : f n'a pas de limite en 1.

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Limite du quotient de deux fonctions

M

Pour calculer la limite en x_0 de $\frac{f}{g}$, il suffit de remarquer que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-2}{x^2-1}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-1) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^2-1} = 0$.

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+3) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

On ne peut conclure directement.

Or : pour tout nombre réel $x \neq -1$, $g(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.

• Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-9) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

On ne peut conclure directement.

Or : pour tout nombre réel $x \neq 3$, $h(x) = x+3$. Donc : $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 6$.

M

Pour déterminer la limite en x_0 d'une fonction du type $\frac{f}{g}$ telle que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, on peut parfois mettre $(x-x_0)$ en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier.

Limite de $x \mapsto u(ax + b)$

Nous admettons la propriété suivante, parfois appelée « théorème de changement de variable ».

Propriété

Soit u une fonction, x_0 un nombre réel et $x \mapsto ax + b$ une fonction affine non constante. La fonction $x \mapsto u(ax + b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si u admet une limite en $ax_0 + b$.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} u(ax + b) = \lim_{t \rightarrow ax_0 + b} u(t)$.

Exemples

• Pour calculer $\lim_{x \rightarrow -2} (-2x + 3)^5$, on pose : $t = -2x + 3$ et $u(t) = t^5$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -2} (-2x + 3) = -4 + 3 = -1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow -2} (-2x + 3)^5 = \lim_{t \rightarrow -1} t^5 = (-1)^5 = -1$.

• Pour calculer $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1}$, on pose : $t = x-1$ et $u(t) = \sqrt{t}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 5} (x-1) = 5-1 = 4$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = \lim_{t \rightarrow 4} \sqrt{t} = \sqrt{4} = 2$.

Limite en l'infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Le tableau suivant découle des propriétés relatives aux limites du produit de deux fonctions.

	$a > 0$	$a < 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^2$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^2$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^3$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^3$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x}$	0	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x}$	0	0

Exemples

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2) = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2}{x}\right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2}{x}\right) = 0$.

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriétés

À l'infini, un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

À l'infini, une fraction rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$

; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

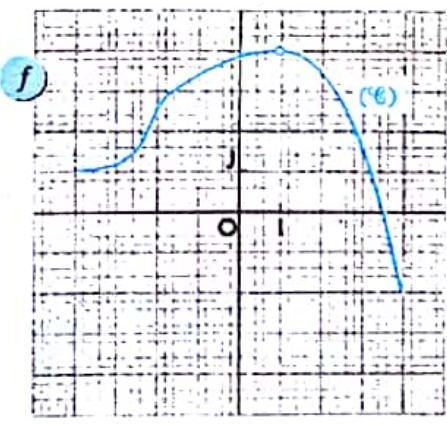
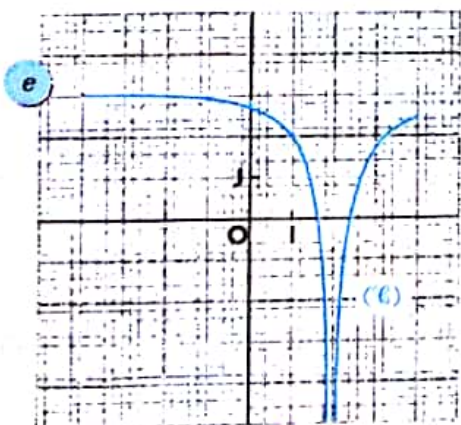
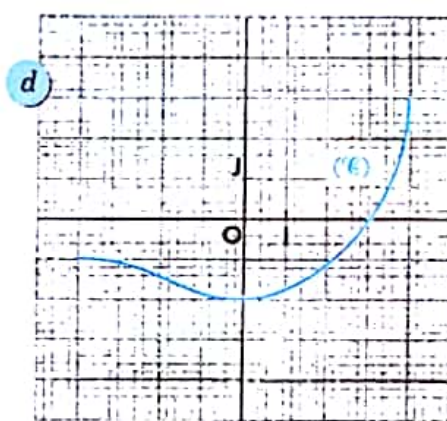
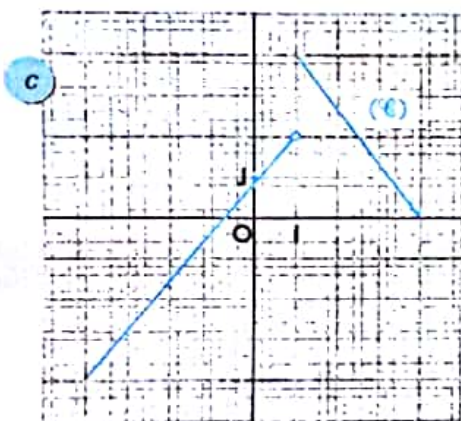
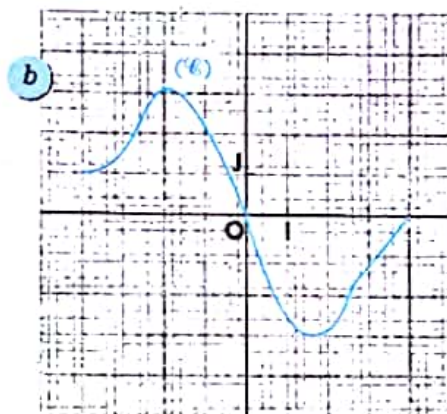
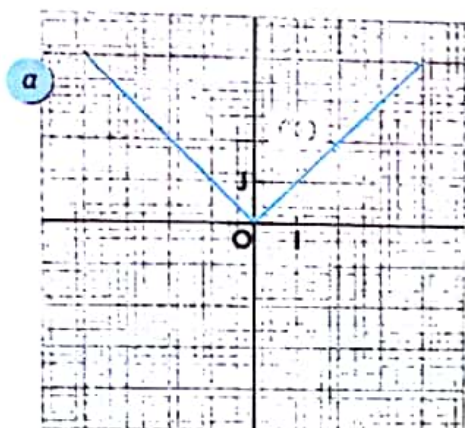
$$; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2.4. Notion de continuité

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est représentée sur l'intervalle $[-4; 4]$ par la courbe $(\mathcal{C})$.



• Indiquer dans quel(s) cas la courbe $(\mathcal{C})$ peut être tracée sans lever le crayon.

On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-4; 4]$.

• Lorsque la fonction f n'est pas continue, préciser l'abscisse x_0 d'un point où le crayon est levé.

On dit que la fonction f est discontinue en x_0 .

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto 2x - 3$; $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

Exercices

2.a Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1}$

2.b Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1}$

2.c Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-5}{x^2}$

2.d Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x + 1)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{x^2 - 2x + 1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{x^2 - 2x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2x - 3}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

2.e Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{2002}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{-2x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)^{10}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

3 Dérivation

3.1. Calculs de dérivées

Dérivées de fonctions élémentaires

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation des fonctions élémentaires.

$f(x)$	f est définie sur	f est dérivable sur	$f'(x)$
k ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

L'ensemble des nombres réels où une fonction est dérivable est l'ensemble de dérivabilité de cette fonction.

Dérivées et opérations sur les fonctions

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables.

Fonction	$f + g$	kf ($k \in \mathbb{R}$)	fg	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
Dérivée	$f' + g'$	kf'	$f'g + fg'$	$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

Exemple

Déterminer, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$;

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$;

donc, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x - \frac{1}{x^2}$.

Dérivée de la fonction $x \mapsto u(ax + b)$

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit $x \mapsto ax + b$ une fonction affine telle que l'ensemble des images de l'intervalle ouvert D est l'intervalle K et u une fonction dérivable sur K .

La fonction $x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur D et sa dérivée est la fonction $x \mapsto au'(ax + b)$.

Exemples

• Déterminer, sur $\mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1 - 2x)^3$.

On pose : $u(x) = x^3$, $a = -2$ et $b = 1$; on a : $f(x) = u(ax + b)$ et $u'(x) = 3x^2$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -6(1 - 2x)^2$.

• Déterminer, sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{4x - 2}$.

On pose : $u(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $b = -2$; on a : $g(x) = u(ax + b)$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

La fonction g est dérivable sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ et sa dérivée est $g' : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{4x - 2}}$.

3.2. Applications de la dérivation

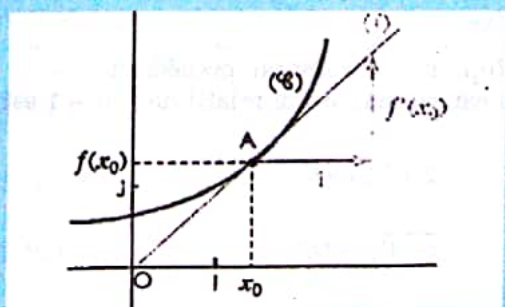
Nous rappelons les résultats suivants vus en classe de première.

Dérivée et tangente

Propriété

Soit f une fonction, $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique et A un point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse x_0 .

Lorsque f est dérivable en x_0 , une équation de la tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$ est : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Exemple

Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -x^3 + x - 2$.
Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse 1.

On a : $f(1) = -2$, donc le point A a pour coordonnées $(1; -2)$;
 $f'(x) = -3x^2 + 1$, $f'(1) = -3 + 1 = -2$.

Une équation de (T) est : $y + 2 = -2(x - 1)$; c'est-à-dire : $y = -2x$.

Dérivée et sens de variation

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

- Si f' est positive sur K , alors f est croissante sur K .
- Si f' est négative sur K , alors f est décroissante sur K .
- Si f' est nulle sur K , alors f est constante sur K .

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$.

f est une fonction polynôme ;

elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -3(x-3)(x-1)$.

On a : pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) < 0$;
pour tout $x \in]1; 3[$, $f'(x) > 0$;
pour tout $x \in]3; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

Donc : f est décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]3; +\infty[$;
 f est croissante sur $]1; 3[$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f , que l'on complète en calculant :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $f(1) = -1$ et $f(3) = 3$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

Dérivée et extremum

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$ et x_0 un élément de $]a; b[$.

Si f' s'annule et change de signe en x_0 , alors f admet un extremum relatif en x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		M	

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		m	

f admet un minimum relatif m en x_0

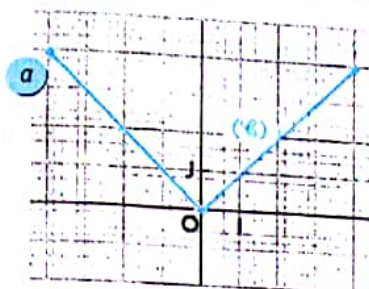
Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

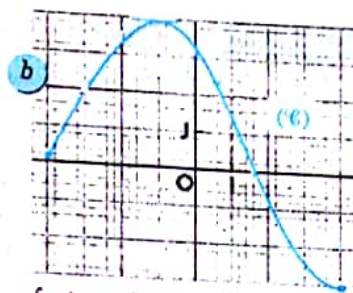
3 est un maximum relatif de f et -1 est un minimum relatif de f .

3.3. Dérivation et continuité

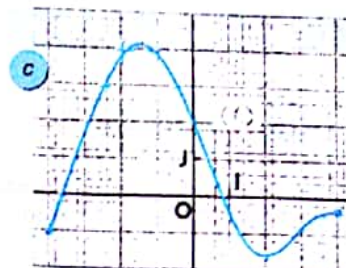
1. Compléter par oui ou par non.



f est continue sur $[-4; 4]$ ☐
 f est dérivable sur $[-4; 4]$ ☐



f est continue sur $[-4; 4]$ ☐
 f est dérivable sur $[-4; 4]$ ☐



f est continue sur $[-4; 4]$ ☐
 f est dérivable sur $[-4; 4]$ ☐

2. a) Lorsque la fonction f n'est pas continue sur $[-4; 4]$, indiquer le(s) point(s) de discontinuité de f .
 b) Préciser si (C) admet une tangente au(x) point(s) de discontinuité de f .

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Si une fonction est dérivable sur un intervalle K , alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarques

- La propriété précédente peut également s'énoncer ainsi :
 « Si une fonction f n'est pas continue sur un intervalle K , alors elle n'est pas dérivable sur K . »
- Lorsque la fonction f est continue sur l'intervalle K , on ne peut conclure pour sa dérivabilité sur K .

Exercices

- 3.a Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa dérivée.

a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = -2x + 5$
 c) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
 e) $f(x) = 3x(x^2 - 1)$ f) $f(x) = (3 - x)x^2$

- 3.b Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa dérivée.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{-2x+5}{x}$
 c) $f(x) = x^2 + \frac{x+1}{x}$ d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
 e) $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$
 f) $f(x) = x^2 + \frac{x+1}{x}$

- 3.c Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ b) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

- 3.d Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse x_0 .

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 2$

d) $f(x) = x^2 - \frac{x+1}{x}$; $x_0 = -1$

- 3.e Dans chacun des cas suivants :
 • préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ;
 • déterminer la dérivée de f et étudier son signe ;
 • dresser le tableau de variation de f .

a) $f(x) = -x + 5$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

c) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ d) $f(x) = x^3 + 3x^2$

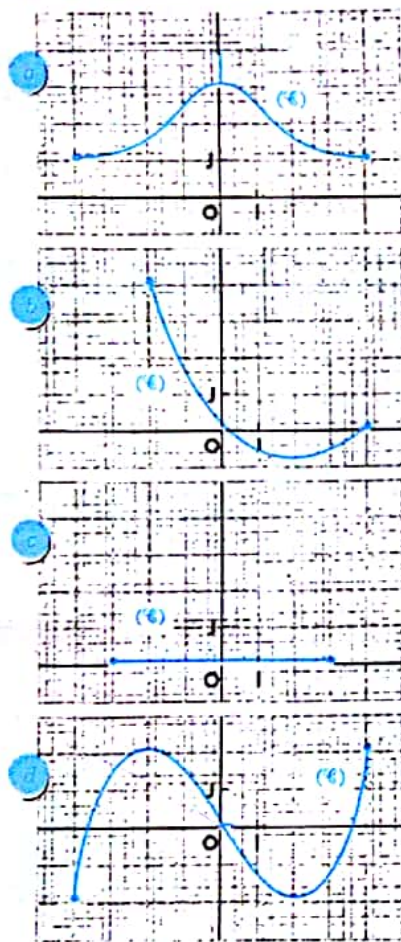
e) $f(x) = x + \frac{x-1}{x}$ f) $f(x) = \sqrt{1-x}$

Exercices

APPRENTISSAGE

Généralités

1 Dans chacun des cas suivants, (C) est la représentation graphique d'une fonction f .



1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Préciser la parité de f .

2 La courbe ci-dessous est une partie de la représentation graphique (C) d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $[-5; 5]$.



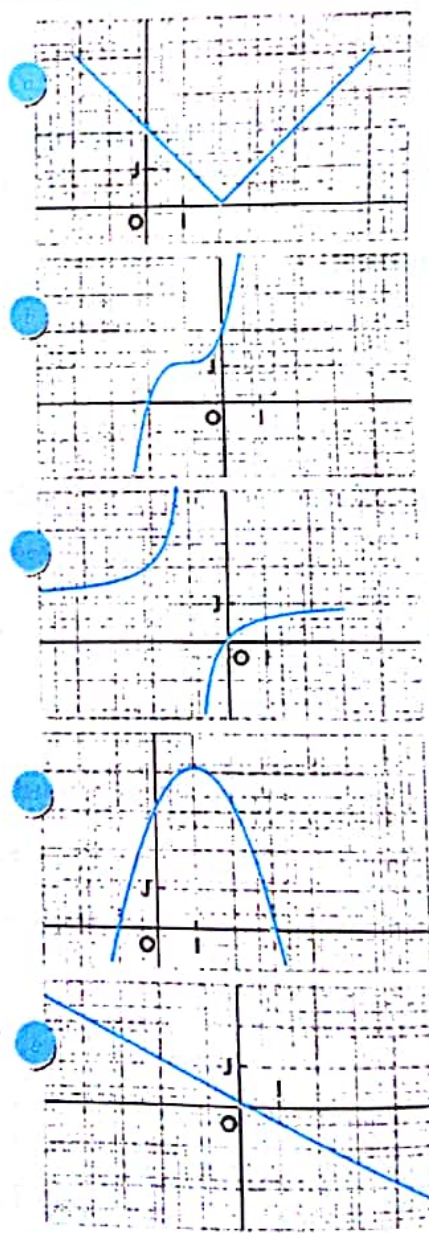
Compléter (C) dans chacun des cas suivants.

- a) f est une fonction paire
- b) f est une fonction impaire.

3 Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

- a) $f(x) = 2x + 5$
- b) $f(x) = x^2 - 3$
- c) $f(x) = x^3 - 6x$
- d) $f(x) = x - \sqrt{x}$
- e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$
- f) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

4 Chacune des courbes suivantes a soit un axe de symétrie, soit un centre de symétrie. Préciser, dans chaque cas, l'élément de symétrie.



5 (C) est l'axe de symétrie de la fonction f .

- a) $f(x) = x^2 + 1$
- b) $f(x) = x^3 - 1$
- c) $f(x) = x^2 - 1$
- d) $f(x) = x^3 + 1$

6 (C) est l'axe de symétrie de la fonction f .

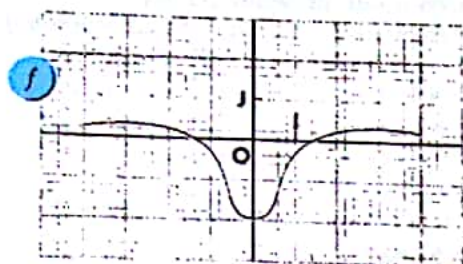
- a) $f(x) = x^2 + 1$
- b) $f(x) = x^3 - 1$
- c) $f(x) = x^2 - 1$
- d) $f(x) = x^3 + 1$

7 f est une fonction définie sur $[-4; 2]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Donner l'ensemble de définition de f .

8 f est une fonction définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Quelles sont les limites de f en -1 et en 3 ?

9 de la fonction f définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Quelles sont les limites de f en -1 et en 3 ?

10 limites de f en -1 et en 3 . Quelles sont les limites de f en -1 et en 3 ?



5 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction f . Démontrer, dans chaque cas, que la droite $(\mathcal{D})$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$; $(\mathcal{D}) : x = -2$
 b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; $(\mathcal{D}) : x = 1$
 c) $f(x) = |x - 3|$; $(\mathcal{D}) : x = 3$
 d) $f(x) = \left| \frac{2}{x+1} \right|$; $(\mathcal{D}) : x = -1$.

6 Le plan est muni du repère (O, I, J) . $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction f . Démontrer, dans chaque cas, que le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

- a) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$; $\Omega(-1; 3)$
 b) $f(x) = (x-1)^3 + 1$; $\Omega(1; 1)$
 c) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$; $\Omega(-2; -4)$
 d) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}$; $\Omega(1; 0)$.

7 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . f est une fonction ayant pour ensemble de définition $[-4; 2]$ et pour représentation graphique $(\mathcal{C})$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet un axe de symétrie $(\mathcal{D})$ parallèle à la droite (OJ) .

Donner une équation de $(\mathcal{D})$.

8 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . f est une fonction ayant pour ensemble de définition $[-1; 3]$ et pour représentation graphique $(\mathcal{C})$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie Ω appartenant à la droite d'équation $y = -2$.

Quelles sont les coordonnées du point Ω ?

Notions de limite et de continuité

9 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- a) $f(x) = -2x + 4$ b) $f(x) = 3x - 2$
 c) $f(x) = 2x^2 - x - 3$ d) $f(x) = -x^2 + x + 6$
 e) $f(x) = -x^3 + 2x + 5$ f) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$.

10 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

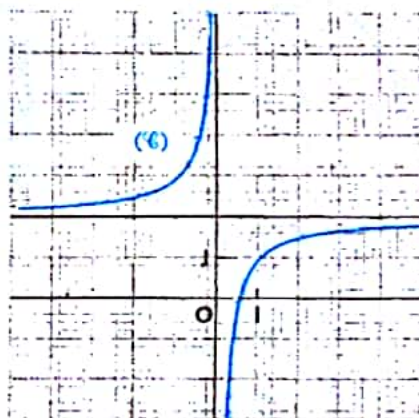
- a) $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{-4x+5}{2x+1}$
 c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$ d) $f(x) = \frac{-3x^2}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{x^2+1}{4x^2-3}$ f) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-8}$.

11 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en x_0 .

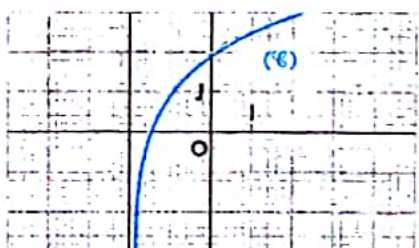
- a) $f(x) = x^3 - 4x + 1$; $x_0 = 1$
 b) $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$; $x_0 = 0$
 c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$; $x_0 = -1$
 d) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$; $x_0 = 2$
 e) $f(x) = \frac{-3}{x^2}$; $x_0 = 0$
 f) $f(x) = \frac{x+5}{(x+3)^2}$; $x_0 = -3$.

12 $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique d'une fonction f .



Conjecturer la limite de f en $-\infty$, en $+\infty$, en 0 par valeurs positives, en 0 par valeurs négatives.

13 $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique d'une fonction f .



Conjecturer la limite de f en $+\infty$, en $-\infty$, en -2 par valeurs supérieures à -2.

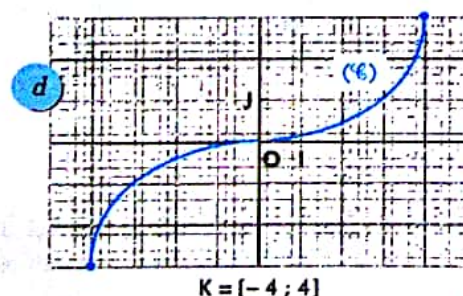
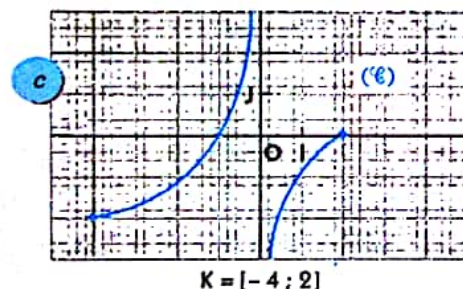
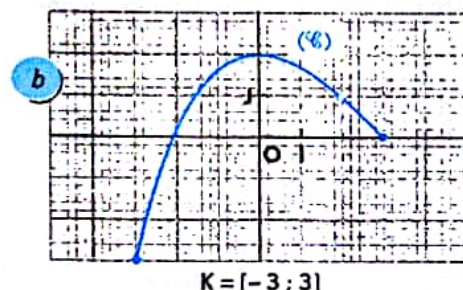
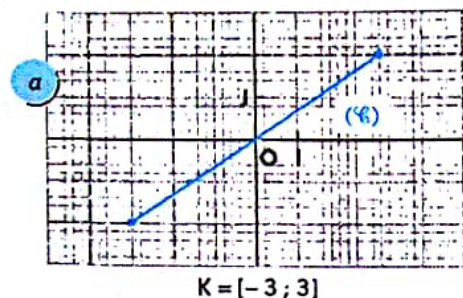
14 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f à droite et à gauche en x_0 .

- a) $f(x) = \frac{-3x}{x+1}$; $x_0 = -1$
 b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$; $x_0 = 0$
 c) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$; $x_0 = 2$
 d) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-1}$; $x_0 = 1$.

15 En utilisant les propriétés des opérations sur les limites, calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3 + \frac{4}{x})$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} (\frac{1}{x} - 3)^2$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{4}{x} - x^2)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$.

16 (C) est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle K .



- a) Dans chaque cas, conjecturer la continuité de f sur K .
 b) Préciser les points de discontinuité, lorsqu'ils existent.

17 Le plan est muni du repère (O, I, J) . Construire la représentation graphique d'une fonction croissante et continue sur l'intervalle $[-5; 5]$.

18 Le plan est muni du repère (O, I, J) . Construire la représentation graphique d'une fonction décroissante et continue sur l'intervalle $]3; +\infty[$.

19 Le plan est muni du repère (O, I, J) . Construire la représentation graphique d'une fonction f telle que :

- f est continue sur $[-4; -1[$;
- f est discontinue en -1 ;
- f est continue sur $] -1; 5]$.

Dérivation

20 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = -x^2 + 4x + 7$ b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
 c) $f(x) = -4x^3 + 12x$ d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$
 e) $f(x) = x^2(1 - x)$ f) $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 4)$.

21 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa fonction dérivée.

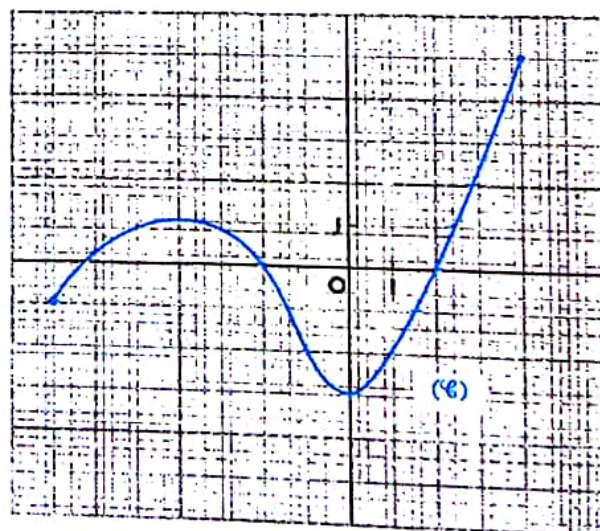
a) $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$
 c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$ d) $f(x) = \frac{3x^2-x}{x+4}$
 e) $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ f) $f(x) = 2x + 5 + \frac{9}{x-2}$.

22 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = (2x - 1)^3$ b) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$.

23 La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition l'intervalle $[-7; 4]$.

On suppose que f est dérivable sur $] -7; 4[$.



- Déterminer le signe de la dérivée f' de f sur chacun des intervalles $] -7; -4[$, $] -4; -1[$ et $] -1; 4[$.
- Compléter le tableau de variation de f .

x	-7	-4	0	4
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$				

24 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K , étudier son signe, puis dresser le tableau de variation de la fonction f .

- a) $f(x) = x^2 - 4x$ et $K =]-2; 6[$
 b) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ et $K =]-1; 4[$
 c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ et $K =]-1; 3[$
 d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ et $K = [0; +\infty[$.

25 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K , étudier son signe, puis dresser le tableau de variation de la fonction f .

- a) $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$ et $K =]-\infty; \frac{3}{2}[$
 b) $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ et $K =]-2; +\infty[$
 c) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$ et $K =]-1; +\infty[$
 d) $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x}$ et $K =]-\infty; 0[$.

APPROFONDISSEMENT

26 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . Construire la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction f ayant pour ensemble de définition D_f et telle que la droite $(\mathcal{D})$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.

- a) $D_f = \mathbb{R}$; $(\mathcal{D}) : x = -2$
 b) $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$; $(\mathcal{D}) : x = 1$.

27 Le plan est muni du repère (O, I, J) . Construire la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction f ayant pour ensemble de définition D_f et telle que le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

- a) $D_f = \mathbb{R}$; $\Omega(-2; 1)$
 b) $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$; $\Omega(0; -1)$.

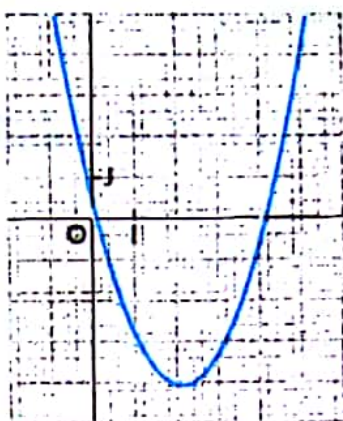
28 Le plan est muni du repère (O, I, J) . Construire la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction f telle que :

- a) • $D_f = \mathbb{R}$;
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
 b) • $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$;
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$;
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

29 Soit f une fonction dont la dérivée f' est définie par : $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction g .

- a) $g(x) = f(-3x)$ b) $g(x) = f(2x)$
 c) $g(x) = f(\frac{1}{2}x - 1)$ d) $g(x) = f(-x + 4)$.

30 Le plan est muni du repère (O, I, J) . La parabole ci-dessous est la représentation graphique sur $\mathbb{R}$ de la fonction dérivée f' d'une fonction f .



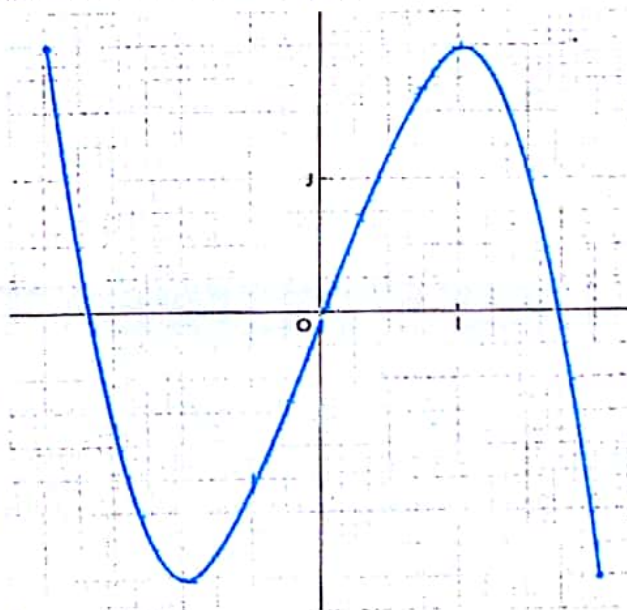
- Déterminer le signe de f' sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$, $]0; 4[$ et $]4; +\infty[$.
- Compléter le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

- Donner l'allure de la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f sachant que :

- $f(0) = 4$;
 - $f(4) = -\frac{20}{3}$;
 - $f(-4) = f(2) = f(7) = 0$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 0$.

31 La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition l'intervalle $[-2; 2]$.



On suppose que f est dérivable sur $]-2; 2[$.

1. Déterminer le signe de la dérivée f' de f sur chacun des intervalles $]-2; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; 2[$.

2. Compléter le tableau de variation de f .

x	-2	-1	1	2
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$				

3. On suppose que, pour tout nombre réel x de $[-2; 2]$, $f(x) = ax^3 + bx$, où a et b sont deux nombres réels.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[-2; 2]$.

b) Calculer les valeurs de f et f' en -1 et 1 .

c) Déterminer les nombres réels a et b .

32 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1. Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = 1$.

2. a) Déterminer l'image de $(\mathcal{C})$ par s .

b) En déduire que $(\mathcal{C})$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.

33 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 4x - 1$.

1. Déterminer l'expression analytique de la symétrie centrale s par rapport au point $\Omega(0; -1)$.

2. a) Déterminer l'image de $(\mathcal{C})$ par s .

b) En déduire que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

34 La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f .



1. Par lecture graphique, donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

2. Conjecturer la parité de f .

3. a) Conjecturer les limites de f aux bornes de D_f .

b) Compléter le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$					