2

Représentations graphiques de fonctions

Introduction

« **U**n bon dessin n'est pas une ligne dure, cruelle, despotique, immobile, enfermant une figure comme une camisole de force. »
BAUDELAIRE

Eugène Delacroix, Tête de lion, Musée du Louvre.

SOMMAIRE

1 Fonctions élémentaires

1.1. Fonction cube

On se propose d'étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ appelée **fonction cube.**

Égalités remarquables

Propriétés

a et b sont des nombres réels ; on a :

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Variations de la fonction cube

Ensemble de définition

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Sens de variation

Soit a et b deux nombres réels tels que : $a < b$.
On veut comparer a^3 et b^3. On sait que :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$= (a - b)\left[\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2\right].$$

Or : $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0$ et $a - b < 0$; donc : $a^3 < b^3$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^3	↗	-8	0	8	↗

On tracera la représentation graphique sur $[-2 ; 2]$.

Représentation graphique de la fonction cube

Table de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

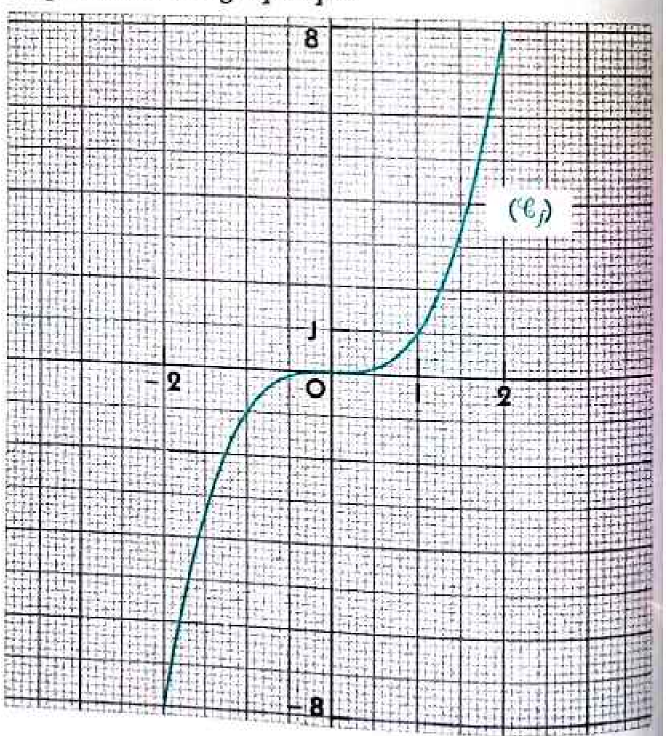
- On admet que la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction cube est une courbe d'un seul morceau et sans partie rectiligne.

- Démontrons que O est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

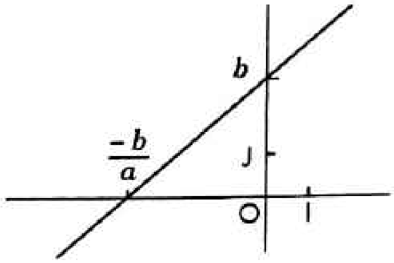
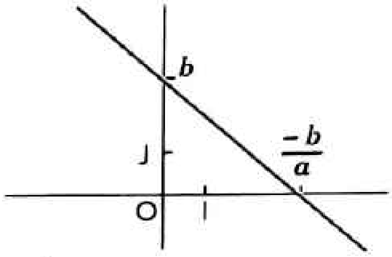
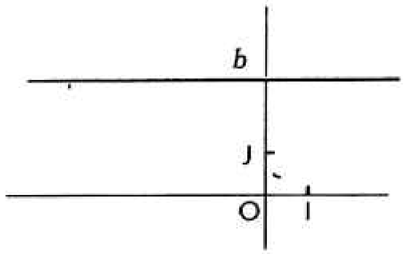
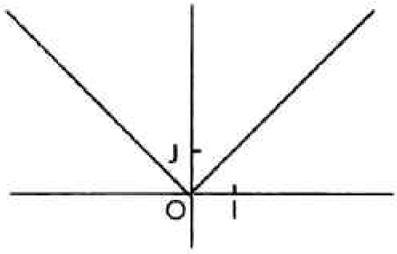
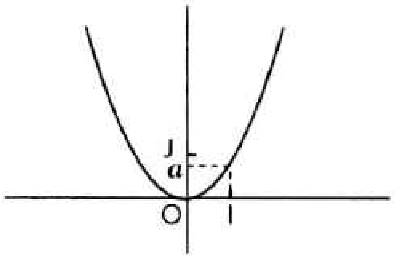
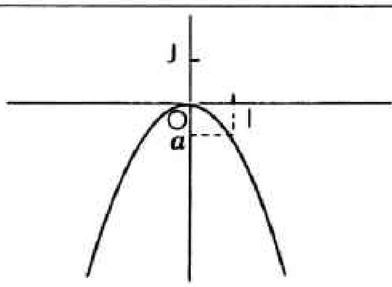
Soit x un nombre réel et $M(x ; x^3)$ le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x. Son symétrique par rapport à O est le point $M'(-x ; -x^3)$.

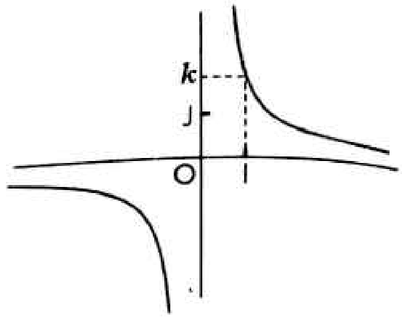
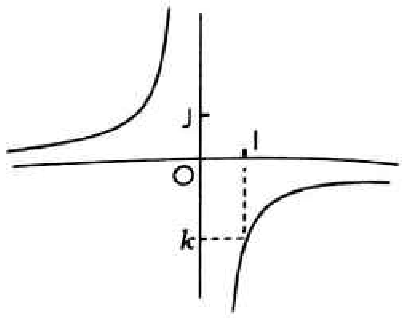
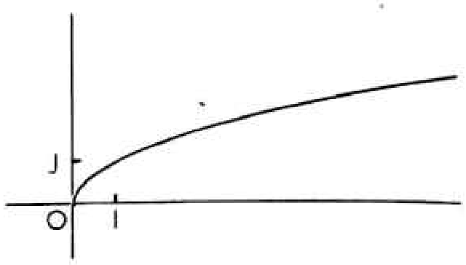
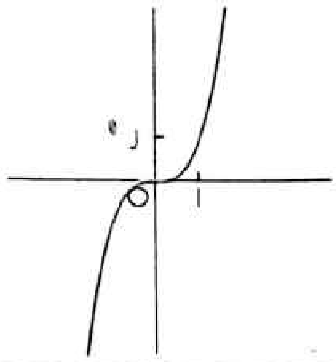
M' est un point de $(\mathscr{C}_f)$ car $-x^3 = (-x)^3$.
Ainsi, tout point M de $(\mathscr{C}_f)$ a pour symétrique par rapport à O un point M' de $(\mathscr{C}_f)$.

Représentation graphique



1.2. Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Tableau de variation</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$f : x \mapsto ax + b$</td><td>$a > 0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">↗</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">↘</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a = 0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">→</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$f : x \mapsto |x|$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f : x \mapsto ax^2$</td><td>$a > 0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>0</td><td>↘</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
</table>

Fonction	Tableau de variation	Représentation graphique
$f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$	$k > 0$ x : $-\infty$ 0 $+\infty$ $f(x)$: $\searrow$ ‖ $\searrow$	
	$k < 0$ x : $-\infty$ 0 $+\infty$ $f(x)$: $\nearrow$ ‖ $\nearrow$	
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	x : 0 $+\infty$ $f(x)$: 0 $\nearrow$	
$f : x \mapsto x^3$	x : $-\infty$ 0 $+\infty$ $f(x)$: $\nearrow$ 0 $\nearrow$	

1.3. Travaux dirigés

1. Quadrature de la parabole

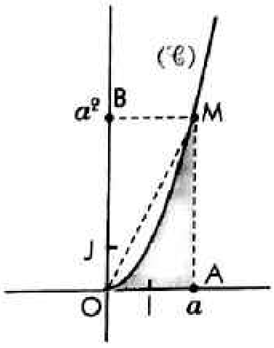
Archimède de Syracuse (287–212 avant Jésus-Christ) laissa à la postérité un immense héritage dans plusieurs domaines des sciences, particulièrement en géométrie, en mécanique et en hydrostatique.
Il démontra, entre autres, la propriété suivante : « L'aire d'un segment de parabole est égale aux $\frac{4}{3}$ de celle du triangle de même base et de même sommet. »

Sur la figure ci-dessous, ($\mathscr{C}$) est la branche de parabole d'équation $\begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, M est le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse a, A est le projeté orthogonal de M sur (OI) et B est le projeté orthogonal de M sur (OJ).

On se propose de calculer, à l'aide de la propriété d'Archimède, l'aire de la surface coloriée.

1. Exprimer, en fonction de a, l'aire $\mathscr{A}$ de la surface comprise entre les courbes $(\mathscr{C})$, (OB) et (BM).

2. En déduire l'aire de la surface coloriée.



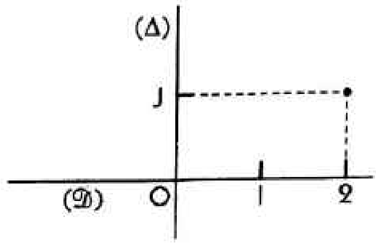
Solution

1. D'après la propriété d'Archimède : $\mathscr{A} = \frac{4}{3}$ aire(OBM) $= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} \times a \times a^2\right) = \frac{2}{3}a^3$.

2. Donc, l'aire de la surface coloriée est : $\mathscr{A}' = a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{a^3}{3}$.

2. Recherche de lieu

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des points du plan dont le produit des distances à deux droites perpendiculaires $(\mathscr{D})$ et (Δ) est égal à 2.



On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que :
$\{O\} = (\mathscr{D}) \cap (\Delta)$, $I \in (\mathscr{D})$ et $J \in (\Delta)$.

1. Démontrer que (E) est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que : $x^2y^2 = 4$.

2. Représenter graphiquement l'ensemble (E).

Solution

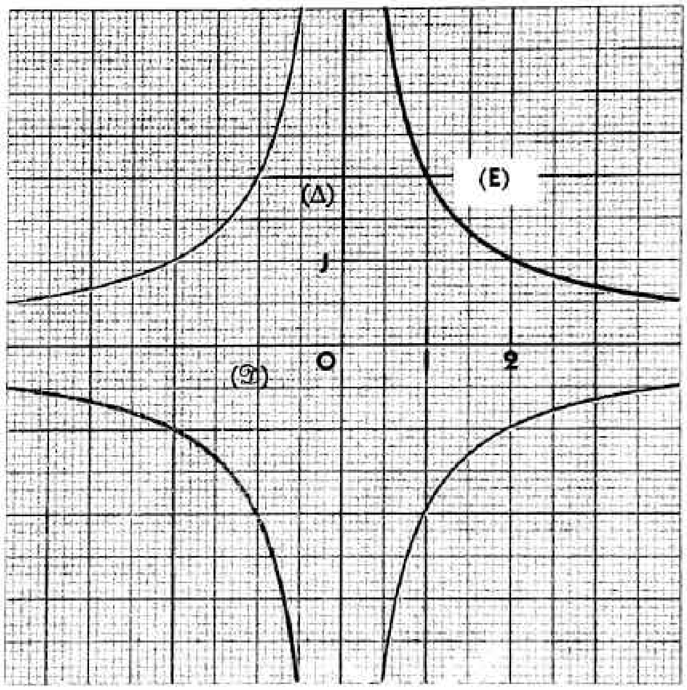
1. Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.
Les projetés orthogonaux de M sur $(\mathscr{D})$ et (Δ) sont respectivement $H(x\,;\,0)$ et $K(0\,;\,y)$.
On a :
$MH^2 = y^2$ et $MK^2 = x^2$.
$M \in (E)$ *équivaut à* $MH^2 \times MK^2 = 4$
$M \in (E)$ *équivaut à* $x^2y^2 = 4$.

2. On a :
$x^2y^2 = 4$ *équivaut à* $y = \frac{2}{x}$ ou $y = -\frac{2}{x}$.

Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$.

L'hyperbole $(\mathscr{H}')$ d'équation $y = -\frac{2}{x}$ est le symétrique de $(\mathscr{H})$ par rapport à (OI).

On a : $(E) = (\mathscr{H}) \cup (\mathscr{H}')$.



Exercices

1.a Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = -2x^2.$$
1. Étudier les variations de f.
2. Construire la représentation graphique de f.

1.b Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{x^2}{3}.$$
1. Étudier les variations de f.
2. Construire la représentation graphique de f.

1.c Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{3}{x}.$$
1. Étudier les variations de f.
2. Construire la représentation graphique de f.

1.d Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = -\frac{1}{2x}.$$
1. Étudier les variations de f.
2. Construire la représentation graphique de f.

2 Fonctions et transformations du plan

2.1. Transformations usuelles

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Soit les points $M(x\,;\,y)$, $M'(x'\,;\,y')$ et le vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$;

$S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI) ;

$S_{(OJ)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OJ) ;

S_O la symétrie de centre O ;

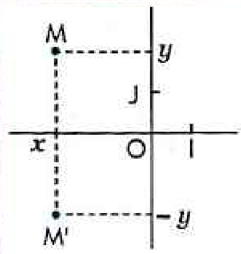
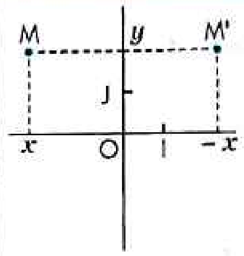
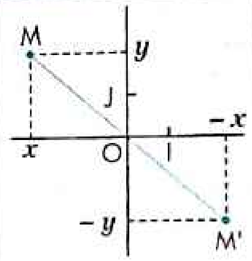
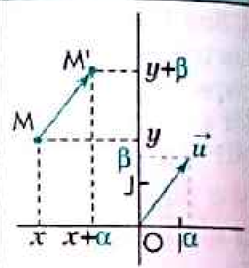
$t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

On a : $M' = S_O(M)$ *équivaut à* $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Donc : $x' = -x$ et $y' = -y$.

On dit que le système $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ est une **expression analytique** de la symétrie de centre O.

Le tableau ci-dessous résume les caractérisations des transformations usuelles et leurs expressions analytiques que nous admettons.

	$S_{(OI)}$	$S_{(OJ)}$	S_O	$t_{\vec{u}}$
Image d'un point				
Caractérisation	• Si M ∈ (OI), M' = M • Si M ∉ (OI), (OI) = méd [MM']	• Si M ∈ (OJ), M' = M • Si M ∉ (OJ), (OJ) = méd [MM']	$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
Expression analytique	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$

Exemple

Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $2x - 3y = 4$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(2\,;\,-1)$.

Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

L'expression analytique de $t_{\vec{u}}$ est : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$; donc : $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$.

Une équation de $(\mathscr{D}')$ est donc : $2(x' - 2) - 3(y' + 1) = 4$; c'est-à-dire : $2x' - 3y' = 11$.

M

Soit $(\mathscr{C})$ une courbe et f une transformation dont on connaît respectivement une équation et une expression analytique.

Pour déterminer une équation de l'image de $(\mathscr{C})$ par f, on peut :

- à partir de l'expression analytique de f, exprimer x et y en fonction de x' et y' ;
- remplacer x et y par leurs expressions dans l'équation de $(\mathscr{C})$.

2.2. Fonctions et transformations usuelles

Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -f(x)$

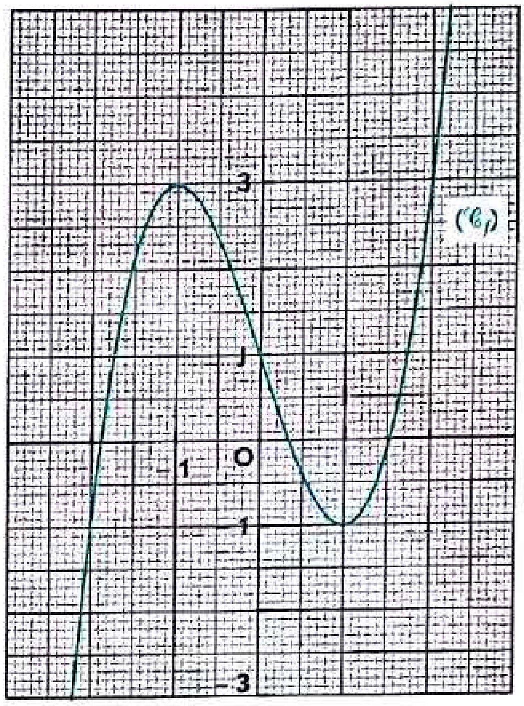
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = -f(x)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa représentation graphique.

- Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
- En utilisant le graphique et la définition de la fonction g, compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$g(x)$					

- Construire, point par point, la courbe $(\mathscr{C}_g)$.



Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

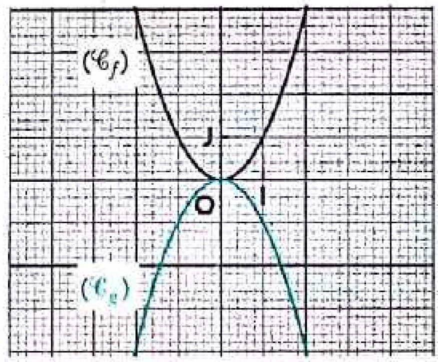
Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Soit f une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.
La représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -f(x)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (OI).

Remarque

La fonction $g : x \mapsto -f(x)$ est appelée opposée de f.
On note : $g = -f$.

Exemple

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Construire la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = -x^2$.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$.
$(\mathscr{C}_g)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (OI).



Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

On se propose de construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto \left|\frac{1}{x}\right|$.

- Construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
- En déduire la représentation graphique $(\mathscr{C}_{-f})$ de la fonction $-f$.
- Justifier que $(\mathscr{C}_g)$ est la réunion des parties de $(\mathscr{C}_f)$ et de $(\mathscr{C}_{-f})$ situées au-dessus de la droite (OI).

M

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Soit f une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.
Pour construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$, on peut procéder de la façon suivante :

- construire $(\mathscr{C}_f)$;
- construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_{-f})$ de la fonction $-f$;
- colorier les parties de $(\mathscr{C}_f)$ et de $(\mathscr{C}_{-f})$ situées au-dessus de la droite (OI).

La partie coloriée est la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de g.

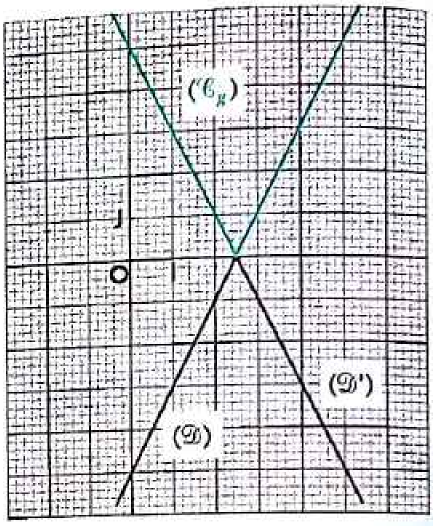
Exemple

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto |2x - 5|$.

On construit les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ d'équations respectives $y = 2x - 5$ et $y = -2x + 5$.

$(\mathscr{C}_g)$ est la réunion des deux demi-droites situées au-dessus de la droite (OI).



Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

On désigne respectivement par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les représentations graphiques des fonctions f et g.

- Vérifier que : pour tout x élément de $[1 ; +\infty[$, $g(x) = f(x-1) + 2$.
- Démontrer que $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{1}{2}$.
- Construire, sur le même graphique, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

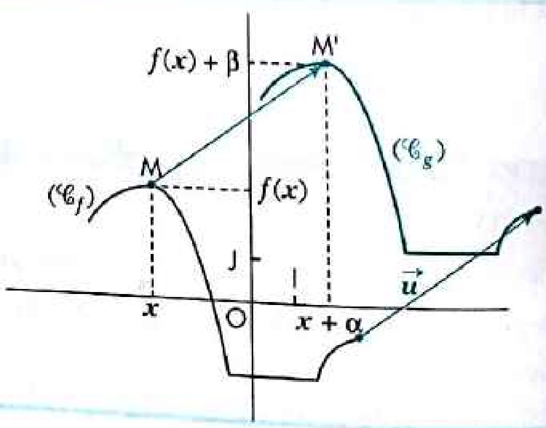
Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit f une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.

La représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.

$(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_f)$, avec $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.



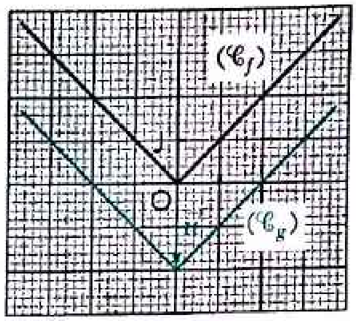
Exemple

Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto |x| - 2$.

On construit la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto |x|$.

On a : pour tout nombre réel x, $g(x) = f(x) - 2$.

Donc : $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{0}{-2}$.



Représentations graphiques de fonctions polynômes du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction du type :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}).$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

- Vérifier que : pour tout nombre réel x, $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$.
- Construire la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation : $y = -2x^2$.
- Déterminer la translation qui transforme $(\mathscr{P})$ en $(\mathscr{C}_f)$.
- Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de $(\mathscr{P})$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

- **Toute fonction polynôme du second degré f peut s'écrire sous la forme :**

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad (a \in \mathbb{R}^*, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}).$$

- **Sa représentation graphique est l'image de la parabole d'équation $y = ax^2$, par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.**

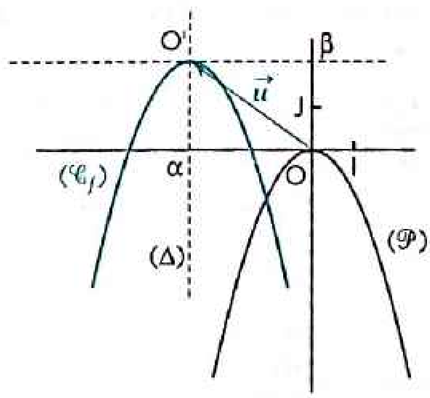
Remarque

Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C}_f)$ les courbes d'équations respectives $y = ax^2$ et $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$(\mathscr{P})$ est une parabole de sommet le point O, d'axe (de symétrie) la droite (OJ).

On a : $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}(\mathscr{P})$, avec $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.

Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une parabole de sommet le point O'$(\alpha\,;\beta)$, d'axe (de symétrie) la droite (Δ) d'équation $x = \alpha$.



On déduit de ces observations une seconde méthode pour construire une parabole.

M

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

Pour construire la parabole $(\mathscr{C}_f)$ d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on peut :

- placer le sommet O'$(\alpha\,;\beta)$ de $(\mathscr{C}_f)$;
- tracer la droite (Δ) d'équation $x = \alpha$;
- construire $(\mathscr{C})$ la branche de la parabole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de (Δ) ;
- compléter $(\mathscr{C}_f)$ en construisant le symétrique $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

Vocabulaire

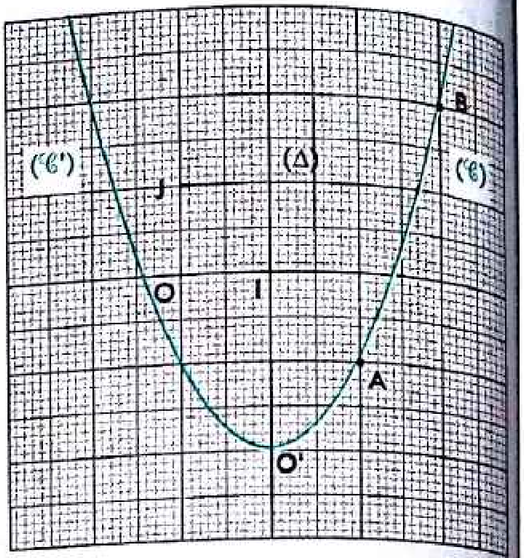
L'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée **équation réduite de la parabole** $(\mathscr{C}_f)$.

Exemple

Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - 1$.

On a : pour tout nombre réel x, $f(x) = (x - 1)^2 - 2$.

Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une parabole de sommet le point $O'(1 ; -2)$, d'axe (de symétrie) la droite (Δ) d'équation $x = 1$.



Construisons $(\mathscr{C})$, la branche de parabole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de (Δ), en plaçant des points d'abscisses supérieures à 1, par exemples $A(2 ; -1)$ et $B(3 ; 2)$.

Complétons $(\mathscr{C}_f)$ en construisant le symétrique $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

Représentations graphiques de fonctions homographiques

On appelle **fonction homographique**, toute fonction du type :

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0).$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x + 5}{x + 1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
- Vérifier que : pour tout x élément de D_f, $f(x) = \frac{3}{x + 1} + 2$.
- Construire l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation : $y = \frac{3}{x}$.
- Déterminer la translation qui transforme $(\mathscr{H})$ en $(\mathscr{C}_f)$.
- Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de $(\mathscr{H})$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

- **Toute fonction homographique f peut s'écrire sous la forme :**

$$f(x) = \frac{k}{x - \alpha} + \beta \quad (k \in \mathbb{R}^*,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}).$$

- **Sa représentation graphique est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{k}{x}$, par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.**

Remarque

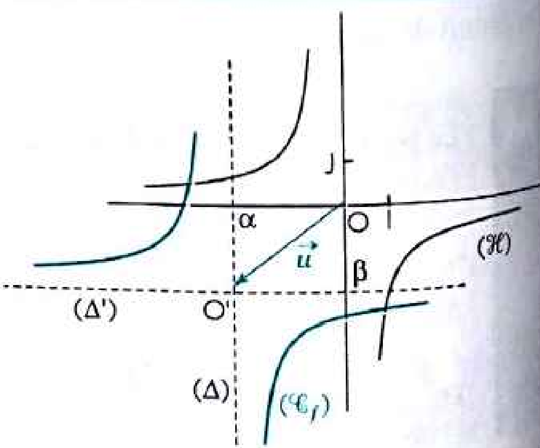
Soit $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{C}_f)$ les courbes d'équations respectives $y = \frac{k}{x}$ et $y = \frac{k}{x - \alpha} + \beta$.

$(\mathscr{H})$ est une hyperbole de centre (de symétrie) O.

On a : $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}(\mathscr{H})$, avec $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.

Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une hyperbole de centre (de symétrie) $O'(\alpha ; \beta)$.

O' est le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = \alpha$ et $y = \beta$.



On déduit de ces observations une seconde méthode pour construire une hyperbole.

M

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Pour construire l'hyperbole $(\mathscr{C}_f)$ d'équation $y = \dfrac{k}{x - \alpha} + \beta$, on peut :
- placer le point $O'(\alpha ; \beta)$;
- tracer la droite (Δ) d'équation $x = \alpha$ et la droite (Δ') d'équation $y = \beta$;
- construire $(\mathscr{C})$, la branche de l'hyperbole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de (Δ) ;
- compléter $(\mathscr{C}_f)$ en construisant le symétrique $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par rapport au point O'.

On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

Vocabulaire

- L'écriture $\dfrac{k}{x - \alpha} + \beta$ est appelée **forme canonique** de $f(x)$.
- L'équation $y = \dfrac{k}{x - \alpha} + \beta$ est appelée **équation réduite de l'hyperbole** $(\mathscr{C}_f)$.

Exemple

Soit à construire la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x - 4}{x + 2}$.

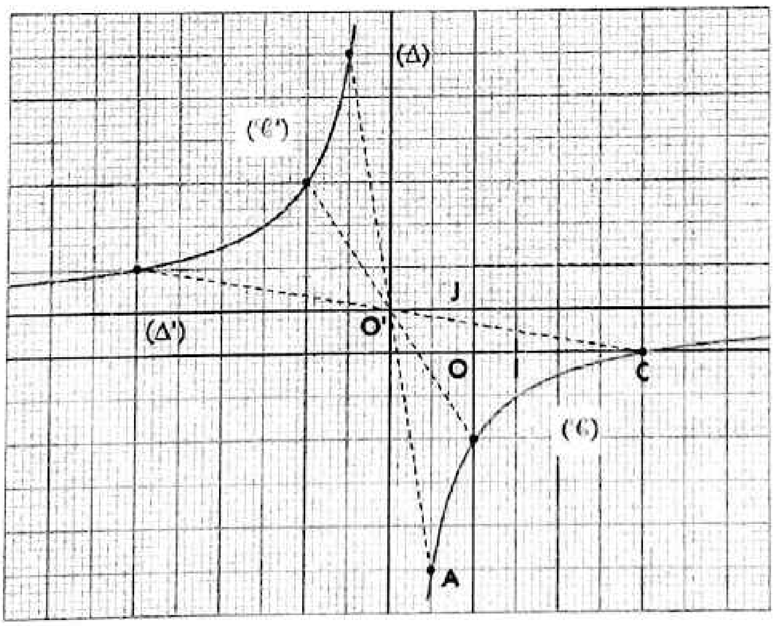
On a : pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} - \{-2\}$, $f(x) = -\dfrac{6}{x + 2} + 1$.

Donc : $(\mathscr{C}_f)$ est une hyperbole de centre (de symétrie) le point $O'(-2 ; 1)$.

Soit (Δ) la droite d'équation $x = -2$ et (Δ') la droite d'équation $y = 1$.

Construisons $(\mathscr{C})$, la branche de l'hyperbole $(\mathscr{C}_f)$ située à droite de (Δ) en plaçant des points d'abscisses supérieures à -2, par exemples $A(-1 ; -5)$, $B(0 ; -2)$ et $C(4 ; 0)$.

Complétons $(\mathscr{C}_f)$ en construisant l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la symétrie de centre O'.
On a : $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}')$.

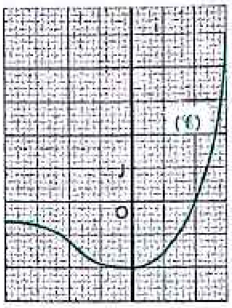


Exercices

2.a Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation : $x + 2y + 1 = 0$.
Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{D})$ pour chacune des transformations suivantes.
a) La symétrie orthogonale d'axe (OI)
b) La symétrie orthogonale d'axe (OJ)
c) La symétrie de centre O
d) La translation de vecteur $\vec{u}\binom{-1}{1}$.

2.b Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto -\sqrt{x}$.

2.c La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4 ; 3]$.
Construire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$.



2.d Construire, en utilisant une symétrie, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto |x - 3|$.

2.e Construire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.
En utilisant une translation, construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 2$.

2.f Soit f la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
a) Vérifier que : $f(x) = (x - 1)^2 + 2$.
b) Déterminer la translation qui transforme la représentation graphique de la fonction carrée en celle de la fonction f.
c) Construire la représentation graphique de la fonction carré, puis celle de la fonction f.

2.g Soit f la fonction homographique définie par : $f(x) = \frac{x - 3}{x - 2}$.
a) Vérifier que : $f(x) = -\frac{1}{x - 2} + 1$.
b) Construire l'hyperbole d'équation : $y = -\frac{1}{x}$.
En déduire la représentation graphique de f.

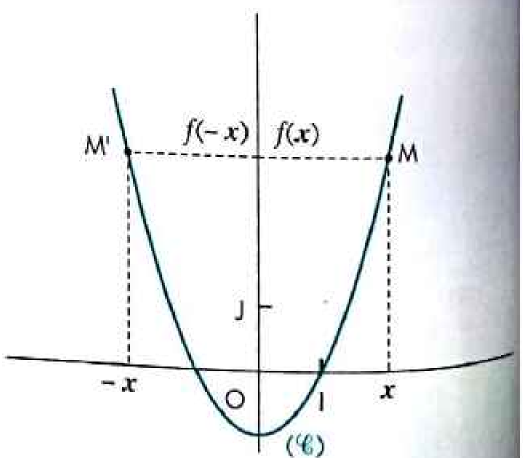
3 Parité et éléments de symétrie

3.1. Fonctions paires, fonctions impaires

Fonctions paires

Le repère (O, I, J) est orthogonal.

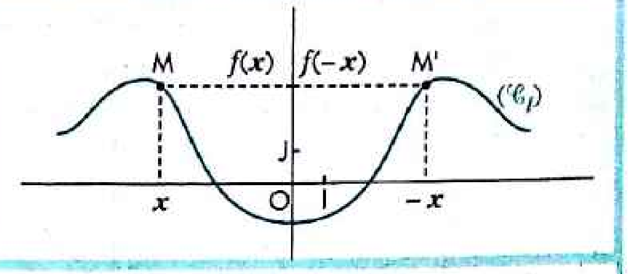
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 1$.
L'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}$.
On a : pour tout x de D_f, $-x \in D_f$.
On dit que D_f est **symétrique par rapport à zéro**.
De plus : pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.
On dit que f est une **fonction paire**.
Les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.



Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que la fonction f est paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$.

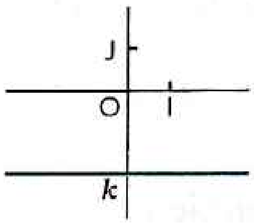
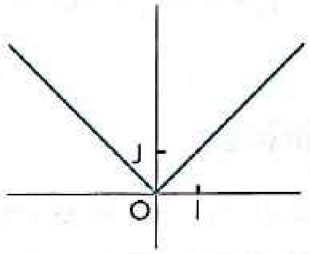
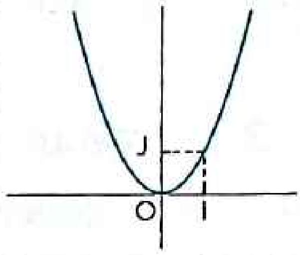


f est paire *signifie que* $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de } D_f,\ -x \in D_f \\ \text{et } f(-x) = f(x). \end{cases}$

Le repère étant orthogonal, une fonction est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.

Exemples

Les fonctions suivantes sont paires.

Fonction	$x \mapsto k$	$x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto x^2$
Représentation graphique			

Remarque

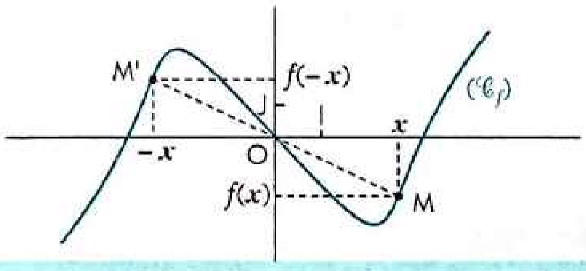
Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}^+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonctions impaires

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que la fonction f est impaire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$.

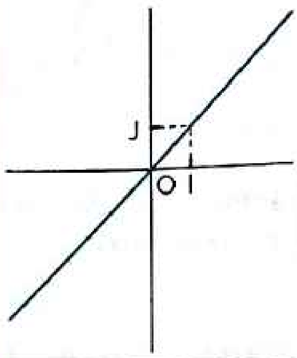
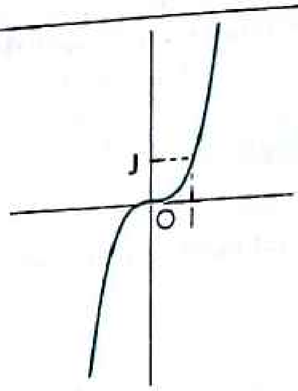
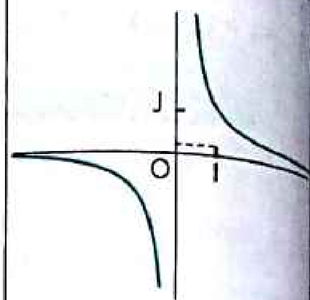


f est impaire *signifie que* $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de } D_f,\ -x \in D_f \\ \text{et } f(-x) = -f(x). \end{cases}$

Une fonction est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.

Exemples

Les fonctions suivantes sont impaires.

Fonction	$x \mapsto x$	$x \mapsto x^3$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
Représentation graphique			

Remarque

Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}^+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'origine.

Vocabulaire

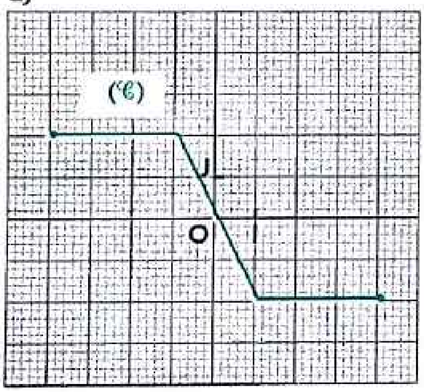
Étudier la parité d'une fonction, c'est préciser si cette fonction est paire ou impaire.

3.2. Travaux dirigés

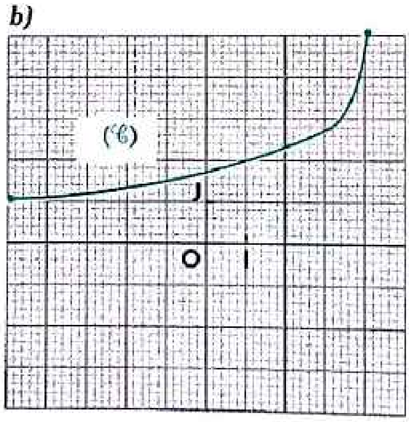
1. Reconnaître la parité d'une fonction

1. Le repère (O, I, J) est orthonormé.
(𝒞) est la représentation graphique d'une fonction *f*.
Préciser, dans chacun des cas suivants, l'ensemble de définition de la fonction *f* puis sa parité.

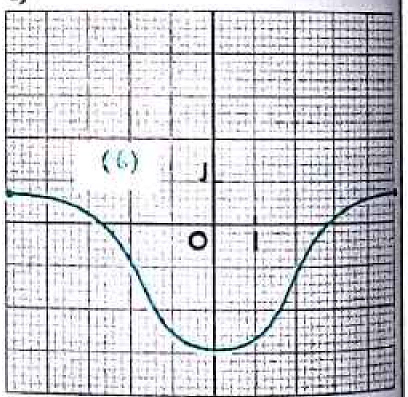
a)



b)



c)



Solution

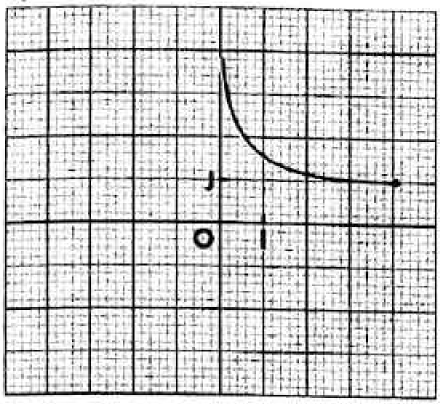
a) $D_f = [-4\ ;\ 4]$.
f est impaire.

b) $D_f = [-5\ ;\ 4]$.
f n'est ni paire, ni impaire.

c) $D_f = [-5\ ;\ 5]$.
f est paire.

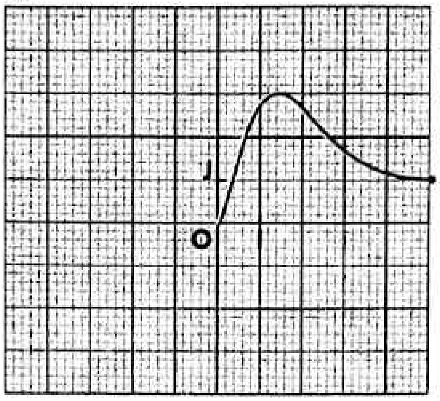
2. On donne une partie de la représentation graphique (𝒞) d'une fonction f et la parité de cette fonction. Compléter (𝒞) dans chacun des cas suivants.

a)



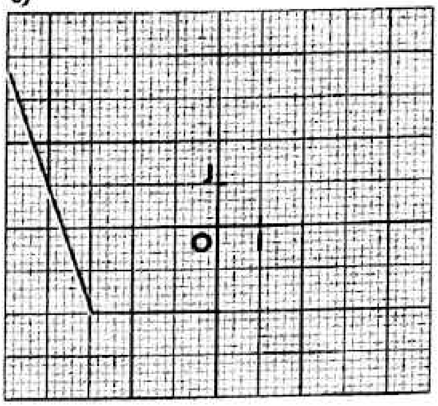
$D_f = [-4 ; 4]$.
f est paire.

b)



$D_f = [-5 ; 5]$.
f est impaire.

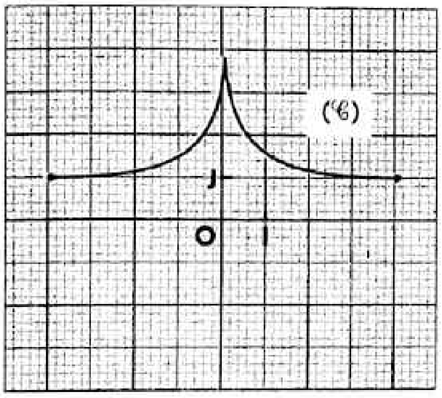
c)



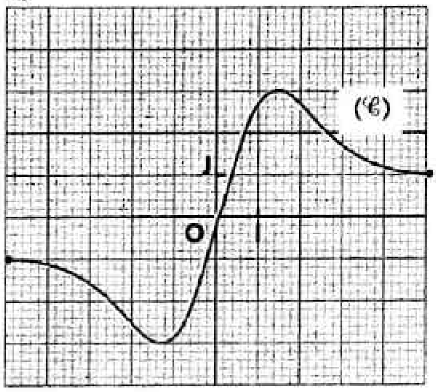
$D_f = \mathbb{R}$.
f est paire.

Solution

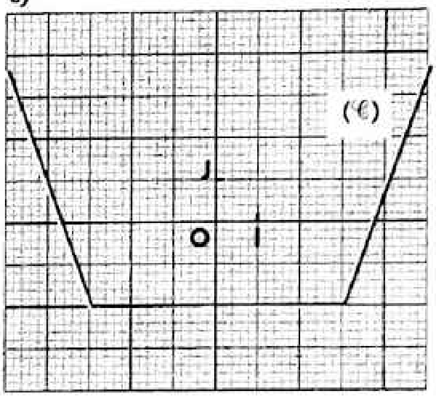
a)



b)



c)



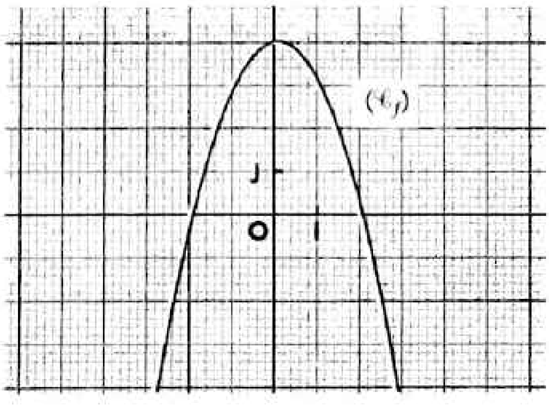
2. Étudier la parité d'une fonction

Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f.

a) $f(x) = -x^2 + 4$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ ***c)*** $f(x) = -\sqrt{x}$ ***d)*** $f(x) = x^2 - 2x$.

Solution

a) On a : $D_f = \mathbb{R}$.
La représentation graphique de f est la parabole ci-contre.

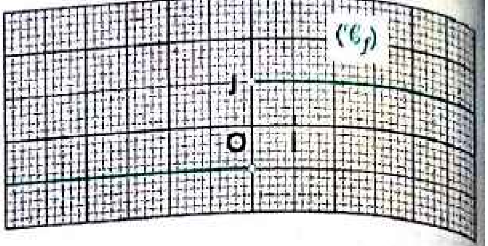


- D_f est symétrique par rapport à 0.
- On a : pour tout nombre réel x, $f(-x) = -(-x)^2 + 4$
$= -x^2 + 4$
$= f(x)$.

Donc, f est une fonction paire.
La droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

b) On a : $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; \infty[$.
Si $x \in]-\infty ; 0[$, alors $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$;
si $x \in]0 ; +\infty[$, alors $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$.

La représentation graphique de f est la réunion des deux demi-droites ci-contre.



- D_f est symétrique par rapport à 0.
- On a :

pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{|-x|}{-x} = -\dfrac{|x|}{x} = -f(x)$.

Donc, f est une fonction impaire.

Le point O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

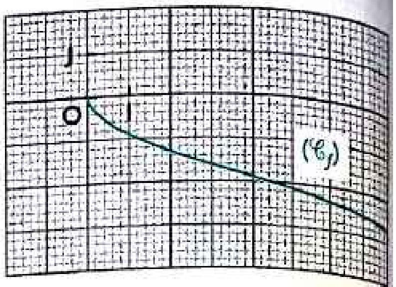
c) On a : $D_f = [0\ ;+\infty[$.

$1 \in D_f$ et $-1 \notin D_f$; donc D_f n'est pas symétrique par rapport à 0.

On en déduit que la fonction f n'est ni paire, ni impaire.

La droite (OJ) n'est pas un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Le point O n'est pas un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.



d) On a : $D_f = \mathbb{R}$.

La représentation graphique de f est la parabole ci-contre.

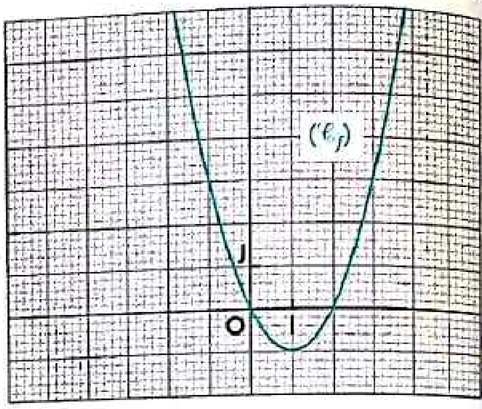
- D_f est symétrique par rapport à 0.
- On a : $f(1) = -1$ et $f(-1) = 3$.

  $f(-1) \neq f(1)$; donc, f n'est pas paire.

  $f(-1) \neq -f(1)$; donc, f n'est pas impaire.

La droite (OJ) n'est pas un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

Le point O n'est pas un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.



M

Pour démontrer qu'une fonction f n'est pas paire, il suffit de trouver un élément a de son ensemble de définition D_f tel que :
$-a \notin D_f$ ou $f(-a) \neq f(a)$.

Pour démontrer qu'une fonction f n'est pas impaire, il suffit de trouver un élément a de son ensemble de définition D_f tel que :
$-a \notin D_f$ ou $f(-a) \neq -f(a)$.

Exercices

3.a Une fonction ayant pour ensemble de définition $[-4\ ;2]$ peut-elle être paire ? impaire ?

3.b Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 3$.
Démontrer que f est une fonction paire.

3.c Soit f la fonction définie par : $f(x) = x|x|$.
Démontrer que f est une fonction impaire.

3.d Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.

a) Démontrer que f n'est pas paire.

b) Démontrer que f n'est pas impaire.

3.e Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f.

a) $f(x) = x^3 + 1$ *b)* $f(x) = 2|x| - 5$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *d)* $f(x) = -4x^3$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Fonctions élémentaires

1 ABCD est un rectangle d'aire 9 cm² et de largeur x cm.
1. Calculer, en fonction de x, sa longueur $L(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction L et construire sa représentation graphique dans le plan muni du repère (O, I, J).

2 Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a) $x^2 = 4$ b) $\frac{1}{x} = -2$
c) $x^3 + 1 = 0$ d) $x^3 - 8 = 0$.

3 Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a) $\frac{1}{x} = x$ $1 = x^2 - 1$ b) $2x^3 = -x + 3$.
$2x^3 + x - 3 = 0$

4 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

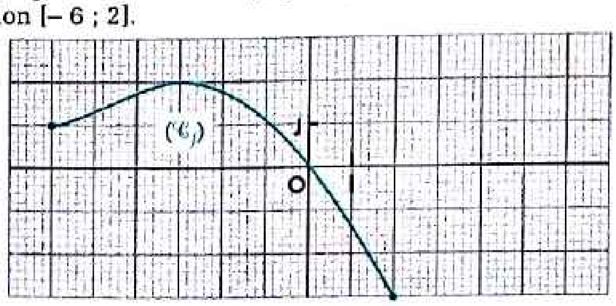
a) $1 < x^2 < 4$ b) $-2 < \frac{1}{x} < -1$
c) $0 \leq x^2 \leq 4$ d) $-8 \leq x^2 \leq -1$.

5 Déterminer l'intervalle auquel appartient x^3 dans chacun des cas suivants.
a) $x < -1$ b) $x > 1$
c) $x \leq \frac{1}{2}$ d) $3 \leq x \leq 4$.

Fonctions et transformations du plan

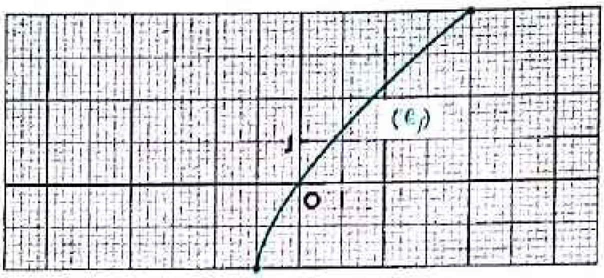
6 Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition $[-3 ; 3]$. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g dans chacun des cas suivants.
a) $g : x \mapsto -f(x)$ b) $g : x \mapsto |f(x)|$
c) $g : x \mapsto f(x + 1)$ d) $g : x \mapsto f(x) + 1$
e) $g : x \mapsto f(x - 2) + 1$ f) $g : x \mapsto f(x + 3) - 4$.

7 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $[-6 ; 2]$.

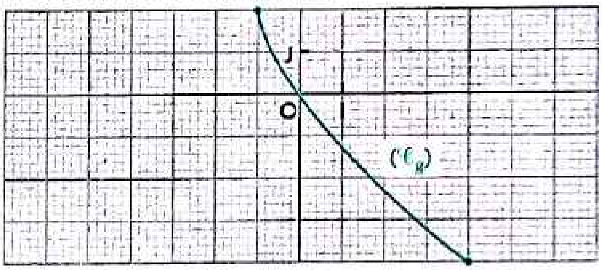


Construire, dans chacun des cas suivants, la représentation graphique de la fonction g.
a) $g : x \mapsto -f(x)$ b) $g : x \mapsto |f(x)|$
c) $g : x \mapsto f(x - 2) + 1$ d) $g : x \mapsto f(x + 1)$.

8 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $[-1 ; 4]$.

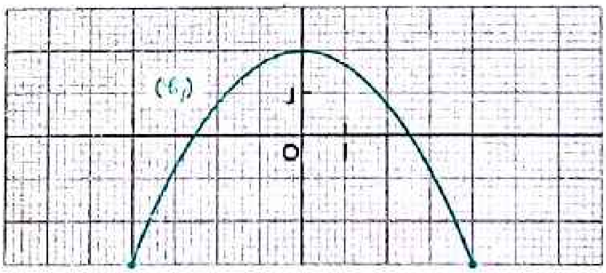


On désigne par g la fonction, ayant pour ensemble de définition $[-1 ; 4]$, qui admet la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-dessous pour représentation graphique.

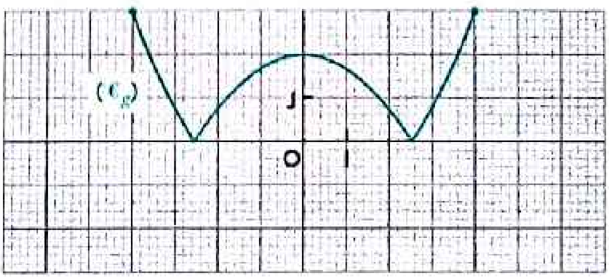


Conjecturer l'expression de $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

9 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f ayant pour ensemble de définition $[-4 ; 4]$.



On désigne par g la fonction, ayant pour ensemble de définition $[-4 ; 4]$, qui admet la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-dessous pour représentation graphique.



Conjecturer l'expression de $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

10 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.
1. Démonter que :
pour tout nombre réel x, $f(x) = (x + 1)^2 - 4$.
2. En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une translation que l'on précisera.
3. Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de la parabole d'équation $y = x^2$.

11 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \dfrac{-2x + 3}{x - 1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Démonter que :
pour tout x élément de D_f, $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} - 2$.
2. En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ par une translation que l'on précisera.
3. Construire $(\mathscr{C}_f)$ à partir de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

12 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation : $y = x^2 - 3x$.
1. Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{P})$.
2. En déduire le sommet et l'axe de $(\mathscr{P})$.
3. Construire directement $(\mathscr{P})$. *(Sans l'aide d'une transformation.)*

13 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{2x - 5}{x - 3}$.
1. Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{H})$.
2. En déduire le centre de symétrie de $(\mathscr{H})$.
3. Construire directement $(\mathscr{H})$. *(Sans l'aide d'une transformation.)*

14 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
f et g sont des fonctions de représentations graphiques respectives $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.
- Déterminer la translation qui transforme $(\mathscr{C}_f)$ en $(\mathscr{C}_g)$.
- Construire $(\mathscr{C}_f)$.
- Construire $(\mathscr{C}_g)$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$.

a) $f(x) = -x^2$ et $g(x) = -x^2 + 2x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{3} + 2x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{-x}$ et $g(x) = \dfrac{x - 3}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = \dfrac{-3x + 5}{x - 1}$.

15 Une fonction f, ayant pour ensemble de définition $[-2 ; 3]$, admet le tableau de variation ci-dessous.

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-15 ↗	0 ↗	12 ↘	0

Dans chacun des cas suivants, dresser le tableau de variation de la fonction g.
a) $g : x \mapsto -f(x)$
b) $g : x \mapsto |f(x)|$
c) $g : x \mapsto f(x + 1)$
d) $g : x \mapsto f(x - 2) + 4$.

16 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. *a)* Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^3$.
b) En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 4$.
2. Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = 4x + 4$.

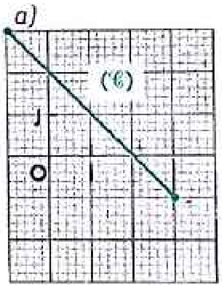
17 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'équation : $y = \sqrt{x}$.
1. Construire l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).
2. Déterminer une équation de $(\mathscr{C}')$.

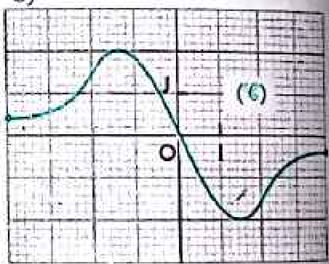
18 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.
1. Construire l'image $(\mathscr{H}')$ de $(\mathscr{H})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation de $(\mathscr{H}')$.

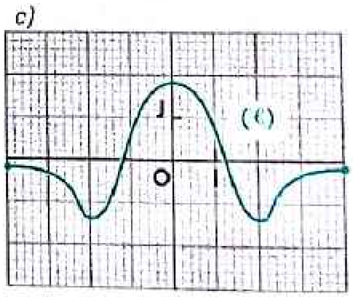
19 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation : $y = -x^2 + 4x - 3$.
1. Construire l'image $(\mathscr{P}')$ de $(\mathscr{P})$ par la symétrie de centre O.
2. Déterminer une équation de $(\mathscr{P}')$.

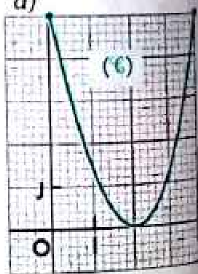
Parité et éléments de symétrie

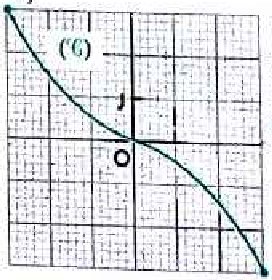
20 Dans chacun des cas suivants, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction f.

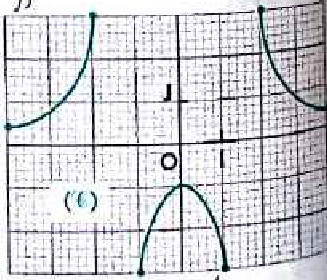
a)


b)


c)


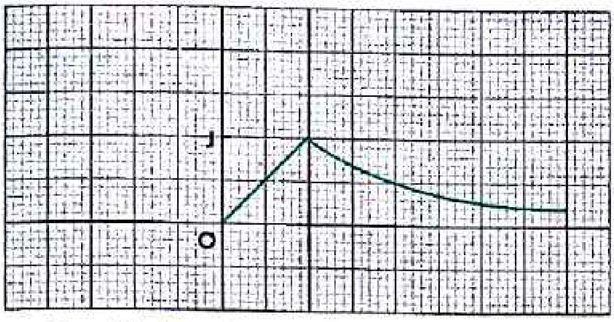
d)


e)


f)


1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Préciser la parité de f.

21 La courbe ci-dessous est une partie de la représentation graphique ($\mathscr{C}$) d'une fonction f, ayant pour ensemble de définition $[-4\,;\,4]$.



Compléter ($\mathscr{C}$) dans chacun des cas suivants :
a) f est une fonction paire
b) f est une fonction impaire.

22 Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R}$. Construire la représentation graphique de f dans chacun des cas suivants.
a) f est paire et f est croissante sur $[0\,;+\infty[$
b) f est impaire et f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

23 Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition $\mathbb{R}$. Construire la représentation graphique de f dans chacun des cas suivants.
a) f est paire et f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$
b) f est impaire et f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

24 Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = x^3 - x$ *b)* $f(x) = x^2 + x$

c) $f(x) = \sqrt{-x}$ *d)* $f(x) = \dfrac{3}{x}$

e) $f(x) = x^2 + 1$ *f)* $f(x) = |x| - 4$.

25 Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré qui sont paires.

APPROFONDISSEMENT

26 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit ($\mathscr{P}$) la parabole d'équation $y = x^2$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$.
1. Construire l'image ($\mathscr{P}'$) de ($\mathscr{P}$) par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
2. Déterminer une équation de ($\mathscr{P}'$).

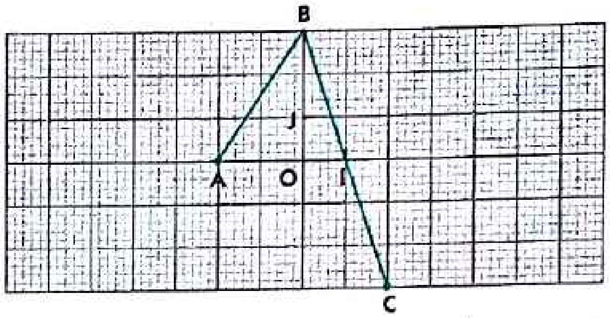
27 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $y^2 = x$.

28 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $x^2y^2 = 1$.

29 Résoudre graphiquement le système :
$$\begin{cases} xy = 100 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases}$$

30 Le plan est muni du repère (O, I, J).
À l'aide de la représentation graphique de la fonction cube, construire la représentation graphique de la fonction g dans chacun des cas suivants.
a) $g(x) = x^3 + 1$ *b)* $g(x) = (x+1)^3$
c) $g(x) = x^3 - 1$ *d)* $g(x) = (x-1)^3$.

31 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Sur la figure ci-dessous, [AB] ∪ [BC] est la représentation graphique d'une fonction f.



1. On considère la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$.
a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g
b) Construire la représentation graphique ($\mathscr{C}_g$) de g
c) Donner la formule explicite de la fonction g.
2. Répondre aux mêmes questions pour la fonction h : $x \mapsto f(x+2) + 3$.

32 Soit f une fonction paire ayant pour ensemble de définition $[-5\,;\,5]$.
Démontrer que si f est croissante sur $[0\,;\,5]$, alors f est décroissante sur $[-5\,;\,0]$.

33 Soit f une fonction impaire ayant pour ensemble de définition $[-5\,;\,5]$.
Démontrer que si f est croissante sur $[0\,;\,5]$, alors f est également croissante sur $[-5\,;\,0]$.

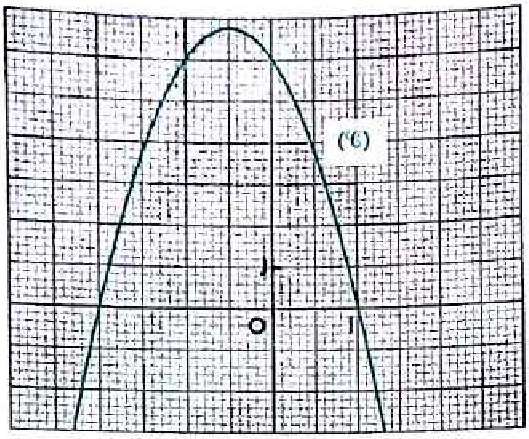
34 Parmi les rectangles d'aire égale à 2, on veut chercher tous ceux dont la différence des côtés est supérieure à 1.
1. Démontrer que la largeur x et la longueur y d'un rectangle solution vérifient le système :
$$\begin{cases} xy = 2 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$$
2. Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
a) Construire les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et $g : x \mapsto x + 1$.
b) Déterminer graphiquement les intervalles auxquels appartiennent les dimensions des rectangles cherchés.

35 Déterminer l'équation réduite de la parabole ($\mathscr{P}$) de sommet $S(1\,;\,-4)$ passant par le point $A(3\,;\,0)$.

36 Déterminer l'équation réduite de l'hyperbole ($\mathscr{H}$) de centre $\Omega(3\,;\,1)$ passant par le point $A(4\,;\,5)$.

37 La courbe ($\mathscr{C}$) page suivante est la représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré.
1. Résoudre graphiquement :
a) l'équation : $f(x) = 0$
b) l'inéquation : $f(x) < 0$.
2. *a)* En remarquant que $f(0) = 6$, déterminer l'expression de $f(x)$.

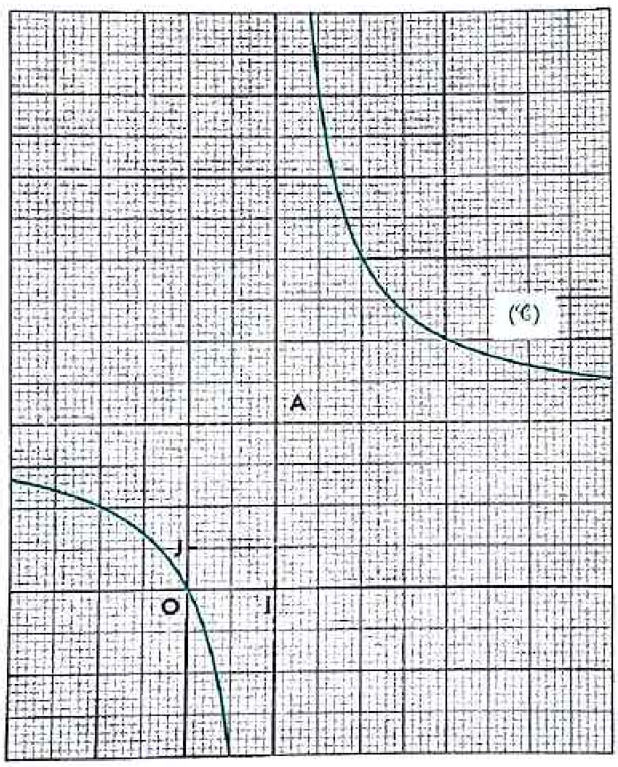
b) Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus à la question **1**.



38 La courbe (𝒞) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction homographique f.
Le point A est un centre de symétrie de (𝒞).

1. Résoudre graphiquement :
a) l'équation : $f(x) = x$
b) l'inéquation : $f(x) > 4$.

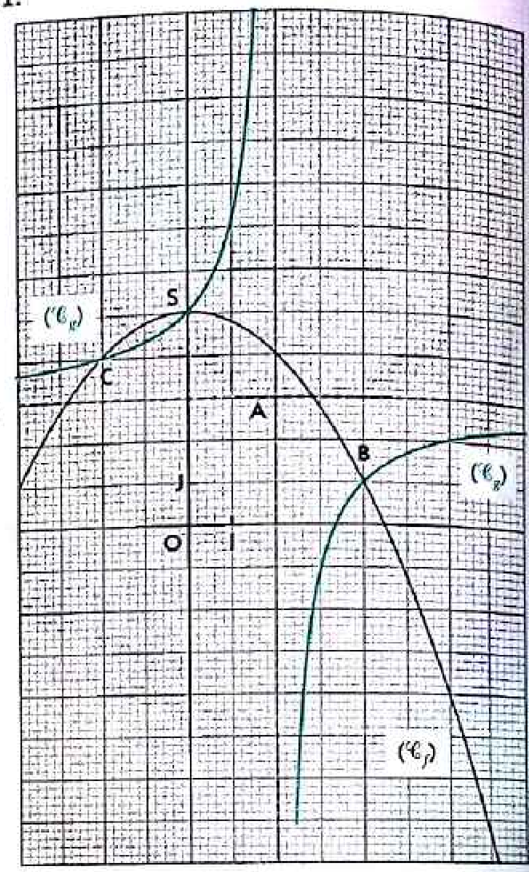
2. *a)* En remarquant que $f(0) = 0$, déterminer l'expression de $f(x)$.
b) Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus à la question **1**.



39 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C}_f)$ est la parabole de sommet S(0 ; 5) passant par le point B(4 ; 1) et $(\mathscr{C}_g)$ est l'hyperbole de centre A(2 ; 3) passant par le point S.

1. Résoudre graphiquement :
a) l'équation : $f(x) = g(x)$
b) l'inéquation : $f(x) > g(x)$.

2. *a)* Déterminer les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.
b) Vérifier que C(– 2 ; 4) est un point commun aux courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.
c) Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus à la question **1**.



40 Le plan est muni du repère othogonal (O, I, J).
f est une fonction ayant pour ensemble de définition ℝ, telle que : pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = x^2 - 2x$.

1. On supose que f est une fonction paire.
a) Construire la représentation graphique de la fonction f.
b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x, pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 0]$.
c) Vérifier que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2|x|$.

2. On suppose que f est une fonction impaire.
a) Construire la représentation graphique de la fonction f.
b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x, pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 0]$.
c) Vérifier que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x|x| - 2x$.