3 Dénombrement

Introduction

Le dieu Shiva compose avec Brahma et Vishnu la triade qui personnifie les trois aspects fondamentaux de l'être universel dans la religion hindoue. Les représentations traditionnelles le montrent avec dix bras qui portent chacun un attribut. Cela donna l'idée à un mathématicien hindou du XII*e* *siècle de poser cette question : « Combien de représentations différentes du dieu Shiva peut-on obtenir en changeant ses dix attributs de mains ? »*

© Giraudon – Musée Guimet

Le dieu Shiva, tenant dans chacune de ses dix mains l'un de ses attributs : corde, trompe d'éléphant, serpent, tambourin, rame, trident, lit, poignard, flèche et arc.

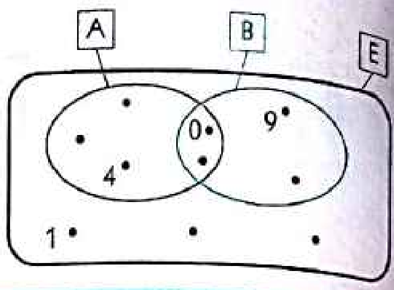
SOMMAIRE

1 Compléments sur les ensembles

1.1. Réunion et intersection de deux ensembles

Introduction

Soit E l'ensemble des chiffres du système décimal,
A l'ensemble des chiffres pairs,
B l'ensemble des chiffres multiples de 3.



- Énumérer les éléments des ensembles E, A et B.
- Quels sont les éléments de E appartenant à la fois à A et à B ?
- Quels sont les éléments de E appartenant à l'un au moins des ensembles A et B ?
- Compléter le diagramme ci-contre.

Définitions

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B. **On note $A \cap B$; on lit « A inter B ».**	**On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B.** **On note $A \cup B$; on lit « A union B ».**
$x \in A \cap B$ *signifie* $x \in A$ et $x \in B$.	$x \in A \cup B$ signifie $x \in A$ ou $x \in B$.

Remarque

*Lorsque leur intersection est vide, les parties A et B sont dites **disjointes**.*

Cardinal de la réunion de deux ensembles

Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre, noté card(E), d'éléments de cet ensemble.

Reprenons l'exemple introductif.

- Déterminer le cardinal de chacun des ensembles A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.
- Trouver une relation entre ces quatre nombres.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E.
On a : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Remarque

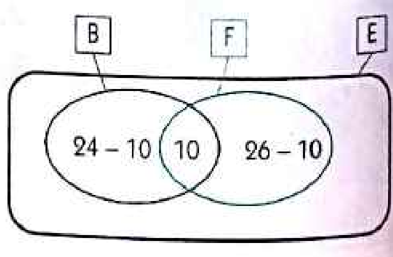
En additionnant les nombres d'éléments de A et de B, ceux de $A \cap B$ sont comptés deux fois.

Exemple

Dans une classe, tous les élèves pratiquent au moins l'un des deux sports proposés : le football ou le basket. 24 élèves pratiquent le basket, 26 pratiquent le football et 10 pratiquent les deux sports.

- Déterminer l'effectif de cette classe.
- Déterminer le nombre d'élèves pratiquant un seul sport.

Sur le diagramme ci-contre, E représente l'ensemble des élèves de la classe, B et F les sous-ensembles de ces élèves pratiquant respectivement le basket et le football.



- On a : $E = B \cup F$.

Donc : $\text{card}(E) = \text{card}(B) + \text{card}(F) - \text{card}(B \cap F)$
$= 24 + 26 - 10 = 40$.

Donc, l'effectif de cette classe est : 40 élèves.

• Le nombre d'élèves pratiquant uniquement le basket est :
card(B) – card(B ∩ F) = 24 – 10 = 14.
Le nombre d'élèves pratiquant uniquement le football est :
card(F) – card(B ∩ F) = 26 – 10 = 16.
On en déduit que le nombre d'élèves pratiquant un seul sport est : 14 + 16 = 30.

Remarque

Si A ∩ B = ∅, alors card(A ∪ B) = card(A) + card(B).

1.2. Complémentaire d'un ensemble

Présentation

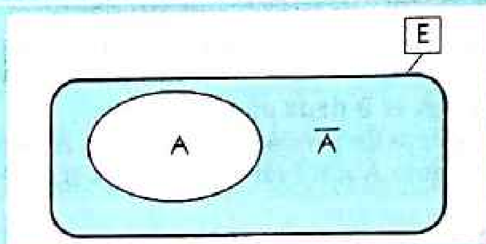
Soit E l'ensemble des élèves d'une classe, F l'ensemble des filles et G l'ensemble des garçons de cette classe. On a : E = F ∪ G et F ∩ G = ∅.
On dit que F et G sont des parties **complémentaires** de E.

Définition

On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

On note $\complement_E^A$ ou $\overline{A}$;

on lit « complémentaire de A dans E ».



Cardinal du complémentaire d'un ensemble

Propriété

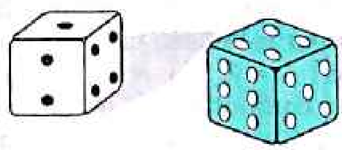
Soit A une partie d'un ensemble fini E.
On a : card($\overline{A}$) = card(E) – card(A).

Exemple
Sur 1 000 ampoules produites par une usine, 50 sont défectueuses.
Le nombre d'ampoules non défectueuses est donc 1 000 – 50, c'est-à-dire 950.

1.3. Produit cartésien

Introduction

On lance simultanément deux dés cubiques, l'un blanc et l'autre rouge.
On note, à chaque lancer, les numéros des faces supérieures.
On se propose de déterminer tous les résultats possibles.

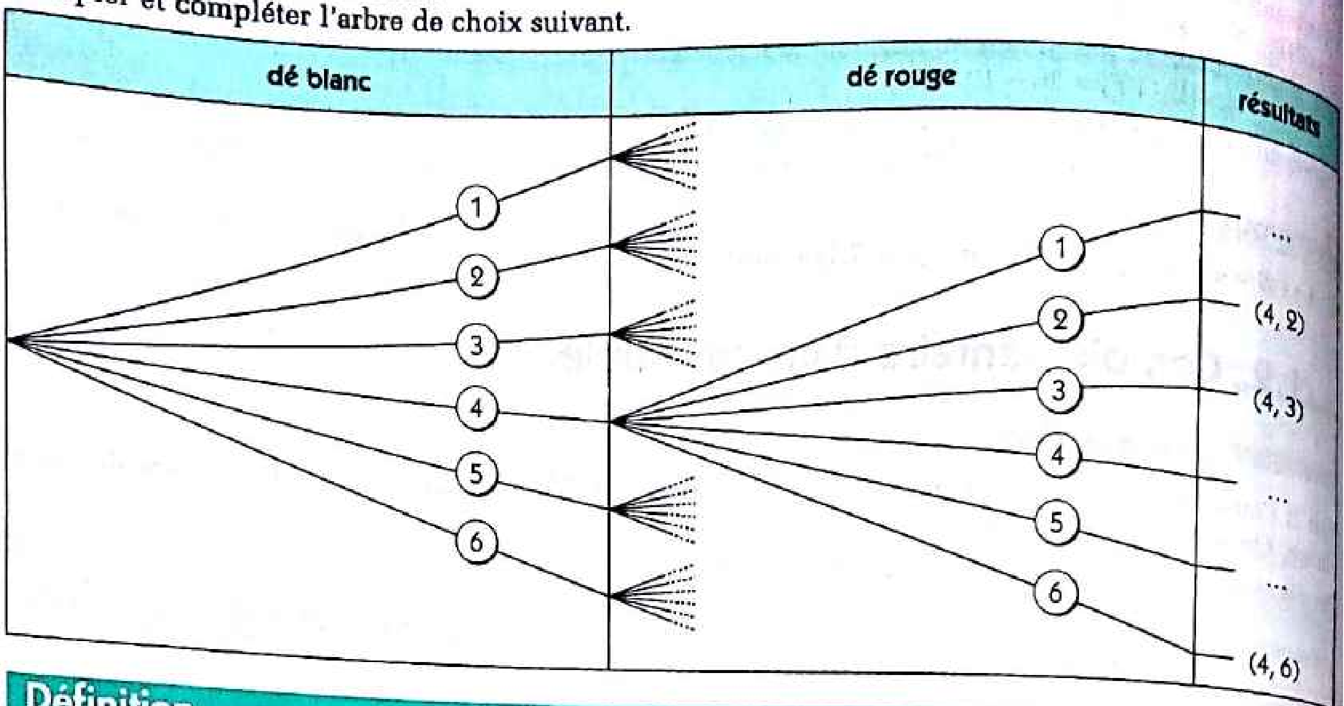


Utilisation d'un tableau à double entrée
Chaque résultat correspond à un couple (a, b) tel que le numéro du dé blanc est a et celui du dé rouge b.
Par exemple, le couple (1, 2) indique que le numéro du dé blanc est 1 et celui du dé rouge 2.
• Quelle information traduit le couple (2, 1) ?
• Traduire, à l'aide d'un couple, que le numéro du dé blanc est 3 et celui du dé rouge 5.
• Compléter le tableau à double entrée.

		dé rouge					
		1	2	3	4	5	6
dé blanc	1	(1, 1)	(1, 2)				
	2	(2, 1)					
	3	(3, 1)					
	4					(4, 5)	
	5						
	6						

Utilisation d'un arbre de choix

Recopier et compléter l'arbre de choix suivant.



Définition

Soit A et B deux ensembles.
On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
On note $A \times B$; on lit « A croix B ».

Remarques

- *Dans un couple, l'ordre des éléments est important ; d'après l'exemple précédent, on a : $(1, 2) \neq (2, 1)$.*
- *Plus généralement, le produit cartésien de p ensembles $E_1, E_2, ..., E_p$ est l'ensemble des éléments $(x_1, x_2, ..., x_p)$ tel que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, ..., x_p \in E_p$.*

On note : $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$; les éléments $(x_1, x_2, ..., x_p)$ sont appelés p-uplets.

- *Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{p \text{ fois}}$ est noté E^p.*

Exemples

- Zié envisage de se lancer dans la vente des produits vivriers.

Le comportement du marché dépend de la conjoncture et de la concurrence.

La conjoncture est soit bonne, soit mauvaise ; on note respectivement b et m.

La concurrence est soit rude, soit faible, soit inexistante ; on note respectivement r, f et i.

Les différents comportements du marché peuvent être représentés par le tableau ci-contre.

		concurrence		
		r	f	i
conjoncture	b	(b, r)	(b, f)	(b, i)
	m	(m, r)	(m, f)	(m, i)

Notons : $A = \{b, m\}$ et $B = \{r, f, i\}$.

Chaque comportement du marché peut être considéré comme un élément du produit cartésien $A \times B$.

- Comment déterminer les nombres de 3 chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 5 et 9 ?

Soit $E = \{1, 2, 5, 9\}$.

Les nombres de 3 chiffres peuvent être formés à partir des éléments du produit cartésien E^3.

Par exemples, les triplets (1, 1, 1), (2, 5, 2) et (2, 5, 9) permettent de former respectivement les nombres 111, 252 et 259.

Cardinal du produit cartésien

Reprenons l'exemple introductif.

- Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- Combien y a-t-il de résultats comportant au moins un cinq ?

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis.
On a : card(A × B) = card(A) × card(B).

Remarque

On peut généraliser la propriété précédente à p ensembles finis.
- $card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) ... \times card(E_p)$.
- $card(E^p) = [card(E)]^p$.

Exemples

Reprenons les exemples précédents.
- Le nombre de comportements du marché est : card(A × B) = card(A) × card(B) = 2 × 3 = 6.
- On peut écrire card(E^3) nombres de trois chiffres (distincts ou non) avec les éléments de l'ensemble E = {1, 2, 5, 9}. On a : card(E^3) = $[card(E)]^3$ = 64.

1.4. Travaux dirigés

Intersection de trois ensembles

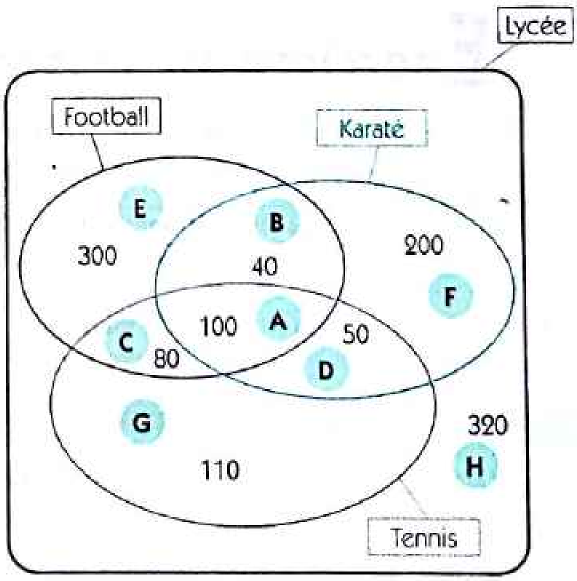
Dans un lycée de 1 200 élèves, trois activités sportives sont proposées : le football, le karaté et le tennis.
520 élèves pratiquent le football ;
390 élèves pratiquent le karaté ;
340 élèves pratiquent le tennis ;
140 élèves pratiquent à la fois le football et le karaté ;
180 élèves pratiquent à la fois le football et le tennis ;
150 élèves pratiquent à la fois le karaté et le tennis ;
100 élèves pratiquent à la fois les trois sports.

1°) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent seulement le football, seulement le karaté, seulement le tennis.

2°) Déterminer le nombre d'élèves qui ne pratiquent aucun de ces trois sports.

Solution

1°) Le diagramme ci-contre fait apparaître 8 parties A, B, C, D, E, F, G et H deux à deux disjointes.
- La partie A représente l'ensemble des élèves qui pratiquent les trois sports ; on a : card(A) = 100.
- La partie B représente l'ensemble des élèves qui pratiquent seulement le football et le karaté ; on a : card(B) = 140 – 100 = 40.
- La partie C représente l'ensemble des élèves qui pratiquent seulement le football et le tennis ; on a : card(C) = 180 – 100 = 80.
- La partie D représente l'ensemble des élèves qui pratiquent seulement le karaté et le tennis ; on a : card(D) = 150 – 100 = 50.
- Les parties E, F et G représentent respectivement l'ensemble des élèves qui pratiquent uniquement le football, le karaté et le tennis.



On a : card(E) = 520 – (100 + 40 + 80) = 300 ;
card(F) = 390 – (100 + 40 + 50) = 200 ;
card(G) = 340 – (100 + 50 + 80) = 110.

2°) La partie H représente l'ensemble des élèves qui ne pratiquent aucun des trois sports.
On a : card(H) = 1 200 – (300 + 200 + 110 + 100 + 40 + 50 + 80) = 320.

Répartition des travailleurs d'une entreprise

Une entreprise de transformation de café emploie 800 personnes, dont 40 % de femmes. Pour se rendre à l'entreprise, les travailleurs ont le choix entre deux formules :
***FORMULE 1* : emprunter le bus de l'entreprise ;**
***FORMULE 2* : utiliser ses propres moyens.**
60 % des femmes utilisent le bus de l'entreprise, contre un tiers des hommes.
Quelle est la répartition des travailleurs de cette entreprise ?

Solution

Désignons par :
F l'ensemble des femmes de l'entreprise ;
$\overline{F}$ l'ensemble des hommes de l'entreprise ;
B l'ensemble des travailleurs qui empruntent le bus de l'entreprise ;
$\overline{B}$ l'ensemble des travailleurs qui utilisent leurs propres moyens.
Le tableau ci-contre fait apparaître 9 cases numérotées de 1 à 9.

	B	$\overline{B}$	Total
F	❶ 192	❷ 128	❸ 320
$\overline{F}$	❹ 160	❺ 320	❻ 480
Total	❼ 352	❽ 448	❾ 800

- La case ❾ représente le nombre total de travailleurs de l'entreprise ; c'est-à-dire 800.
- La case ❸ représente le nombre total de femmes de l'entreprise ; c'est-à-dire : $800 \times \frac{40}{100} = 320$.
- La case ❶ représente le nombre de femmes qui empruntent le bus ; c'est-à-dire : $320 \times \frac{60}{100} = 192$.
- La case ❷ représente le nombre de femmes qui n'empruntent pas le bus ;
  c'est-à-dire : $320 - 192 = 128$.
- La case ❻ représente le nombre total des hommes de l'entreprise ; c'est-à-dire : $800 - 320 = 480$.
- La case ❹ représente le nombre d'hommes qui empruntent le bus ; c'est-à-dire : $480 \times \frac{1}{3} = 160$.
- La case ❺ représente le nombre d'hommes qui n'empruntent pas le bus ;
  c'est-à-dire : $480 - 160 = 320$.
- La case ❼ représente le nombre de travailleurs qui empruntent le bus ; c'est-à-dire : $192 + 160 = 352$.
- La case ❽ représente le nombre de travailleurs qui n'empruntent pas le bus ;
  c'est-à-dire : $128 + 320 = 448$.

Exercices

1.a Chacun des 40 élèves d'une classe étudie le français ou l'arabe. 15 élèves étudient les deux langues.
Combien d'élèves étudient une seule des deux langues ?

1.b Dans un club sportif, tous les membres pratiquent au moins un des deux sports proposés : le basket et le handball. 850 membres pratiquent le basket, 600 pratiquent le handball et 250 pratiquent les deux sports.
Combien de membres compte ce club sportif ?

1.c Compléter le tableau suivant.

Ensemble	A	B	C	A×B	B×C
Cardinal	5	8	9	40	72

1.d Dans une épreuve d'examen, on propose 3 sujets de mathématiques et 5 sujets de français. Un candidat doit choisir un sujet de chaque discipline.
Combien a-t-il de choix possibles ?

2 p-uplets, arrangements et permutations

2.1. p-uplets d'un ensemble

Définition

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.
On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble E^p.

Exemples

- (P, P) et (F, P) sont des couples de l'ensemble {P, F}.

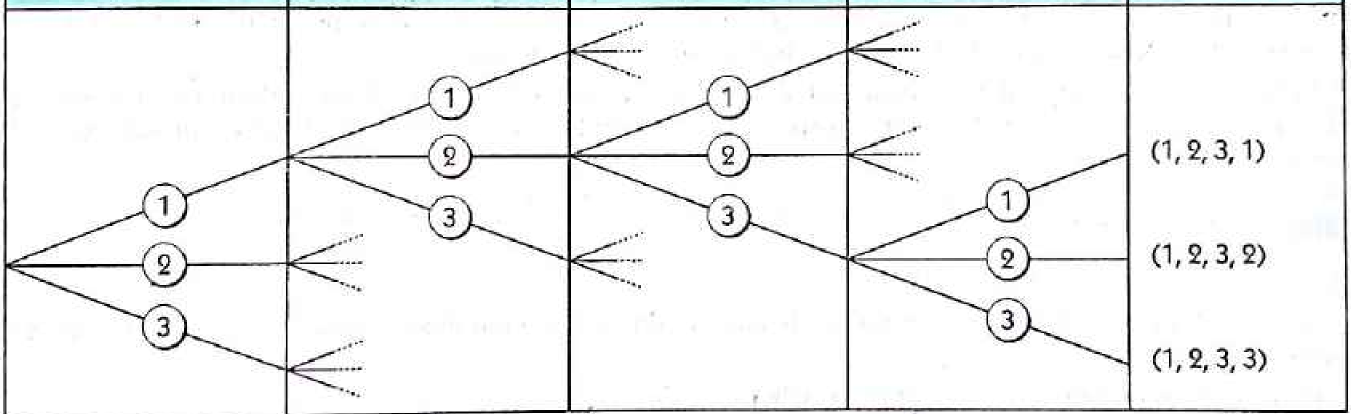
Ils correspondent, par exemple, à des résultats du lancer simultané de deux pièces de monnaie discernables.

- (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1) sont des triplets de l'ensemble {0, 1}.
- On dispose de 4 livres a, b, c et d qu'on veut ranger dans 3 tiroirs numérotés 1, 2 et 3.

Un rangement correspond à un 4-uplet de l'ensemble {1, 2, 3}.
Par exemple, le 4-uplet (1, 1, 3, 2) traduit que :
le livre a est dans le tiroir numéroté 1 ;
le livre b est dans le tiroir numéroté 1 ;
le livre c est dans le tiroir numéroté 3 ;
le livre d est dans le tiroir numéroté 2.

Un arbre de choix facilite la détermination de tous les 4-uplets.

3 choix pour le livre a	3 choix pour le livre b	3 choix pour le livre c	3 choix pour le livre d	4-uplets



Propriété

Pour tout ensemble E à n éléments, on a : card $(E^p) = n^p$. On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

Exemples

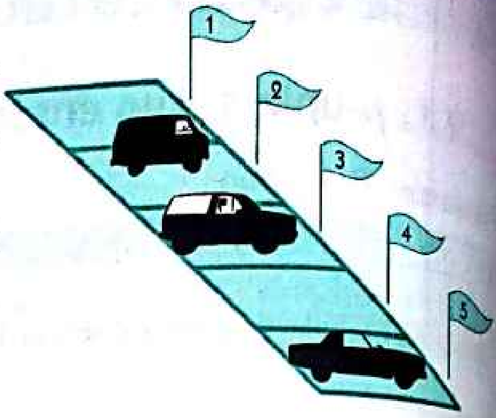
Reprenons les exemples précédents.

- Le nombre de couples de l'ensemble {F, P} est : $2^2 = 4$.
- Le nombre de triplets de l'ensemble {0, 1} est : $2^3 = 8$.
- Le nombre de façons de ranger 4 livres dans 3 tiroirs est : $3^4 = 81$.

2.2. Arrangements

Introduction

Dans un parking de 5 places numérotées de 1 à 5, 3 voitures arrivent et se garent.
Un rangement est une occupation de 3 places deux à deux distinctes des 5 places disponibles.
La figure ci-contre indique un exemple de rangement de ces 3 voitures dans le parking.



On convient que les 3 voitures se garent, dans l'ordre d'arrivée, l'une après l'autre ; ainsi un ordre d'occupation possible correspondant à la figure est : (3, 2, 5).

Le triplet (3, 2, 5) traduit que :
la 1^{re} voiture occupe la place numérotée 3 ;
la 2^e voiture occupe la place numérotée 2 ;
la 3^e voiture occupe la place numérotée 5.

Deux voitures ne peuvent pas occuper la même place de parking ; donc, par exemple, le triplet (4, 1, 4) ne peut être obtenu.

- Donner d'autres ordres d'occupation possibles correspondant à la figure.
- Comment peut-on déterminer toutes les façons possibles de garer ces 3 voitures ?

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$.
On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemples

- On dispose de 4 livres a, b, c et d qu'on veut ranger dans 6 tiroirs numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et 6, de telle sorte que chaque tiroir contienne au plus un livre. Chaque rangement des 4 livres correspond à un arrangement de 4 éléments d'un ensemble à 6 éléments.
- L'installation de 5 personnes sur 8 chaises, sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise, est un arrangement de 5 éléments de l'ensemble de 8 chaises.
- Élire un bureau composé d'un président, d'un secrétaire général et d'un trésorier parmi les 20 membres d'une coopérative dont les statuts n'autorisent pas le cumul de postes, revient à réaliser un arrangement de 3 membres parmi 20.

Propriété

Reprenons l'exemple introductif.

- À l'aide d'un arbre de choix, déterminer le nombre de façons possibles de garer 3 voitures dans un parking de 5 places.
- Retrouver ce nombre en complétant le schéma ci-dessous.

Rangement	Première voiture	puis	Deuxième voiture	puis	Troisième voiture	Nombre de façons
Nombre de choix possibles	5	×	4	×	…	…

Ce nombre est noté A_5^3.

- Énoncer un problème conduisant au calcul de A_7^4.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments, noté A_n^p, est tel que :
$A_n^p = n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$.

Remarques

* *Le nombre de facteurs du produit $n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$ est égal à p.*
Par exemple, A_{10}^5 est le produit de 5 nombres entiers consécutifs dont le plus grand est 10 :
$A_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$.
* Si $p > n$, il est impossible de trouver p éléments deux à deux distincts dans E.

Exemples

* Une coopérative de 20 membres doit élire un bureau composé d'un Président, d'un Secrétaire Général et d'un Trésorier. Les statuts de la coopérative n'autorisent pas le cumul de postes. Déterminer le nombre de bureaux possibles.
Il y a autant de bureaux que d'arrangements de 3 membres pris parmi 20, c'est-à-dire A_{20}^3 ;
on a : $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.
* Déterminer le nombre de façons différentes de placer 5 personnes sur 8 chaises numérotées de 1 à 8, sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise.
Chaque installation des 5 personnes correspond à un arrangement de 5 éléments de l'ensemble des 8 chaises. Il y a donc A_8^5 façons différentes de placer les 5 personnes ;
on a : $A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$.

Notation factorielle

Définition

Soit n un nombre entier naturel.
On appelle factorielle n le nombre entier $n!$ tel que :
* **$0! = 1$;**
* **si $n \neq 0$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.**

La notation factorielle a été inventée en 1808 par un mathématicien français presqu'oublié aujourd'hui, Christian KRAMP.

Exemples

$1! = 1$;
$2! = 2 \times 1 = 2$.
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

* **Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$. On a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.**
* **Par convention : $A_n^0 = 1$.**

2.3. Permutations

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.
On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

Exemples

* (P, F) et (F, P) sont les permutations de l'ensemble {F, P}.
* (0, 1, 2), (1, 0, 2) et (1, 2, 0) sont des permutations de l'ensemble {0, 1, 2}.

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Exemples

• À une réunion de coalition de partis politiques, 5 représentants de différents partis doivent prendre la parole un par un à la tribune.
Déterminer le nombre de façons de les inviter à prendre la parole.
Il y a autant de façons que de permutations des 5 représentants, c'est-à-dire 5! ;
on a : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

• Déterminer le nombre de façons de disposer 6 drapeaux de 6 pays différents sur 6 mâts prévus à cet effet.
Il y a autant de possibilités que de permutations des 6 drapeaux, c'est-à-dire 6! ;
on a : $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Exercices

2.a De combien de façons peut-on affecter 4 professeurs dans 3 lycées ?

2.b On appelle mot (ayant un sens ou pas) toute « suite ordonnée » de lettres d'un alphabet donné.
a) Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec l'alphabet morse qui comprend 2 lettres ?
b) Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec l'alphabet arabe qui comprend 28 lettres ?

2.c Le Premier Ministre veut distribuer quatre portefeuilles ministériels (économie, éducation, santé, agriculture) à quatre personnes parmi dix candidats potentiels.
Combien a-t-il de choix possibles ?

2.d Un réseau téléphonique utilise une numérotation à 8 chiffres.
a) Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 8 chiffres, chaque chiffre pouvant être répété de 0 à 8 ?
b) Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 8 chiffres deux à deux distincts ?

2.e Combien y a-t-il de façons différentes de placer 4 personnes autour d'une table ronde ?

2.f On appelle anagramme d'un mot toute permutation des lettres de ce mot, en vue d'obtenir un nouveau mot qui a un sens ou non. Par exemple, EBIN et BENI sont des anagrammes du mot BIEN.
Déterminer le nombre d'anagrammes du mot AFRIQUE.

3 Combinaisons

3.1. Définition et propriétés

Définition

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel, tels que : $p \leq n$.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

Exemples

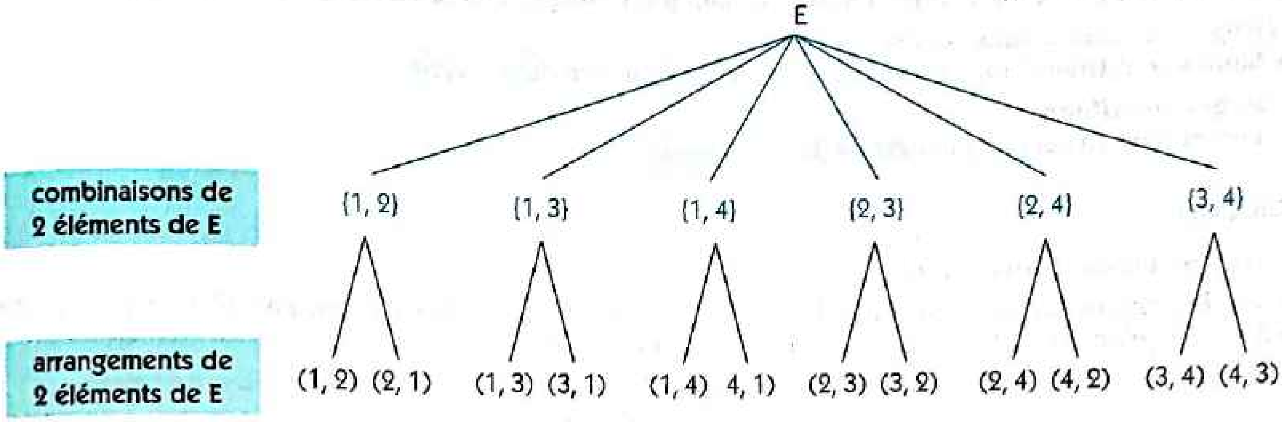
On considère cinq élèves d'une classe de première : Alassane, Bintou, Codjo, Dokan et Essoh. Désignons chaque élève par la première lettre de son nom et posons : $E = \{a, b, c, d, e\}$.

• $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{c, d\}$ sont des combinaisons de 2 éléments de E ; elles désignent, par exemple, des groupes de travail de deux élèves que l'on peut former avec les éléments de E.

• $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ et $\{b, c, d\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E ; elles désignent, par exemple, des groupes de travail de trois élèves que l'on peut former avec les éléments de E.

Nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments

Soit l'ensemble : $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
On sait qu'il y a A_4^2 arrangements de deux éléments de E.
On se propose de construire ces arrangements à l'aide d'un arbre, en deux étapes :
- on détermine toutes les combinaisons de 2 éléments de E ;
- on détermine toutes les permutations de chacune de ces parties de E.



Chaque combinaison de 2 éléments permet de construire 2! permutations, donc 2! arrangements de 2 éléments de E.
Donc, le nombre d'arrangements de 2 éléments de E est le produit des deux nombres suivants :
- le nombre de combinaisons de 2 éléments de E ;
- le nombre de permutations de chacune de ces combinaisons.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté C_n^p, est tel que :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Remarques

- *Une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments ne peut exister que si $p \leq n$.*
- *Il y a une seule partie à 0 élément d'un ensemble à n éléments, c'est l'ensemble vide ; donc : $C_n^0 = 1$.*
- *Il y a une seule partie à n éléments d'un ensemble E à n éléments, c'est l'ensemble E lui-même ; donc : $C_n^n = 1$.*
- *Il y a n singletons inclus dans un ensemble à n éléments ; donc : $C_n^1 = n$.*

Exemples

- Lors d'un examen, un candidat doit choisir 3 matières parmi les 5 suivantes : mathématiques, philosophie, biologie, anglais, français. Déterminer le nombre de façons de choisir ces 3 matières.
Chaque façon de choisir est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 5 matières proposées, c'est-à-dire une combinaison de 3 matières choisies parmi 5.
Donc, le nombre de façons de choisir est : $C_5^3 = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$.

- L'éclairage d'une salle de spectacles est assuré par 8 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Déterminer le nombre de façons d'éclairer cette salle en allumant exactement 5 ampoules.
Chaque façon d'éclairer la salle est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 8 ampoules, c'est-à-dire une combinaison de 5 ampoules choisies parmi 8.
Donc, le nombre de façons d'éclairer la salle est : $C_8^5 = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2} = 56$.

3.2. Travaux dirigés

1. Tirages successifs, tirages simultanés

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire 3 boules de cette urne. Déterminer le nombre de résultats possibles dans chacun des cas suivants.

a) Tirages successifs avec remise
Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

b) Tirages successifs sans remise
Les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.

c) Tirages simultanés
Les boules sont tirées par paquets de 3.

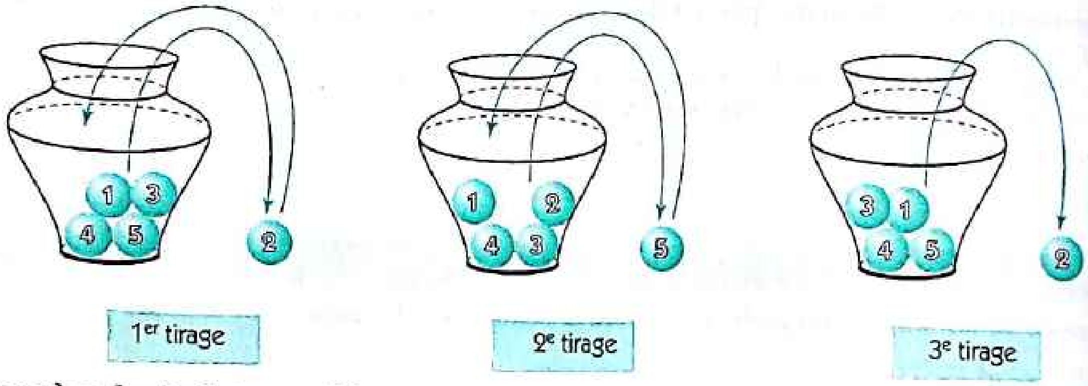
Solution

a) Tirages successifs avec remise

Les boules sont ordonnées puisqu'on les tire l'une après l'autre ; **elles ne sont pas nécessairement distinctes** puisqu'on remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.

Un résultat possible est donc un triplet d'éléments de l'ensemble : $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Par exemple, la figure ci-dessous illustre le résultat (2, 5, 2).



Donc, le nombre de résultats possibles est : $\text{card}(E^3) = 5^3 = 125$.

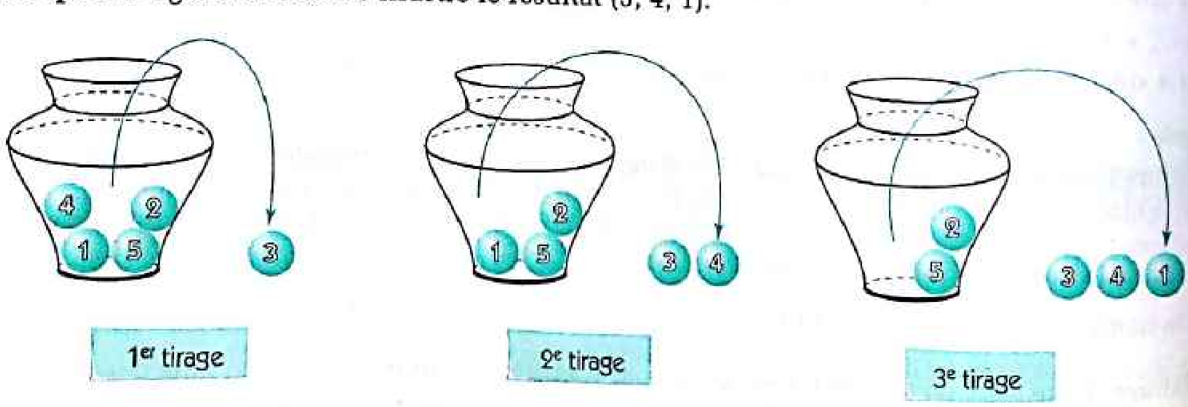
On peut retrouver ce résultat en faisant un arbre de choix.

b) Tirages successifs sans remise

Les boules sont ordonnées puisqu'on les tire l'une après l'autre ; **elles sont distinctes** puisqu'on ne remet pas la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.

Un résultat possible est donc un arrangement de 3 éléments de l'ensemble E.

Par exemple, la figure ci-dessous illustre le résultat (3, 4, 1).

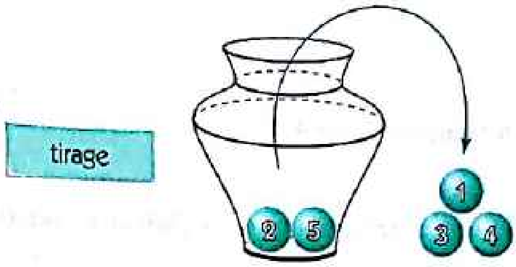


Donc, le nombre de résultats possibles est : $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$.

On peut retrouver ce résultat en faisant un arbre de choix.

c) Tirages simultanés

Les boules ne sont pas ordonnées et elles sont distinctes puisqu'on les tire d'un coup.
Un résultat possible est donc une combinaison de 3 éléments de l'ensemble E.
Par exemple, la figure ci-dessous illustre le résultat {1, 3, 4}.



Donc, le nombre de résultats possibles est : $C_5^3 = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10.$

M Pour déterminer le nombre de tirages de p éléments d'un ensemble E à n éléments ($p \leq n$), on peut utiliser le tableau suivant.

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outil	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	oui	non	p-uplet de E	n^p
Tirages successifs sans remise	oui	oui	Arrangements de p éléments de E	A_n^p
Tirages simultanés	non	oui	Combinaisons de p éléments de E	C_n^p

MBECK BIPANE LINE PAs ESP

2. Le Pari Mutuel Urbain (PMU)

Dès l'Antiquité, à Rome comme aux Jeux Olympiques d'Athènes, les courses de chars à chevaux se disputaient régulièrement.
Le Pari Mutuel Urbain (PMU), créé en 1930 en France, connaît un énorme succès à travers le monde.
Son principe est que les joueurs misent ensemble, ce qui signifie que l'argent collecté est mis en commun et redistribué aux gagnants.

Lors d'une course, 10 chevaux prennent le départ.

1°) Déterminer le nombre d'arrivées possibles, sachant qu'il n'y a pas d'ex æquo.

2°) *Tiercé*
Jouer au tiercé consiste à placer parmi les chevaux choisis les 3 premiers chevaux de l'arrivée.
Supposons que les chevaux soient arrivés dans l'ordre 4, 7, 10, 1, 6, 5, 8, 3, 9, 2.
Celui qui a joué les chevaux 4, 7 et 10 a gagné le tiercé dans l'ordre ;
celui qui a joué les chevaux 7, 10 et 4 a gagné le tiercé dans le désordre.
***a)* Déterminer le nombre de tiercés dans l'ordre.**
***b)* Déterminer le nombre de tiercés dans le désordre.**

3°) *Quarté*
Jouer au quarté consiste à placer parmi les chevaux choisis les 4 premiers chevaux de l'arrivée.
***a)* Déterminer le nombre de quartés dans l'ordre.**
***b)* Déterminer le nombre de quartés dans le désordre.**

Solution

1°) Chaque cheval peut occuper le 1^er^, le 2^e^, ..., le 10^e^ rang.
Le nombre d'arrivées possibles est le nombre de permutations des 10 chevaux partants, c'est-à-dire 10!.
On a : $10! = 10 \times 9 \times \ldots \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$.

2°) *Tiercé*

a) Un tiercé dans l'ordre est un arrangement de 3 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire A_{10}^3.
On a : $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!} = 720$.

b) Un tiercé dans le désordre est une combinaison de 3 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire C_{10}^3. On a : $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3! \times 7!} = 120$.

3°) *Quarté*

a) Un quarté dans l'ordre est un arrangement de 4 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire A_{10}^4.
On a : $A_{10}^4 = \dfrac{10!}{6!} = 5\,040$.

b) Un quarté dans le désordre est une combinaison de 4 chevaux choisis parmi les 10 partants, c'est-à-dire C_{10}^4. On a : $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4! \times 6!} = 210$.

3. Jeux de cartes

*Un jeu de cartes est composé de **4** « couleurs » : le trèfle ♣, le pique ♠, le carreau ♦, le cœur ♥.*
*Chaque couleur comprend **8** cartes dans un jeu de **32** cartes (32 = 4 × 8) ;*
*Chaque couleur comprend **13** cartes dans un jeu de **52** cartes (52 = 4 × 13).*
*En outre, chaque couleur comprend **4** « figures » : l'As, le Roi, la Dame, le Valet.*

Les **4** figures de chaque couleur

As Roi Dame Valet 10 9 8 7 6 5 4 3 2

Les **8** cartes de chaque couleur dans un jeu de **32** cartes

Les **13** cartes de chaque couleur dans un jeu de **52** cartes

Les cartes sont distribuées de manière équitable aux joueurs.
*L'ensemble des cartes reçues par un joueur, après une distribution, est appelé **une main**.*

On considère un jeu de 32 cartes.
Déterminer le nombre de mains différentes de 5 cartes dans les cas suivants :
***a)* les 5 cartes sont quelconques**
***b)* les 5 cartes sont de la même « couleur »**
***c)* il y a exactement 2 Rois parmi les 5 cartes**
***d)* il y a au moins 3 Dames parmi les 5 cartes**
***e)* il y a au plus 2 Valets parmi les 5 cartes.**

Solution

a) Une main est une combinaison de 5 cartes choisies parmi les 32 cartes, c'est-à-dire C_{32}^5.
On a : $C_{32}^5 = \dfrac{32!}{5! \times 27!} = 201\,376$.

b) Les 5 cartes d'une main sont choisies soit parmi les 8 piques, soit parmi les 8 cœurs, soit parmi les 8 carreaux, soit parmi les 8 trèfles ; pour chaque couleur, il y a C_8^5 mains.
On a : $C_8^5 = \dfrac{8!}{5! \times 3!} = 56$.
Le nombre total de mains est : $4 \times C_8^5 = 224$.

c) Pour constituer une main, on doit choisir 2 cartes parmi les 4 Rois et 3 cartes parmi les 28 autres.
Le nombre total de mains est : $C_4^2 \times C_{28}^3$.

On a : $C_4^2 = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$ et $C_{28}^3 = \dfrac{28!}{3! \times 25!} = 3\,276$; donc : $C_4^2 \times C_{28}^3 = 19\,656$.

d) Il y a au moins 3 Dames parmi les 5 cartes signifie qu'il y a, parmi les 5 cartes, soit exactement 3 Dames, soit exactement 4 Dames.

• Dans le premier cas, on choisit 3 Dames parmi les 4 et 2 cartes parmi les 28 autres ;
le nombre de mains est : $C_4^3 \times C_{28}^2$.

• Dans le second cas, on choisit 4 Dames parmi les 4 et 1 carte parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^4 \times C_{28}^1$.

• Le nombre total de mains est : $\left(C_4^3 \times C_{28}^2\right) + \left(C_4^4 \times C_{28}^1\right)$.

On a : $C_4^3 = \dfrac{4!}{3! \times 1!} = 4$; $C_{28}^2 = \dfrac{28!}{2! \times 26!} = 378$; $C_4^4 = 1$; $C_{28}^1 = 28$;

donc : $\left(C_4^3 \times C_{28}^2\right) + \left(C_4^4 \times C_{28}^1\right) = (4 \times 378) + (1 \times 28)$
$= 1\,512 + 28$
$= 1\,540$.

e) Il y a au plus 2 Valets parmi les 5 cartes signifie qu'il y a, parmi les 5 cartes, soit exactement 0 Valet, soit exactement 1 Valet, soit exactement 2 Valets.

• Dans le premier cas, on choisit 0 Valet parmi les 4 et 5 cartes parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^0 \times C_{28}^5$.

• Dans le second cas, on choisit 1 Valet parmi les 4 et 4 cartes parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^1 \times C_{28}^4$.

• Dans le troisième cas, on choisit 2 Valets parmi les 4 et 3 cartes parmi les 28 autres ; le nombre de mains est : $C_4^2 \times C_{28}^3$.

• Le nombre total de mains est : $\left(C_4^0 \times C_{28}^5\right) + \left(C_4^1 \times C_{28}^4\right) + \left(C_4^2 \times C_{28}^3\right)$.

On a : $C_4^0 = 1$; $C_{28}^5 = \dfrac{28!}{5! \times 23!} = 98\,280$; $C_4^1 = 4$; $C_{28}^4 = \dfrac{28!}{4! \times 24!} = 20\,475$;

$C_4^2 = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$; $C_{28}^3 = \dfrac{28!}{3! \times 25!} = 3\,276$;

donc : $\left(C_4^0 \times C_{28}^5\right) + \left(C_4^1 \times C_{28}^4\right) + \left(C_4^2 \times C_{28}^3\right) = (1 \times 98\,280) + (4 \times 20\,475) + (6 \times 3\,276)$
$= 98\,280 + 81\,900 + 19\,656$
$= 199\,836$.

M

Pour dénombrer un ensemble E défini à l'aide des locutions « au moins » ou « au plus », on peut procéder par disjonction des cas et faire la somme des différents résultats.

Pour dénombrer un ensemble E dont chaque élément se (dé)compose en une suite de plusieurs éléments simples par le choix de a, puis de b puis, ..., on peut déterminer le résultat de chaque choix et faire le produit des différents résultats.

Exercices

3.a Combien y a-t-il de façons de choisir 3 questions au hasard parmi 9 ?

3.b Un passionné de lecture a emporté une douzaine de livres mais ne dispose que du temps d'en lire quatre.
a) Déterminer le nombre de listes différentes de livres lus.
b) Déterminer le nombre de listes différentes de livres non lus.

3.c Combien de bureaux différents de sept membres peut-on former avec dix membres d'un conseil d'administration d'une PME (petite et moyenne entreprise) ?

3.d Huit personnes se réunissent dans une salle. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres au début de la réunion.
Quel est le nombre total de poignées de mains échangées ?

Exercices

APPRENTISSAGE

Compléments sur les ensembles

1 Chacun des 50 élèves d'une classe étudie l'anglais ou l'espagnol. On sait que 40 élèves étudient l'anglais et que 20 élèves étudient l'espagnol.
1. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient les deux langues.
2. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement l'espagnol.
3. Déterminer le nombre d'élèves qui étudient une langue et une seule.

2 Le professeur de musique fait une enquête auprès de 150 élèves d'un lycée.
- 116 aiment la musique de variétés ;
- 52 aiment la musique traditionnelle ;
- 40 aiment la musique de variétés et la musique traditionnelle.

Combien d'élèves n'ont pas donné leur avis ?

3 On effectue une enquête sur les goûts des consommateurs concernant les accessoires automobiles.
Sur une population de 1 000 personnes interrogées, 900 souhaitent un véhicule équipé d'une radio, 150 la climatisation et 120 ces deux équipements.
Combien de consommateurs souhaitent au moins l'un de ces deux équipements ?

4 Un club sportif comprend 35 membres.
18 membres pratiquent le football, 16 le basket et 10 les deux sports.
1. Déterminer le nombre de membres du club pratiquant uniquement le football.
2. Déterminer le nombre de membres du club ne pratiquant aucun des deux sports.

5 Un joueur dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et de quatre cartes : une de cœur (♥), une de carreau (♦), une de trèfle (♣), une de pique (♠).
Le jeu consiste à lancer le dé, puis à tirer une carte au hasard. Chaque résutat du jeu est inscrit sous forme de couple. Par exemple, le couple (2 ; ♣) représente le résultat « obtenir 2 avec le dé, puis tirer la carte ♣ ».
1. Compléter le tableau suivant.

Numéro / Carte	1	2	3	4	5	6
♥						
♦						
♣						
♠						

2. Déterminer le nombre de façons d'obtenir un nombre impair.
3. Déterminer le nombre de façons de tirer la carte ♠.
4. Déterminer le nombre de façons d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 et de tirer la carte ♠.
5. Déterminer le nombre de façons d'obtenir un nombre multiple de 2 et de tirer la carte ♥ ou la carte ♦.

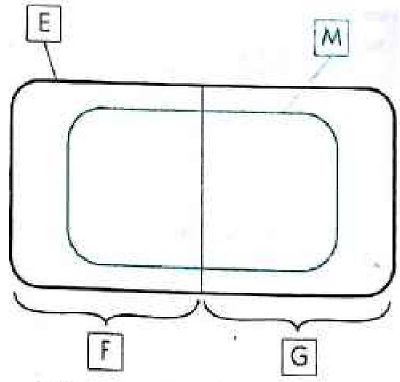
6 La carte d'un restaurant propose au client de composer son menu. Il peut choisir entre 5 hors-d'œuvre, 4 plats de résistance et 6 desserts. Un menu comprend un hors-d'œuvre, un plat de résistance et un dessert.
Combien y a-t-il de menus différents ?

7 Madame Ouattara a 10 foulards, 8 boubous et 6 paires de chaussures. Pour aller à la fête du village, elle veut porter un foulard, un boubou et une paire de chaussures.
De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

8 Un service d'immatriculation attribue à chaque véhicule automobile un numéro minéralogique comportant 4 chiffres suivis d'une lettre et d'un nombre de 1 à 10 correspondant à chacune des régions administratives du pays.
Exemples : 5018A9 ; 2647G3.
Combien de véhicules peut-on ainsi immatriculer ?

9 Une enquête a été faite auprès d'un échantillon E d'élèves d'un lycée. On note F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons et M l'ensemble des élèves (garçons et filles) sachant jouer d'un instrument de musique.
L'enquête révèle que sur 100 élèves du lycée interrogés :
- F a un effectif de 48 élèves ;
- M a un effectif de 40 élèves ;
- il y a, dans l'ensemble M, 18 élèves de l'ensemble F.

1. Compléter le diagramme ci-dessous en indiquant les effectifs des parties définies sur la figure qui n'ont pas d'éléments en commun.



2. Combien d'élèves de l'ensemble G savent jouer d'un instrument de musique ?
3. Combien d'élèves ne savent jouer d'aucun instrument ?

10 La population d'une ville compte 48 % d'hommes et 52 % de femmes.
On sait que 5 % des hommes et 3 % des femmes sont atteints d'une maladie M.

1. Déterminer la proportion des habitants de la ville atteints de la maladie M.
2. Quelle est la proportion de femmes parmi les habitants atteints de la maladie M ?

11 Efficacité d'un vaccin

Un laboratoire veut tester l'efficacité d'un vaccin sur des souris. Certaines ont été vaccinées, d'autres pas. Toutes ont reçu le virus de la maladie considérée. Certaines ont développé la maladie, d'autres pas.
Voici les informations dont on dispose :
- le laboratoire a effectué cette expérience sur 160 souris au total ;
- 90 souris ont été vaccinées ;
- 121 souris ont développé la maladie et, parmi celles-ci, 63 avaient été vaccinées.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Souris ayant développé la maladie	Souris n'ayant pas développé la maladie	Total
Souris vaccinées			
Souris non vaccinées			
Total			

2. En arrondissant chaque résultat à l'entier le plus proche, calculer le pourcentage :
a) de souris n'ayant pas développé la maladie
b) de souris non vaccinées
c) de souris ayant développé la maladie, parmi celles qui n'ont pas été vaccinées
d) de souris ayant développé la maladie, parmi celles qui ont été vaccinées.
3. Que peut-on penser de l'efficacité de ce vaccin ?

p-uplets d'un ensemble, arrangements et permutations

12 Déterminer le nombre de façons de composer un code de 3 symboles, sachant que le premier symbole est une lettre et que les deux derniers sont des chiffres.

13 Le code d'ouverture d'un coffre-fort est composé de 5 chiffres à taper dans un certain ordre sur un clavier à 10 chiffres (0, 1, 2, ..., 9), chaque chiffre pouvant être répété plusieurs fois.
1. Dénombrer tous les codes possibles.
2. Dénombrer les codes ne comportant aucun chiffre pair.
3. Dénombrer les codes comportant au moins un chiffre pair.

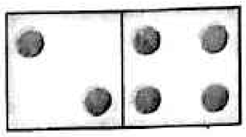
14 Astou forme des nombres avec 5 jetons numérotés de 1 à 5.

1. Combien peut-elle former de nombres de 3 chiffres ?
2. Combien peut-elle former de nombres de 5 chiffres ne comportant que des chiffres pairs ?

15 Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement 3 boules, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
Combien y a-t-il de tirages possibles ?

16 Dans un ordinateur, les bits sont regroupés par 8 pour former des octets qui peuvent représenter des caractères.
Sachant qu'un bit peut valoir 0 ou 1, combien y a-t-il de configurations ?

17 Un domino est un jeton plat rectangulaire dont le dessus est divisé en deux, en son milieu.



Chaque partie porte un nombre entier de points de 0 à 6, ce nombre pouvant être le même ou non sur les deux moitiés.
1. Combien y a-t-il de dominos doubles (ayant le même nombre de points sur leurs deux parties) ?
2. Quel est le nombre de dominos d'un jeu complet, sachant que tous les dominos sont distincts deux à deux ?

18 1. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres ?
2. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres commençant par 2 ?
3. Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres terminés par 45 ?

19 On dispose de 5 pots de peinture jaune, rouge, verte, violette et bleue. On veut peindre 3 portes A, B et C. Les portes doivent être unicolores et de couleurs différentes entre elles.
Combien de possibilités a-t-on ?

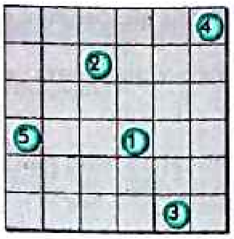
20 Un questionnaire à choix multiples (QCM) est présenté comme l'indique le tableau ci-dessous.

Questions	Réponses
1. Nelson MANDELA est prix Nobel de la Paix	Vrai ☐ Faux ☐
2. Bob MARLEY était un chanteur de rap	Vrai ☐ Faux ☐
...	...
10. Léopold Sédar SENGHOR fut le premier chef d'État du Sénégal	Vrai ☐ Faux ☐

À chaque question, on peut répondre par **Vrai** ou par **Faux** en cochant la case correspondante.
1. Déterminer le nombre de façons de remplir ce questionnaire, sachant que chaque question reçoit une réponse.
2. Déterminer le nombre de façons de remplir ce questionnaire, sachant que certaines questions peuvent être laissées sans réponse.

21 On dispose de quatre CD et de quatre boîtes pour les ranger. On met au hasard un CD par boîte.
Dénombrer toutes les possibilités de « rangement » des quatre CD.

22 Un damier carré comporte 36 cases.
On place cinq jetons numérotés de 1 à 5 sur les cases du damier, à raison d'un jeton par case au maximum.



Combien de possibilités différentes a-t-on ?

23 Huit sprinteurs luttent pour 3 médailles (or, argent, bronze). De combien de façons peut-on attribuer ces médailles ?

24 Une coopérative agricole de 20 membres veut élire un comité de gestion comprenant un président, un secrétaire et un trésorier. Le cumul de postes étant interdit, déterminer le nombre de comités qu'on peut former.

25 Lors du MASA (Marché des Arts et Spectacles Africains) cinq artistes doivent se produire, l'un après l'autre, au Palais de la Culture d'Abidjan.
Combien y a-t-il de façons d'organiser leur passage ?

26 Une salle d'étude contient 10 chaises.
De combien de façons peut-on y installer 6 élèves ? 10 élèves ?

27 On veut installer 6 personnes sur 6 chaises.
1. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Déterminer le nombre de possibilités dans les cas suivants.
a) la première chaise est réservée
b) les deux dernières chaises sont réservées
c) deux chaises sont réservées
d) Françoise et Yves ne veulent pas s'asseoir côte à côte.

28 Marie-Ange forme des nombres avec 6 jetons numérotés de 1 à 6.

4 1 6 5 2 3

1. Combien peut-elle former de nombres de 4 chiffres distincts ?
2. Combien peut-elle former de nombres de 6 chiffres distincts ?

29 On veut former des mots de 5 lettres distinctes avec les lettres A, V, I, O et N.
Exemple : AVION, NOVIA.
1. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Combien y a-t-il de possibilités si les lettres V et N ne sont pas voisines ?

30 Une agence de voyages propose aux touristes une formule de voyage dénommée ***l'Afrique en 8 jours***. Elle consiste à visiter 4 capitales africaines en passant deux jours dans chacune d'elles.
1. Les touristes doivent choisir parmi les capitales suivantes : Abuja, Pretoria, Rabat et Bamako.
Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ?
2. L'agence ajoute deux nouvelles capitales, à savoir Ouagadougou et Lomé.
Combien y a-t-il alors d'itinéraires possibles ?

Combinaisons

31 Une classe de première comprend 20 filles et 15 garçons. Pour participer au concours ***Génie en herbe*** du lycée, on veut former une équipe de 5 élèves.
1. Combien d'équipes peut-on former ?
2. Déterminer le nombre d'équipes comportant :
a) exactement 3 filles
b) aucun garçon
c) au moins un garçon.

32 Un jury est composé de 5 membres choisis dans une liste de 20 personnes dont 12 hommes.
Combien peut-on former de jurys comprenant :
a) seulement des femmes ?
b) 3 hommes et 2 femmes ?
c) au plus 2 hommes ?

33 Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages, sachant que les boules tirées sont de même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages, sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes ?

34 Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 3 noires, 2 blanches et 5 rouges. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.
1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant exactement 2 boules noires.
3. Déterminer le nombre de tirages comportant une boule de chaque couleur.
4. Déterminer le nombre de tirages comportant au moins 2 boules rouges.

35 Une boîte contient 40 transistors indiscernables dont 5 sont défectueux. On tire simultanément 3 transistors dans la boîte.
1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant exactement 1 transistor défectueux.
3. Déterminer le nombre de tirages comportant au moins 2 transistors défectueux.

36 On marque, dans un plan, 5 points tels que 3 d'entre eux ne soient pas alignés.
1. Combien ces points déterminent-ils de droites ?
2. Combien ces points déterminent-ils de triangles ?
3. Combien ces points déterminent-ils de pentagones ?

37 Un magazine propose, pour un sondage, une liste de 8 chanteurs, numérotés de 1 à 8. On demande au lecteur d'entourer les noms de ses 3 chanteurs préférés.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y a-t-il de choix comportant le chanteur numéro 2 ?

3. Combien y a-t-il de choix ne comportant que des numéros impairs ?

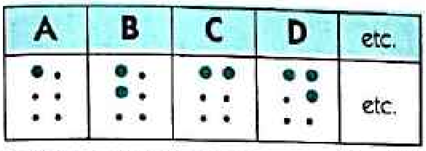
APPROFONDISSEMENT

38 L'écriture MORSE

L'Américain MORSE (1791-1872) a inventé un système d'écriture utilisé en télégraphie. Chaque caractère est représenté par une suite de 1, 2, 3, 4 ou 5 signaux longs (**traits**) ou courts (**points**) comme indiqué ci-après.
A : •– ; B : –••• ; etc.
Combien peut-on représenter de caractères avec ce système d'écriture ?

39 L'écriture BRAILLE

Le Français Louis BRAILLE (1809-1852) a inventé un système d'écriture en relief à l'usage des aveugles. Chaque caractère est représenté sur une matrice de 6 points dont certains sont en relief, comme l'indique la figure ci-dessous.



On ne considère pas comme un caractère l'absence de relief.
Combien peut-on représenter de caractères avec ce système d'écriture ?

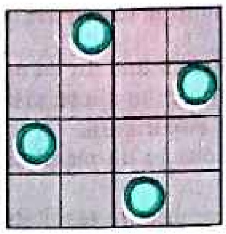
40 Jeu du loto

Jouer au loto consiste à cocher une combinaison de 6 cases sur une grille en comportant 7 × 7, en espérant qu'elle coïncidera avec la combinaison gagnante qui sera désignée par hasard.
1. Déterminer le nombre de jeux distincts possibles.
2. Déterminer le nombre de jeux distincts ne comportant aucun bon numéro.
3. Déterminer le nombre de jeux distincts comportant au moins un bon numéro.
4. Déterminer le nombre de jeux distincts comportant exactement 4 bons numéros.
5. Déterminer le nombre de jeux distincts comportant au plus 3 bons numéros.

41 Une association de 10 personnes, dont 6 femmes, doit élire un bureau de 3 personnes comportant un président, un secrétaire et un trésorier.
1. Combien de bureaux différents peut-on constituer ?
2. Combien y en a-t-il, sachant que le poste de trésorier doit être occupé par une femme ?
3. Combien y en a-t-il, sachant que le poste de trésorier doit être occupé par une femme et celui de président par un homme ?

42 Dans une colonie de vacances, il y a 11 filles, 9 garçons et 4 moniteurs. Cette colonie dispose d'un minibus de 12 places pour ses excursions.
Les excursions sans moniteurs sont interdites.
1. Quel est le nombre de remplissages possibles du minibus ?
2. Déterminer le nombre de remplissages du minibus dans les cas suivants :
a) un seul moniteur doit servir d'accompagnateur ;
b) deux moniteurs désirent rester ensemble.

43 On dispose d'un damier carré de 16 cases.
On place 4 jetons indiscernables sur les cases du damier, à raison d'un jeton par case au maximum.



1. Combien de dispositions des 4 jetons y a-t-il sur le damier ?
2. Déterminer le nombre de dispositions des jetons dans les cas suivants :
a) il y a un jeton sur chaque ligne
b) il y a deux jetons sur une ligne et un jeton sur deux autres lignes
c) il y a deux jetons sur une ligne et deux jetons sur une autre ligne
d) il y a trois jetons sur une ligne et un jeton sur une autre ligne
e) il y a quatre jetons sur une ligne
f) il y a un jeton sur chaque ligne et sur chaque colonne.

44 On dispose de 7 cartons sur lesquels on a écrit respectivement les lettres A, B, C, D, E, F et G.
À l'aide de ces cartons, on veut écrire des mots.
1. Déterminer le nombre de mots de sept lettres que l'on peut écrire.
2. Déterminer le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut écrire.
3. Déterminer le nombre de mots de quatre lettres comportant dans l'ordre, une consonne, une voyelle, une consonne, une consonne.
4. Déterminer le nombre de mots de quatre lettres comportant trois consonnes et une voyelle.

45 Un sac contient 5 jetons portant respectivement les lettres a, i, u, f et g. On tire successivement les 5 lettres et on les aligne pour former un mot.
1. Déterminer le nombre de mots finissant par une consonne.
2. Déterminer le nombre de mots commençant par une voyelle.
3. Déterminer le nombre de mots dont la première et la dernière lettre sont des voyelles.
4. Déterminer le nombre de mots dont la première et la dernière lettre sont des consonnes.

46 De combien de façons peut-on former un comité de trois femmes et de quatre hommes dans un groupe de huit femmes et de sept hommes si monsieur et madame N'Guetta refusent de siéger ensemble ?

47 Un touriste désire visiter Abidjan, Bamako, Cotonou et Dakar.
Dénombrer les trajets possibles dans les cas suivants.
a) l'ordre de visite n'a pas d'importance
b) le touriste veut d'abord visiter Abidjan
c) le touriste veut visiter Bamako avant Cotonou.

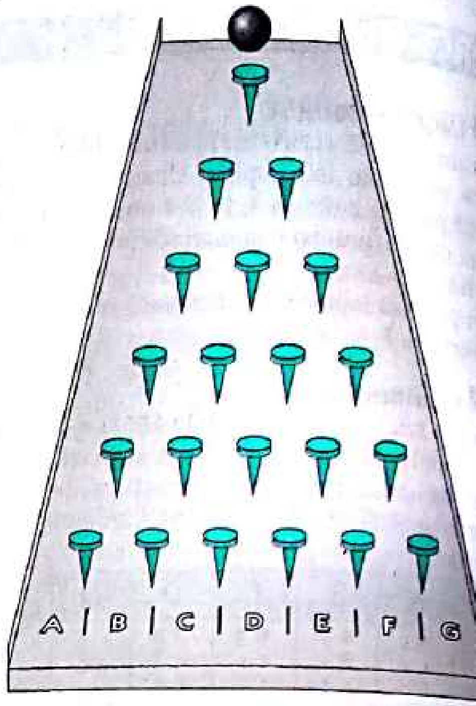
48 La tirelire de Yazid contient 4 pièces de 100 F, 3 pièces de 10 F et 2 pièces de 5 F. On tire simultanément de la tirelire 3 pièces.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Déterminer le nombre de tirages dans les cas suivants :
a) on obtient une somme supérieure ou égale à 200 F
b) on obtient une somme inférieure à 200 F.

49 On lance trois fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et l'on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.
1. Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres identiques.
2. Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres distincts.
3. Déterminer le nombre de résultats comportant exactement deux chiffres identiques.
4. Déterminer le nombre de résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenus est égale à 6.

50 On dispose de trois dés à six faces numérotées de 1 à 6.
On lance simultanément les trois dés et l'on note les chiffres obtenus sur les faces supérieures.
1. Déterminer le nombre de résultats possibles.
2. Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres identiques.
3. Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres distincts.
4. Déterminer le nombre de résultats ne comportant aucun 6.
5. Déterminer le nombre de résultats comportant au moins un 6.
6. Déterminer le nombre de résultats comportant exactement deux 6.

51 On dispose de trois dés identiques constitués chacun de la façon suivante : trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.
On lance simultanément les trois dés et l'on note les chiffres obtenus sur les faces supérieures.
1. De combien de façons peut-on obtenir le nombre 333 ?
2. De combien de façons peut-on obtenir le nombre 123 ?
3. Déterminer le nombre de résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenus est égale à 3.

52 **La planche de Galton**
La figure ci-après représente une planche sur laquelle des clous sont plantés sur plusieurs rangées.
Dans cet exercice, nous prenons 6 rangées de clous.
La planche est tenue verticalement, ou inclinée, et on lance une bille depuis le sommet, bien dans l'axe médian.
La bille commence par heurter le premier clou ; elle rebondit et redescend sur la droite ou sur la gauche.
Elle heurte ensuite le clou de la deuxième ligne situé du côté où elle est redescendue. Elle rebondit dessus et elle descend à nouveau sur la droite ou sur la gauche.
Elle heurte alors un nouveau clou. La bille continue ainsi sa route jusqu'au bas de la planche.
Déterminer le nombre de trajets qui conduisent à chacune des lettres A, B, C, D, E, F et G.



53 On construit une phrase au hasard avec un sujet, un verbe et un complément.
• Le sujet est choisi au hasard parmi : *le chat*, *le bébé*.
• Le verbe est choisi au hasard parmi : *dort*, *mange*, *joue*.
• Le complément est choisi au hasard parmi : *sur mes genoux*, *sur le canapé*, *dans la cuisine*.
1. *a)* Combien peut-on former de phrases différentes ?
b) Combien de phrases ont-elles pour sujet *le chat* ?
2. Dans chaque cas, combien y a-t-il de phrases vérifiant la condition :
a) la phrase a pour sujet *le bébé* et pour complément *sur mes genoux* ?
b) la phrase ne contient ni le sujet *le bébé* ni le complément *sur mes genoux* ?
c) la phrase contient soit le verbe *joue*, soit le complément *sur le canapé*, soit les deux ?

54 L'agence de sécurité Djiguiya dispose de 12 vigiles dont 5 femmes.
1. De combien de façons différentes peut-on former une équipe de 4 vigiles ?
2. Les 12 vigiles sont répartis en trois équipes de quatre personnes.
a) De combien de façons différentes peut-on former les 3 équipes ?
b) De combien de façons différentes peut-on former les 3 équipes, telles que dans chacune d'elles figure au moins une femme ?