3 Nombres complexes

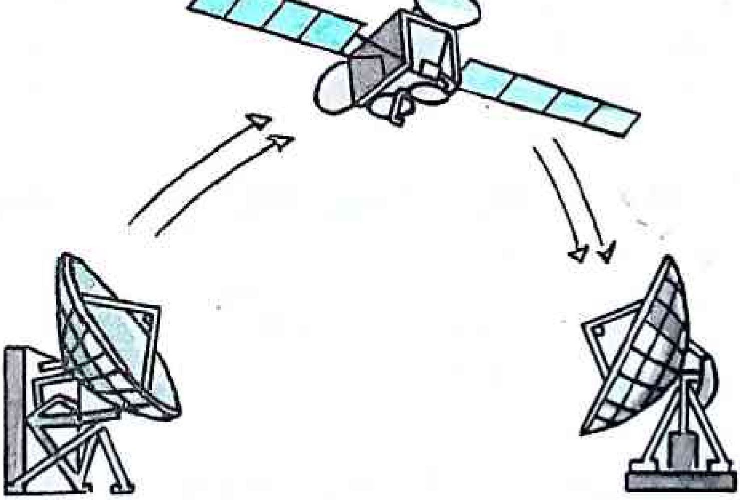
Introduction

« **A**insi, y a-t-il ou non une racine carrée de – 1 ?

Si oui, de quelle sorte d'animal s'agit-il ?
En quoi ce divertissement intellectuel gratuit peut-il concerner les esprits pratiques ? »

Cette réflexion de Ian Stewart fait allusion aux débats philosophiques et aux trois siècles de recherche qui ont abouti au formalisme actuel des nombres complexes.

Ces nombres, que certains mathématiciens du XVI^e siècle qualifiaient d'« impossibles » et d'« inutiles », ont aujourd'hui de nombreuses applications en aérodynamique, en mécanique des fluides, en théorie quantique et en électrotechnique.



$H = A_0e^{j\omega t}$ est une représentation complexe de l'onde électromagnétique.
(A_0 est l'amplitude et ω la phase.)

SOMMAIRE

1 Étude algébrique

1.1. Notion de nombre complexe

Définition et propriétés

1. Soit l'équation (E) : $x^2 + 4x + 5 = 0$.
• Vérifier que : $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$.
• En déduire que : (E) $\Leftrightarrow$ $(x + 2)^2 = -1$.
• Cette équation a-t-elle une solution dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
Supposons qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$ et conservons les règles de calcul utilisées dans $\mathbb{R}$.
• Démontrer alors que (E) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i.

2. Résoudre de même les équations : $x^2 - 6x + 13 = 0$ et $x^2 + 5 = 0$.

Définition

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Notation et vocabulaire

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.
• L'écriture $a + ib$ est appelée ***forme algébrique*** de z.
Le nombre réel a est appelé ***partie réelle*** de z et noté ***Re(z)***.
Le nombre réel b est appelé ***partie imaginaire*** de z et noté ***Im(z)***.
• Si $b = 0$, alors $z = a$; z est un nombre réel ; tout nombre réel est un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
• Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dit ***imaginaire pur***.

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriété

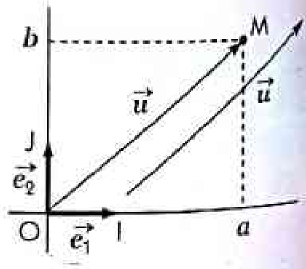
Soit z et z' deux nombres complexes. On a :
• $z = z'$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$;
• $z = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.

*0 est appelé **nombre complexe nul**.*

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

• L'application qui à tout nombre complexe $a + ib$ associe le point $M\binom{a}{b}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{P}$.
$M\binom{a}{b}$ est appelé ***point image*** du nombre complexe $a + ib$;
$a + ib$ est appelé ***affixe*** du point $M\binom{a}{b}$.



• L'application qui à tout nombre complexe $a + ib$ associe le vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.
$\vec{u}\binom{a}{b}$ est appelé ***vecteur image*** du nombre complexe $a + ib$;
$a + ib$ est appelé ***affixe*** du vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.

• Le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est appelé ***plan complexe***.
Un point M d'affixe z de ce plan est souvent noté $M(z)$.

• Les droites de repères $(O, \vec{e_1})$ et $(O, \vec{e_2})$ sont respectivement appelées ***axe réel*** et ***axe imaginaire***.

Exemples

- O, I et J sont les points d'affixes respectives 0, 1 et i.
- $\vec{0}$, $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont les vecteurs d'affixes respectives 0, 1 et i.

1.2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

En appliquant les règles de calcul utilisées dans $\mathbb{R}$ et la convention $i^2 = -1$, on définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$.

Définitions

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
- **La somme de z et z' est le nombre complexe : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.**
- **Le produit de z et z' est le nombre complexe : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.**

Exemples

- $(4 - 5i) + (3 + 2i) = 7 - 3i$
- $3(4 - 5i) = 12 - 15i$
- $2i(4 - 5i) = 10 + 8i$
- $(4 - 5i)(3 + 2i) = 22 - 7i$
- $(2 + 5i)^2 = -21 + 20i$
- $(-1 + 3i)^3 = 26 - 18i$.

L'addition et la multiplication ont les propriétés suivantes.

Propriétés 1

(1) $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif.
(2) $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif.
(3) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

*On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.*

Démonstration

- On vérifie aisément que l'addition et la multiplication, lois de composition internes dans $\mathbb{C}$, sont associatives et commutatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$; 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.
- L'***opposé*** de tout nombre complexe $a + ib$ est le nombre complexe $-a - ib$.
- L'***inverse*** de tout nombre complexe non nul $a + ib$ est le nombre complexe :

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Remarques

- *$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.*
- *L'expression de l'inverse du nombre complexe $a + ib$ n'est pas à retenir ; on la retrouve facilement en remarquant que : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.*
- *On convient que pour tout nombre complexe non nul z : $z^0 = 1$.*

Exemple

$$\frac{1}{4-3i} = \frac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i.$$

Propriétés 2

Soit z et z' deux nombres complexes.
On a : $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

La démonstration de cette propriété est laissée au soin du lecteur.

Soustraction et division dans $\mathbb{C}$

Les propriétés 1 et 2 précédentes conduisent aux définitions suivantes.

Définitions

Soit z et z' deux nombres complexes.

- **La différence de z et z' est le nombre complexe : $z - z' = z + (-z')$.**
- **Si $z' \neq 0$, le quotient de z par z' est le nombre complexe : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.**

Exemples

- $(4 - 3i) - (5 + 6i) = (4 - 3i) + (-5 - 6i) = -1 - 9i$.
- $\frac{5 + 6i}{4 - 3i} = (5 + 6i) \times \frac{1}{4 - 3i} = (5 + 6i)\left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i\right) = \frac{2}{25} + \frac{39}{25}i$.

Produits remarquables

Les propriétés suivantes, démontrées dans $\mathbb{R}$, restent valables dans $\mathbb{C}$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier naturel n non nul, on a :

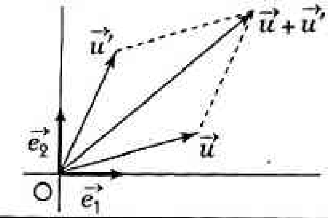
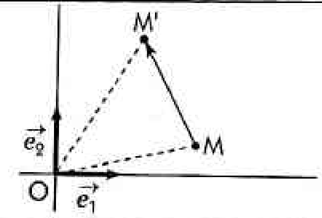
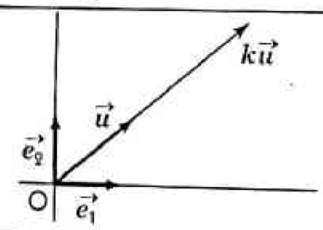
- $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$;
- $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$;
- $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$;
- $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n z^{n-k} z'^k$ ***(formule du binôme de Newton).***

Exemples

- $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$,
- $(1 + i)^3 = 1 + 3i - i = -2 + 2i$.

Affixes de $\vec{u} + \vec{u}'$, $\overrightarrow{MM'}$ et $k\vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}$)

Le tableau suivant donne les interprétations géométriques de certaines opérations dans $\mathbb{C}$.

Somme		$z_{\vec{u}} + z_{\vec{u}'} = z_{\vec{u} + \vec{u}'}$
Différence		$z_{M'} - z_M = z_{\overrightarrow{MM'}}$
Produit par un nombre réel		$kz_{\vec{u}} = z_{k\vec{u}}$

Affixe du barycentre de n points pondérés

Propriété

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$, n points d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, \dots, z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, n nombres réels dont la somme est non nulle.

L'affixe du barycentre G de $(A_1, \alpha_1), (A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ est : $z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$.

Cette propriété est déduite de la définition du barycentre et des propriétés des affixes de vecteurs.

Exemples

- L'affixe du milieu d'un segment [AB] est : $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du centre de gravité d'un triangle ABC est : $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

1.3. Conjugué et module d'un nombre complexe

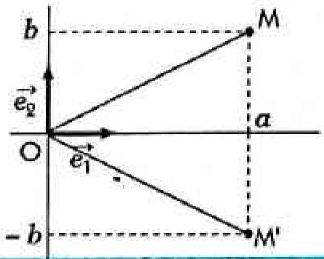
Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.
On appelle conjugué de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, tel que : $\overline{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Exemples

$\overline{1 + i} = 1 - i$; $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$; $\overline{-2 + i} = -2 - i$.

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition.

Propriétés 1

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$. On a :

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$;
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$;
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$;
- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$ et $z \neq 0$.

Exemples

- $\overline{\overline{-3 + 2i}} = \overline{-3 - 2i} = -3 + 2i$;
- $(-3 + 2i)\overline{(-3 + 2i)} = 9 - (-4) = 13$;
- $(-3 + 2i) + \overline{(-3 + 2i)} = -6$;
- $(-3 + 2i) - \overline{(-3 + 2i)} = 4i$.

Propriétés 2

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; (2) $\overline{-z} = -\overline{z}$; (3) $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;

(4) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$; (5) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$; (6) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ $(z \neq 0)$.

Démonstration

Posons : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

(1) et (2) Ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition.

(3) On a : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ et $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$;
donc : $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

(4) Si $z \neq 0$, on a : $z \times \dfrac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{\left(z \times \dfrac{1}{z}\right)} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 1 \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

(5) Si $z' \neq 0$, on a : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

(6) Si $z \neq 0$, on démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Pour $n < 0$, on a : $-n > 0$; donc : $\overline{z^n} = \overline{\left(\dfrac{1}{z^{-n}}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z^{-n}}} = \dfrac{1}{(\overline{z})^{-n}} = (\overline{z})^n$.

Module d'un nombre complexe

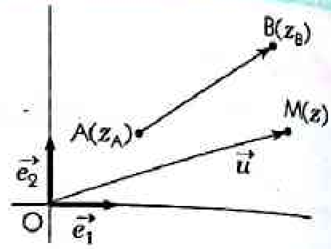
Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.
On a : $z\overline{z} = a^2 + b^2$; donc $z\overline{z}$ est un nombre réel positif.

Définition

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.
On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique

- Si z est l'affixe d'un point M, on a : $|z| = OM$.
- Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, on a : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B, on a : $|z_B - z_B| = AB$.



Exemples

- $|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$; • $\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$; • $|-3i| = \sqrt{0 + 9} = 3$.

Remarques

- *Si $b = 0$, on a : $|z| = |a| = \sqrt{a^2}$; la notation utilisée est cohérente avec celle de la valeur absolue d'un nombre réel.*
- *Pour tout nombre complexe z, on a :* $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.
- *Soit z un nombre complexe, on a :* $|z| = 1$ *si et seulement si* $\overline{z} = \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$;
  $|z| = 1$ *si et seulement si* $z = 0$.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $|zz'| = |z| \times |z'|$; **(2)** $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$;

(3) $|z^n| = |z|^n$ $(z \neq 0)$; **(4)** $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$;

(5) $|z + z'| = |z| + |z'|$ ***(inégalité triangulaire).***

Démonstration

Posons : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

(1) On a : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.
Donc : $|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + i(ab' + a'b)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = |z| \times |z'|$.

(2) Si $z \neq 0$, on a : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\,\frac{b}{a^2 + b^2}$; donc : $\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}$.

(3) Si $z \neq 0$, pour $n > 0$ la propriété (1) et un raisonnement par récurrence permet de démontrer le résultat.
Pour $n < 0$, on a : $-n > 0$; donc : $|z^n| = \left|\frac{1}{z^{-n}}\right| = \frac{1}{|z^{-n}|} = \frac{1}{|z|^{-n}} = |z|^n$.

(4) Si $z' \neq 0$, on a : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$.

(5) L'inégalité triangulaire est déduite de l'interprétation géométrique de $z + z'$.

Exemples

- $|(-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2| = |-\sqrt{3} + i| \times |1 + i|^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$;
- $\left|\frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}\right| = \frac{|-\sqrt{3} + i|^3}{|1 + i|^2} = \frac{2^3}{(\sqrt{2})^2} = 4$.

1.4. Travaux dirigés

On se propose de résoudre sur des exemples des équations du troisième degré du type $x^3 + px + q = 0$, où p et q sont des nombres réels.

1. Soit l'équation $(E_1) : x^3 - 6x - 6 = 0$.

***a)* Vérifier graphiquement que cette équation admet une unique solution réelle, dont on précisera un encadrement à 10^{-1} près.**

***b)* Démontrer que si u et v sont deux nombres tels que $u^3 + v^3 = 6$ et $uv = 2$, alors $u + v$ est solution de (E_1).**

***c)* Démontrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 6X + 8 = 0$.**

Résoudre cette équation et en déduire la solution réelle de l'équation (E_1).

Cette méthode de résolution est appelée « méthode de Cardan ».

2. Soit l'équation $(E_2) : x^3 - 15x - 4 = 0$.

***a)* Vérifier graphiquement que cette équation admet trois solutions réelles.**

***b)* Démontrer que si u et v sont deux nombres tels que $u^3 + v^3 = 4$ et $uv = 5$, alors $u + v$ est solution de (E_2).**

***c)* Démontrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 4X + 125 = 0$.**

Cette équation a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? La résoudre dans $\mathbb{C}$.

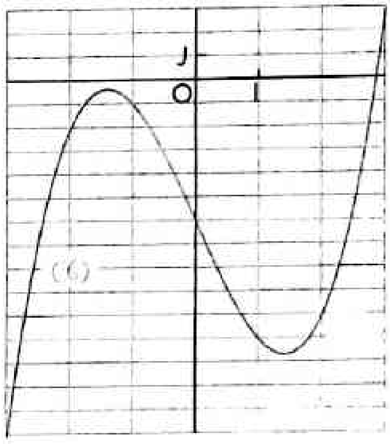
***d)* Calculer $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$. En déduire les solutions de l'équation (E_2).**

Cette méthode, qui complète celle de Cardan en utilisant les nombres complexes, est due au mathématicien Bombelli (1572).

Solution

1. *a)* Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x - 6$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).

L'étude de f et la courbe $(\mathscr{C})$ permettent de vérifier que l'équation (E_1) a une unique solution réelle α ; on obtient un encadrement à 10^{-1} près de α à l'aide d'une calculatrice : $2{,}8 < \alpha < 2{,}9$.



b) On a : $(u + v)^3 - 6(u + v) - 6 = (u^3 + v^3) + 3uv(u + v) - 6(u + v) - 6$
$= 6 + 6(u + v) - 6(u + v) - 6 = 0.$

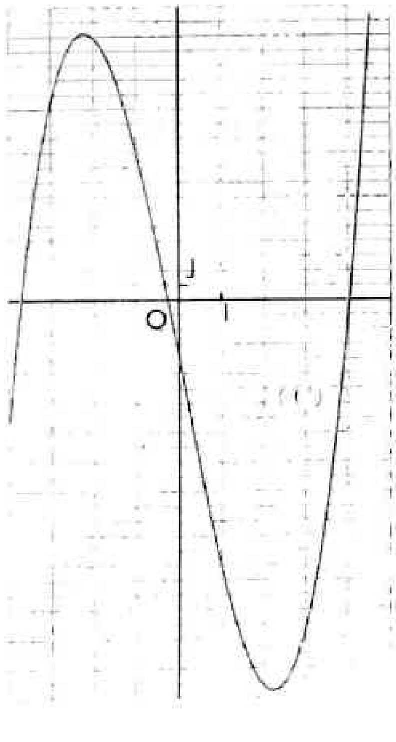
Donc, $u + v$ est solution de (E_1).

c) On a : $u^3 + v^3 = 6$ et $u^3v^3 = 8$.
Donc, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 6X + 8 = 0$.

On obtient : $u^3 = 2$ et $v^3 = 4$.

On en déduit que $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ est la solution réelle de l'équation (E_1).

2. *a)* Soit la fonction $g : x \mapsto x^3 - 15x - 4$ et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).
L'étude de g et la courbe $(\mathscr{C}')$ permettent de vérifier que l'équation (E_2) a trois solutions réelles.



b) On a : $(u + v)^3 - 15(u + v) - 4 = (u^3 + v^3) + 3uv(u + v) - 15(u + v) - 4$
$= 4 + 15(u + v) - 15(u + v) - 4 = 0.$

Donc, $u + v$ est solution de (E_2).

c) On a : $u^3 + v^3 = 4$ et $u^3v^3 = 125$.
Donc, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 4X + 125 = 0$.
$\Delta' = -121$; donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On a : $X^2 - 4X + 125 = 0 \iff (X - 2)^2 + 121 = 0$
$\iff (X - 2 - 11i)(X - 2 + 11i) = 0$
$\iff X = 2 + 11i$ ou $X = 2 - 11i$.

d) On obtient : $u^3 = 2 + 11i$ et $v^3 = 2 - 11i$.
On a : $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ et $(2 - i)^3 = 2 - 11i$.
On en déduit que 4 est une solution de l'équation (E_2).
Pour déterminer les deux autres solutions de cette équation, on remarque que : $(E_2) \iff (x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$.
Les solutions de (E_2) sont : 4, $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

Remarque

Plus généralement une solution réelle de l'équation $x^3 + px + q = 0$, *où* p *et* q *sont des nombres réels, est donnée par la formule de Cardan :* $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Exercices

1.a Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

a) $(1 + 3i) - (2 - 5i)$ *b)* $(1 - 2i)(2 + i)$

c) $2i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ *d)* $(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)$

e) $(2 - 3i)^2$ *f)* $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$.

1.b Calculer et écrire sous forme algébrique les inverses des nombres complexes suivants.

a) $-4 + 3i$ *b)* $\sqrt{2}(-1 + i)$ *c)* $-\sqrt{3} + i$ *d)* i.

1.c Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

a) $\frac{3 - 2i}{1 + i}$ *b)* $\frac{4 + 2i}{4 - 3i}$ *c)* $\frac{i}{3 + 4i}$ *d)* $\frac{3 + 4i}{i}$.

1.d Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $3 + i$, $-2 - i$ et $-1 + 4i$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC.

3. Calculer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

1.e Soit les nombres complexes :

$$z = 2 + i \quad \text{et} \quad z' = 1 - i.$$

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

a) $\overline{(2z + z')}$ *b)* $\overline{\left(z + \frac{2}{z'}\right)}$

c) $\overline{(z^2 + z'^2)}$ *d)* $\overline{(z + z')^2}$.

1.f Calculer le module des nombres complexes suivants.

a) $-\sqrt{3} + i$ *b)* $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})(-3 + 4i)$

c) $\frac{2 + i}{-1 + i}$ *d)* $2(-\sqrt{3} - i)^4$.

2 Étude trigonométrique

Dans cette leçon, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

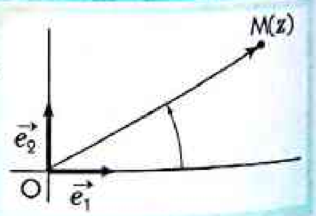
2.1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}})$.



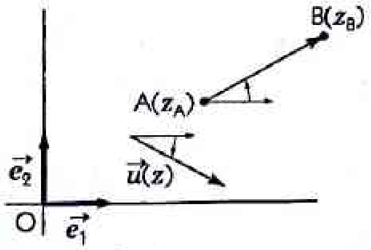
Notation

Si α et α' sont deux arguments de z, on a : $\alpha' = \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

On note : $\arg(z) = \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ou $\arg(z) \equiv \alpha\ [2\pi]$.

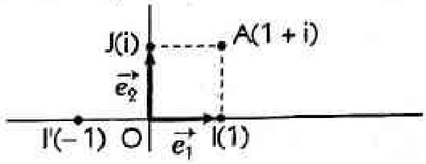
Interprétation géométrique

- Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u}})$.
- Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B, $\arg(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}})$.



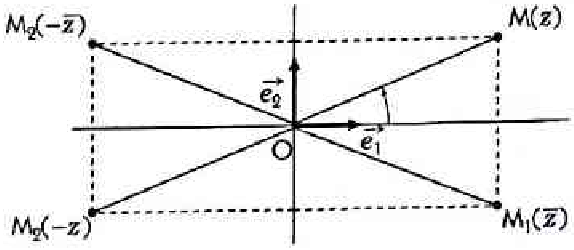
Exemples

$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$;
$\arg(-1) \equiv \pi\ [2\pi]$; $\arg(1) \equiv 0\ [2\pi]$.



Remarques

- *Le nombre complexe nul n'a pas d'argument.*
- *z est réel $\Leftrightarrow$ $z = 0$ ou $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$;*
  z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
- *Pour tout nombre complexe z non nul, on a :*
  $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
  $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$;
  $\arg(-\overline{z}) \equiv \pi - \arg(z)\ [2\pi]$.



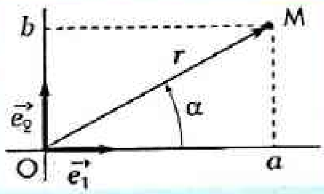
Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$ et M son image dans le plan complexe.
Désignons par r le module de z et α un argument de z.
On a : $a = r\cos\alpha$ et $b = r\sin\alpha$; donc : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α.

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.



Exemples

- $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; • $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

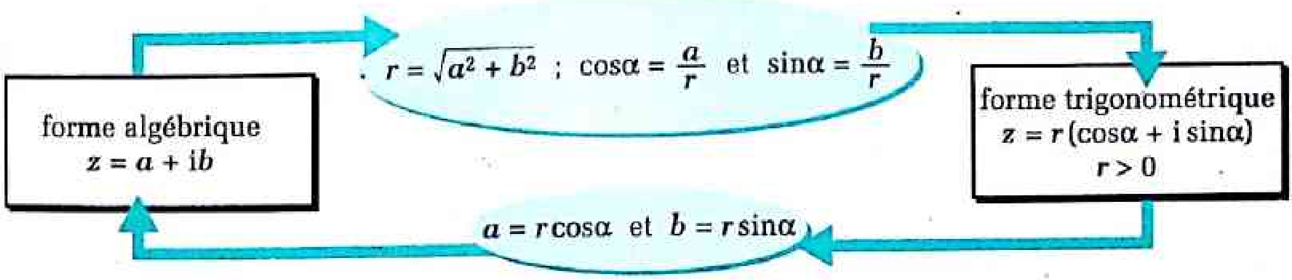
Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$.

Cette propriété se déduit des définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe.

Remarques

- *Soit z un nombre complexe non nul. Les règles de passage entre forme algébrique et forme trigonométrique de z sont résumées par le schéma suivant.*



• *Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;*
– si $r > 0$, la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $\arg(z) \equiv \alpha\ [2\pi]$;
– si $r < 0$, la forme trigonométrique de z est $z = -r[\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi)]$ et $\arg(z) \equiv \alpha + \pi\ [2\pi]$.

Arguments d'un produit et d'un quotient

Propriétés 1

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$; (2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

(3) $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$; (4) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls de formes trigonométriques : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $z' = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$.

(1) On a : $zz' = rr'[(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha')]$
$= rr'[(\cos(\alpha + \alpha') + i\sin(\alpha + \alpha')]$, avec $rr' > 0$.

On en déduit que $\alpha + \alpha'$ est un argument de zz' ; c'est-à-dire : $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

(2) On a : $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \frac{1}{r}[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]$, avec $\frac{1}{r} > 0$.

On en déduit que : $-\alpha$ est un argument de $\frac{1}{z}$; c'est-à-dire : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

(3) Pour $n \geq 0$, la propriété (1) et un raisonnement par récurrence permet de démontrer le résultat.
Pour $n < 0$, on a : $-n > 0$; donc : $z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n}$.

On en déduit que : $\arg(z^n) \equiv -n\arg\left(\frac{1}{z}\right)\ [2\pi]$; c'est-à-dire : $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$.

(4) L'égalité $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ et les propriétés (1), (2) permettent de démontrer le résultat.

Remarque

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
On a : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$.

Exemples

Déterminer les arguments des nombres complexes z_1 et z_2 tels que :
$z_1 = (-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2$ et $z_2 = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}$.

On a : $\arg(-\sqrt{3} + i) \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ et $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$; donc :

- $\arg(z_1) \equiv \frac{5\pi}{6} + (2 \times \frac{\pi}{4})\ [2\pi]$; c'est-à-dire : $\arg(z_1) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$;
- $\arg(z_2) \equiv (3 \times \frac{5\pi}{6}) - (2 \times \frac{\pi}{4})\ [2\pi]$; c'est-à-dire : $\arg(z_2) \equiv 0\ [2\pi]$.

Propriétés 2

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, n un entier relatif.

(1) zz' est le nombre complexe de module $|z| \times |z'|$ et dont un argument est $\arg(z) + \arg(z')$.
(2) $\frac{1}{z}$ est le nombre complexe de module $\frac{1}{|z|}$ et dont un argument est $-\arg(z)$.
(3) z^n est le nombre complexe de module $|z|^n$ et dont un argument est $n\arg(z)$.
(4) $\frac{z}{z'}$ est le nombre complexe de module $\frac{|z|}{|z'|}$ et dont un argument est $\arg(z) - \arg(z')$.

Ces propriétés réunissent celles établies précédemment pour les modules et les arguments.

Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe tel que : $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
z a pour module 1 et argument α ; donc, pour tout entier relatif n, z^n a pour module 1 et argument $n\alpha$.
On en déduit la propriété suivante appelée ***formule de Moivre***.

Propriété

Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif n, on a : $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.

Exemple

Calculer $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1999}$.

On a : $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$; donc : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1999} = \cos\frac{1999\pi}{4} + i\sin\frac{1999\pi}{4}$.

Or : $\frac{1999\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$; donc : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1999} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.2. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Définition et propriétés

Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
Pour tous nombres réels α et β, on a : $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$ et $f'(\alpha) = if(\alpha)$.
L'analogie de ces propriétés avec celles de la fonction exponentielle (cf. chapitre 12) conduit à la notation suivante.

Notation

Pour tout nombre réel α, on pose : $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$.

On déduit de cette notation la définition suivante.

Définition

**Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α.
On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = re^{i\alpha}$.**

Exemples

$1 = e^{i0}$ $\qquad -1 = e^{i\pi}$ $\qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad 1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Sous forme exponentielle, les propriétés établies précédemment s'écrivent de la façon suivante.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\alpha}$ et $z' = r'e^{i\alpha'}$, n un entier relatif. On a :

(1) $zz' = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$; **(2)** $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}$; **(3)** $z^n = r^n e^{in\alpha}$; **(4)** $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha-\alpha')}$.

Exemples

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On a : $zz' = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $z^5 = 243e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $\frac{z}{z'} = 6e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Formules d'Euler

Soit α un nombre réel.
On a : $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$; donc : $\cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$.

On en déduit les propriétés suivantes, appelées *formules d'Euler*.

Propriétés

Pour tout nombre réel α, on a : $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Ces formules sont notamment utilisées en trigonométrie (cf. 3.2.).

2.3. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition et propriétés

Définition

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).
On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Soit Z et z les nombres complexes tels que : $Z = re^{i\alpha}$ et $z = \rho e^{i\theta}$.
Pour tout entier naturel n ($n \geq 2$), on a : $z^n = Z \iff \rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha}$

$$\iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta \equiv \dfrac{\alpha}{n}\left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}.$$

Donc Z admet n racines n-ièmes :

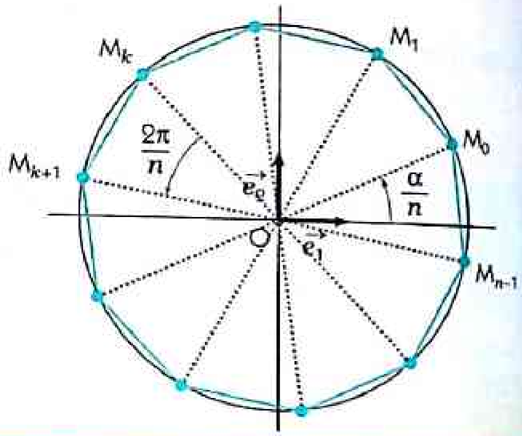
$$z_0 = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\alpha}{n}},\ z_1 = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)},\ \dots,\ z_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ \dots,\ z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}.$$

Interprétation géométrique

On désigne par $M_0, M_1, \dots, M_k, \dots, M_{n-1}$ les images respectives de ces solutions dans le plan complexe.
On a : $OM_0 = OM_1 = \dots = OM_k = \dots = OM_{n-1} = \sqrt[n]{r}$.
De plus, pour tout couple de points (M_k, M_{k+1}), on a :

$$\mathrm{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}}) \equiv \frac{2\pi}{n}\,[2\pi].$$

Donc, les points M_k ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.



On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés

Soit $re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).
- **$re^{i\alpha}$ admet n racines n-ièmes telles que : $z_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$).**
- **Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.**

Remarques

- *La somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.*
- *1 admet n racines n-ièmes telles que : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$).*

Exemples de calculs de racines n-ièmes

1. Calculer les racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$.

On a : $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Posons : $z = \rho e^{i\theta}$; donc : $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$.

On a : $z^2 = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 2 \\ 2\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi] \end{cases}$.

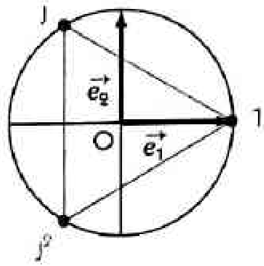
Donc, $1 - i\sqrt{3}$ admet deux racines carrées z_1 et z_2 telles que :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Calculer les racines cubiques de 1.

Posons : $z = \rho e^{i\theta}$; donc : $z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$.

On a : $\quad z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$.



Donc, 1 admet trois racines cubiques z_1, z_2 et z_3 telles que :

$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad$ et $\quad z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- *Les images de z_1, z_2 et z_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.*
- *Si on pose $z_2 = j$, on a : $z_3 = j^2 = \bar{j}$ et $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.*

Donc : $\boxed{1 + j + j^2 = 0.}$

Exercices

2.a Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $2i$ *b)* $\sqrt{3} + 3i$ *c)* $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ *d)* -5.

2.b Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

a) $(2 + 2i)(1 - i)$ *b)* $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$ *c)* $\frac{\sqrt{2}}{1 + i}$

d) $\frac{-2i}{1 + i\sqrt{3}}$ *e)* $(-1 - i)^4$ *f)* $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^2$.

2.c Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b) Écrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit z_1z_2.

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

2.d Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $\cos\alpha - i\sin\alpha$ *b)* $-\sin\alpha + i\cos\alpha$

c) $1 + i\tan\alpha$ *d)* $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$.

2.e Placer dans le plan complexe les points d'affixes respectives :

$e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2.f 1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z = 1 - i\sqrt{3}$ et $z' = -1 - i$.

2. En déduire le module et un argument des nombres complexes : $(\overline{zz'})^2$, $\frac{z^2}{z'}$.

2.g 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3}).$$

2. Écrire chacune des solutions sous forme algébrique.

3 Utilisations des nombres complexes

3.1. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Racines carrées d'un nombre complexe

On a vu dans la leçon précédente une méthode pour déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique.
On peut cependant déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique en utilisant les produits remarquables et les modules. Cette méthode est décrite dans l'exemple ci-après.

Calculer les racines carrées de 3 – 4i.

Posons : $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$; on a : $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ et $|z^2| = x^2 + y^2$.

Donc : $z^2 = 3 - 4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$.

Le dernier système a deux solutions : $(2 ; -1)$ et $(-2 ; 1)$.
Donc, $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -2 + i$ sont les racines carrées de $3 - 4i$.

Équations du second degré

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes $(a \neq 0)$.

On a : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$; posons : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors Δ admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$: δ et $-\delta$.

On a : (E) $\iff a\left[\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\right] = 0$.

Donc, (E) a deux solutions distinctes : $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes $(a \neq 0)$.
On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ.

- **Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.**
- **Si $\Delta \neq 0$, alors (E) a deux solutions distinctes : $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.**

Exemples

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $z^2 + z + 1 = 0$.

On a : $\Delta = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions de (E_1) dans $\mathbb{C}$ sont : $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $iz^2 - iz - 3 - i = 0$.

On a : $\Delta = -1 + 4i(3 + i) = -5 + 12i$.

Déterminons les racines carrées du nombre complexe $-5 + 12i$.

On a : $(x + iy)^2 = -5 + 12i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9. \\ xy = 6 \end{cases}$

Ce système a deux solutions : $(2 ; 3)$ et $(-2 ; -3)$.

Donc, (E_2) a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \frac{i + (2 + 3i)}{2i}$ et $z_2 = \frac{i - (2 + 3i)}{2i}$;
c'est-à-dire : $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + i$.

Équations se ramenant au second degré

1. Soit l'équation (E) : $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$.
***a)* Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.**
***b)* Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.**

a) Posons : $z_1 = ib$ ($b \in \mathbb{R}^*$).

z_1 est solution de (E) $\Leftrightarrow (ib)^3 + (4 - 5i)(ib)^2 + (8 - 20i)ib - 40i = 0 \quad (b \in \mathbb{R}^*)$
$\Leftrightarrow 4b(b - 5) + i(b^3 - 5b^2 - 8b + 40) = 0 \quad (b \in \mathbb{R}^*)$
$\Leftrightarrow b = 5$.

Donc, (E) admet une solution imaginaire pure : $z_1 = 5i$.

b) L'équation (E) peut s'écrire : $(z - 5i)(z^2 + az + b) = 0$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$).
Par identification de polynômes, on obtient : $(z - 5i)(z^2 + 4z + 8) = 0$.

• Soit l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$; on a : $\Delta = -16 = (4i)^2$.
Donc, cette équation a deux solutions : $z_2 = -2 + 2i$ et $z_3 = -2 - 2i$.

• On en déduit que les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $z_1 = 5i$, $z_2 = -2 + 2i$ et $z_3 = -2 - 2i$.

2. Soit l'équation (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.
***a)* Démontrer que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \dfrac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$.**
***b)* Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.**

a) On a : (E) $\Leftrightarrow z^2\left(z^2 - 5z + 6 - \dfrac{5}{z} + \dfrac{1}{z^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow z^2\left[\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + 4\right] = 0.$

Or, 0 n'est pas solution de (E) ; donc, (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \dfrac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$.

b) L'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$ a pour solutions : 1 et 4.

Donc : (E) $\Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = 1$ ou $z + \dfrac{1}{z} = 4$

$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$ ou $z^2 - 4z + 1 = 0$.

On en déduit que les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$,
$z_3 = 2 + \sqrt{3}$ et $z_4 = 2 - \sqrt{3}$.

3.2. Trigonométrie et nombres complexes

Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ ($n \in \mathbb{N}$)

La formule de Moivre permet de retrouver les deux formules de duplication établies en classe de première et de généraliser ces résultats.

• Ainsi : $\cos 2x + i \sin 2x = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x$;
donc : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

• De même : $\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i(3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x)$;
donc : $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ et $\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$;
c'est-à-dire : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

• Plus généralement et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k x \, i^{n-k} \sin^{n-k} x.$$

On en déduit le point méthode suivant.

M

Pour exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, on peut utiliser la formule de Moivre : $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$.
$\cos nx$ et $\sin nx$ sont alors respectivement les parties réelle et imaginaire du développement de $(\cos x + i \sin x)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$ $(n \in \mathbb{N})$

Les formules d'Euler permettent de retrouver les deux formules de linéarisation établies en classe de première et de généraliser ces résultats.

- Ainsi : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2$ et $\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$;

c'est-à-dire : $\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{i2x}+2+e^{-i2x})$ et $\sin^2 x = -\frac{1}{4}(e^{i2x}-2+e^{-i2x})$;

donc : $\cos^2 x = \frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$.

- De même : $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x}-3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-i2x}-e^{-i3x})$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3(e^{ix}-e^{-ix})}{2i}\right) ;$$

donc : $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$

Plus généralement, on a le point méthode suivant.

M

Pour linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$ $(n \in \mathbb{N})$ on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules d'Euler et du binôme de Newton :

- développer et réduire $\cos^n x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ et $\sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$;
- regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et exprimer chacun d'eux en fonction de termes de la forme $\cos kx$ ou $\sin kx$.

Transformation de produit en somme et de somme en produit

Propriétés 1

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$;
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$;
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$.

Démonstration

- En appliquant les formules d'Euler, on a :

$$\cos a \cos b = \left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)\times\left(\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)})$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)].$$

- On démontre de façon analogue les deux autres propriétés.

Propriétés 2

Pour tous nombres réels p et q, on a :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$;
- $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$;
- $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$;
- $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

Démonstration

Soit p et q deux nombres réels.

- On a : $e^{ip}+e^{iq} = (\cos p+\cos q)+i(\sin p+\sin q)$ (1).

En remarquant que $p = \frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}$, on obtient :

$$e^{ip}+e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\left(\cos\frac{p+q}{2}+i\sin\frac{p+q}{2}\right)\cos\frac{p-q}{2}$$

$$e^{ip} + e^{iq} = \left(2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right) + i\left(2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right) \qquad (2).$$

En comparant (1) et (2), on déduit que :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

• En utilisant $e^{ip} - e^{iq} = (\cos p - \cos q) + i(\sin p - \sin q)$, on démontre de façon analogue que :

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Exemple

Linéariser l'expression $\sin 3x \cos^2 2x$.

On a : $\sin 3x\cos^2 2x = \left(\dfrac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\dfrac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8i}(e^{i3x} - e^{-i3x})(e^{i4x} + 2 + e^{-i4x})$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right).$

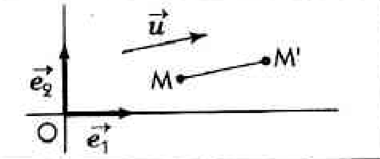
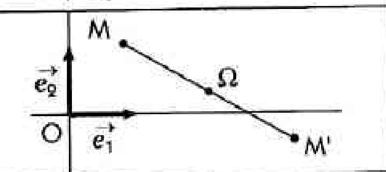
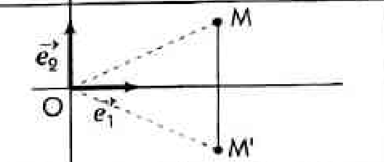
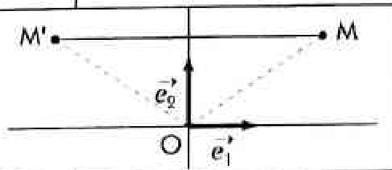
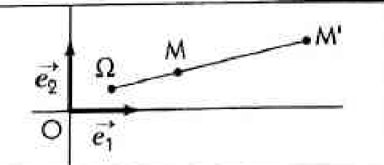
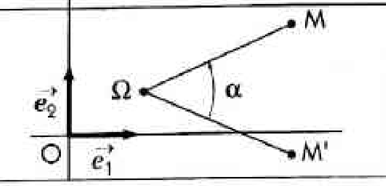
Donc : $\sin 3x\cos^2 2x = \dfrac{1}{4}\sin 7x + \dfrac{1}{2}\sin 3x - \dfrac{1}{4}\sin x.$

3.3. Géométrie et nombres complexes

Dans tout ce paragraphe, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Transformations et nombres complexes

Nous indiquons dans le tableau ci-dessous l'écriture complexe de certaines transformations du plan. Dans ce tableau, $M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacune de ces transformations.

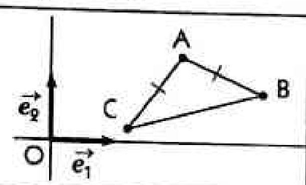
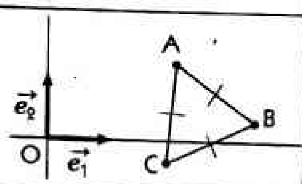
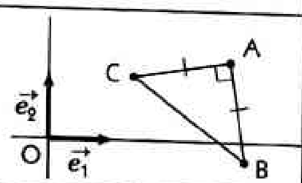
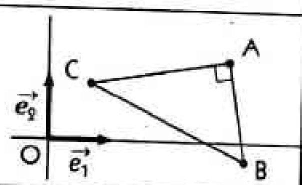
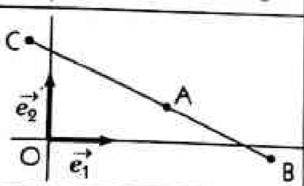
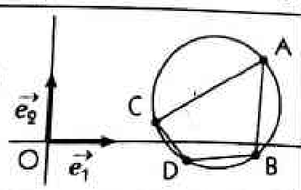
Transformation	Image M' d'un point M	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(a)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Symétrie par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}}) = -(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}}) = \hat{\pi} - (\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Exemples

- La rotation de centre $\Omega\binom{0}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe : $z' - 2i = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - 2i)$;
c'est-à-dire : $z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i$.
Le point $A\binom{1}{\sqrt{3}}$ a pour affixe $1 + i\sqrt{3}$; son image par cette rotation est le point A' d'affixe $2 - \sqrt{3} + i$,
c'est-à-dire le point $A'\binom{2-\sqrt{3}}{1}$.
- La transformation h d'écriture complexe $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$ est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre son unique point invariant.
L'affixe ω de ce point est telle que : $\omega = -\frac{1}{2}\omega + 3 - 6i$; c'est-à-dire : $\omega = 2 - 4i$.

Configurations du plan et nombres complexes

Dans le tableau ci-dessous, nous caractérisons certaines configurations géométriques à l'aide des nombres complexes.

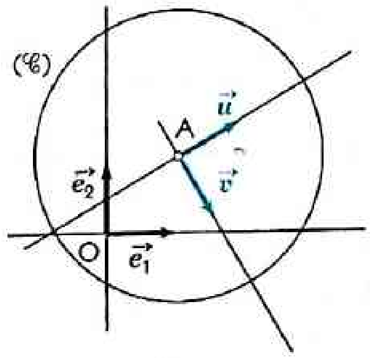
Configuration		Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A		AB = AC et mes $\widehat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral		AB = AC et mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A		AB = AC et mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A		mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$ $(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés		Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv 0$ $[\pi]$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques		Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$ $[\pi]$ (Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \not\equiv 0$ $[\pi]$)	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

Démonstration

- Les caractérisations des triangles isocèle, équilatéral et rectangle isocèle se font à l'aide de la caractérisation complexe d'une rotation.
- Les caractérisations du triangle rectangle et des points alignés se font à l'aide des caractérisations complexes d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire pur.
- La caractèrisation des points cocycliques se fait à l'aide de la caractérisation complexe d'un nombre réel et des lignes de niveau $M \mapsto \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$.

Lieux géométriques et nombres complexes

1. Soit A le point d'affixe z_A tel que : $z_A = 1 + i$.
Déterminer le lieu des points M dont l'affixe z vérifie :
a) $|z - z_A| = 2$.
b) $\arg(z - z_A) \equiv \frac{\pi}{6}\,[\pi]$; $\arg(z - z_A) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.



Solution

a) • On a : $|z - z_A| = 2 \iff AM = 2$.
Le lieu de M est le cercle (𝒞) de centre A et de rayon 2.

b) • On a : $\arg(z - z_A) \equiv \frac{\pi}{6}\,[\pi] \iff \text{Mes}(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[\pi]$.
Le lieu de M est la droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A,
avec $\text{Mes}(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[\pi]$.

• On a : $\arg(z - z_A) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \iff \text{Mes}(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AM}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.
Le lieu de M est la demi-droite de repère $(A, \vec{v})$, privée de A, avec $\text{Mes}(\widehat{\vec{e_1}, \vec{v}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Les propriétés suivantes généralisent l'étude précédente.

Propriétés

Soit A le point d'affixe z_A et M un point d'affixe z.
- **Si R est un nombre réel strictement positif, le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $|z - z_A| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R.**
- **Si α est un nombre réel, le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $\arg(z - z_A) \equiv \alpha\,[\pi]$ est la droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, avec $\text{Mes}(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u}}) \equiv \alpha\,[\pi]$.**

Remarque

Le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $\arg(z - z_A) \equiv \alpha\,[2\pi]$ est la demi-droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, avec $\text{Mes}(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u}}) \equiv \alpha\,[2\pi]$.

2. À tout nombre complexe z, différent de $-2 - i$, on associe le nombre complexe Z tel que :
$Z = \dfrac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$.
Déterminer, géométriquement puis analytiquement, le lieu des points M d'affixe z tels que :
a) $|Z| = 1$; $|Z| = \frac{1}{2}$.
b) **Z est un nombre réel ; Z est un nombre imaginaire pur.**

Solution

Méthode géométrique

Soit A et B les points d'affixes respectifs : $z_A = -2 - i$ et $z_B = 4 + 2i$; on a : $Z = \dfrac{z - z_B}{z - z_A}$.

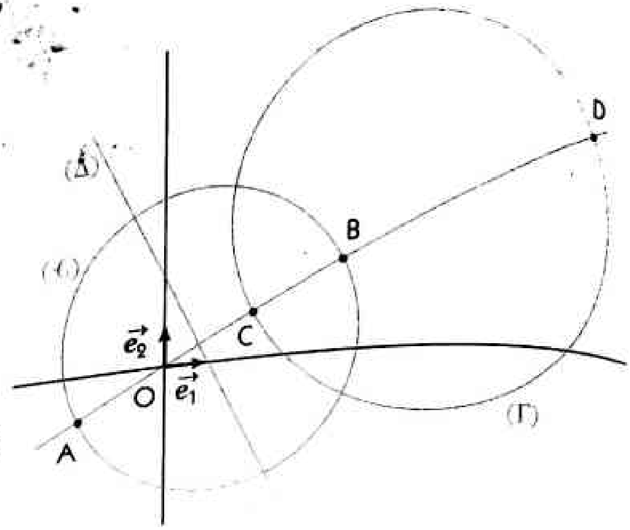
a) • $|Z| = 1 \iff \left|\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right| = 1 \iff MA = MB$.
Le lieu de M est la médiatrice (Δ) de [AB].

• $|Z| = \frac{1}{2} \iff \left|\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right| = \frac{1}{2} \iff \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{1}{2}$.
Le lieu de M est le cercle (Γ) de diamètre [CD] tel que :
C = bar{(A,1) ; (B,2)}, c'est-à-dire : C(2 + i)
D = bar{(A,1) ; (B,– 2)}, c'est-à-dire : D(10 + 5i).

b) • $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = z_B$ ou $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow$ M = B ou $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv 0\ [\pi]$.

Le lieu de M est la droite (AB), privée du point A.



• Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Le lieu de M est le cercle (𝒞) de diamètre [AB] privé des points A et B.

Méthode algébrique

Posons : $z = x + iy$; on a : $Z = \dfrac{(x-4) + i(y-2)}{(x+2) + i(y+1)} = \dfrac{(x^2 + y^2 - 2x - y - 10) + i(-3x + 6y)}{(x+2)^2 + (y+1)^2}$.

Les lieux cherchés seront déterminés par leurs équations.

a) • $|Z| = 1 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow 4x + 2y - 5 = 0$.

• $|Z| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4[(x-4)^2 + (y-2)^2] = (x+2)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0$.

b) • $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x + 6y = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$.

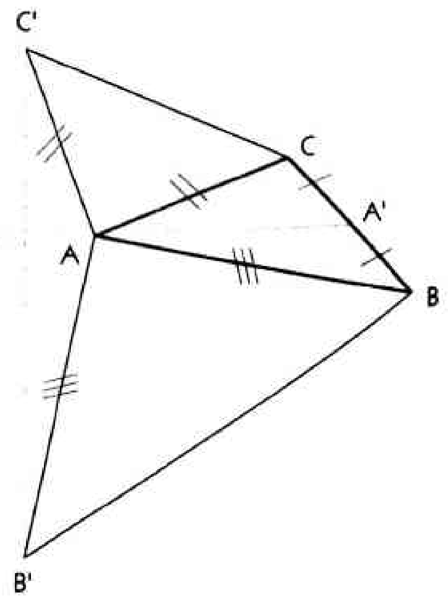
• Z imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - y - 10 = 0$.

c) On désigne par α l'argument de Z.

On a : $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi] \Leftrightarrow \tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \dfrac{-3x + 6y}{x^2 + y^2 - 2x - y - 10} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 7y - 10 = 0$.

3.4. Travaux dirigés

1. Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC]. On construit, à l'extérieur de ce triangle, les triangles rectangles isocèles ABB' et ACC', de sommet A. Démontrer en utilisant les nombres complexes que les droites (AA') et (B'C') sont perpendiculaires et que B'C' = 2AA'.



Solution

• Prenons A pour origine du repère orthonormé direct du plan complexe et supposons le triangle ABC de sens direct.

On a : $z_{A'} = \dfrac{z_B + z_C}{2}$, $\dfrac{z_{B'}}{z_B} = -i$ et $\dfrac{z_{C'}}{z_C} = i$.

Donc : $\dfrac{z_{B'} - z_{C'}}{z_{A'}} = \dfrac{-iz_B - iz_C}{\dfrac{z_B + z_C}{2}} = -2i$;

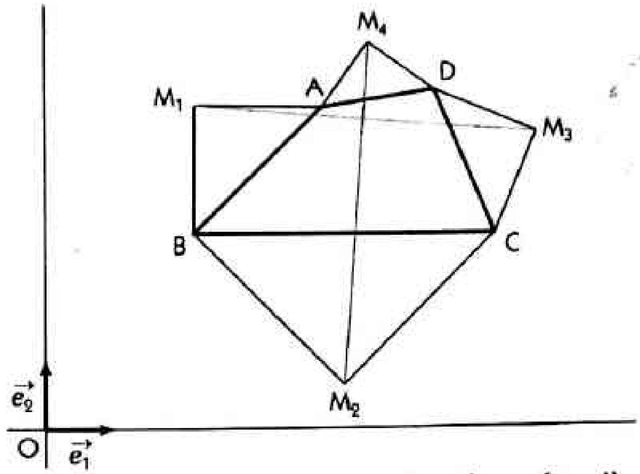
c'est-à-dire : B'C' = 2AA' et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'B'}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

• Lorsque le triangle ABC est de sens indirect, un raisonnement analogue conduit à :

B'C' = 2AA' et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'B'}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Dans les deux cas, les droites (AA') et (B'C') sont perpendiculaires et B'C' = 2AA'.

2. Soit ABCD un quadrilatère convexe.
On construit, à l'extérieur de ce quadrilatère, les triangles rectangles isocèles AM_1B, BM_2C, CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1, M_2, M_3 et M_4.
Démontrer en utilisant les nombres complexes que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux et de même longueur.



Solution guidée

Désignons par z_A, z_B, z_C et z_D les affixes respectives des points A, B, C et D, par z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

Supposons le quadrilatère ABCD de sens direct.

- Démontrer que AM_1B est un triangle rectangle isocèle en M_1 si et seulement si $z_1 = \dfrac{z_A(1-i) + z_B(1+i)}{2}$.
- À quelles conditions les triangles BM_2C, CM_3D et DM_4A sont-ils rectangles isocèles respectivement en M_2, M_3 et M_4 ?
- En déduire que : $\dfrac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1} = i$.
- Conclure.

Que se passe-t-il lorsque le quadrilatère ABCD est de sens indirect ?

Exercices

3.a Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.
a) $15 - 8i$ *b)* $2i$ c) $11 + 4i\sqrt{3}$ *d)* $-i$.

3.b Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $iz^2 + z - 3 + i = 0$
b) $(-2 + i)z^2 + (4 - 5i)z + 3 - i = 0$.

3.c Soit l'équation (E) :
$$z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = 0.$$
1. Vérifier que i est une solution de (E).
2. Trouver un polynôme P du second degré tel que : $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = (z - i)P(z)$.
3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

3.d 1. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.
2. Exprimer $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.

3.e Linéariser :
a) $\cos^4 x + \sin^4 x$ *b)* $\sin^4 x + \sin^2 x$
c) $\cos^3 x \sin^3 x$ *d)* $\cos^3 x \sin^2 x$.

3.f Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $\cos 5x + 2\cos 3x + \cos x = 0$
b) $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x = 0$
c) $\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x$
d) $\sin 3x - \sin 2x = \sin x$.

3.g Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
a) $z' = -z + 2 + i$ *b)* $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 4i$
c) $z' = -\frac{1}{3}z + 2 - i$ *d)* $z' = -iz + 1 + i$.

3.h Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
a) $|\bar{z} - 1 + 2i| = 3$ *b)* $|z - 3 + i| = 3$
c) $\arg(z - 3i) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ *d)* $\arg(iz + i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

3.i Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
a) $|z - 2 + i| = |\bar{z} - i|$ *b)* $|z - 2 + i| = |z|$
c) $\left|\dfrac{z - 3i}{z - 2 + i}\right| = 1$ *d)* $|z - 3 + i| = |2z - 4i|$.

3.j À tout nombre complexe z, différent de $2 - i$, on associe le nombre complexe :
$$Z = \frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i}.$$
Déterminer les ensembles de points M d'affixe z tels que :
a) Z soit un nombre réel ;
b) Z soit un nombre imaginaire pur.

Exercices

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

APPRENTISSAGE

Étude algébrique des nombres complexes

1 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

a) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ *b)* $\frac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}$ *d)* $\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$

e) $\frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4}$ *f)* $\left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^2$.

2 Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $(3+4i)^3$ *b)* $(2-i)^3$

c) $\frac{2+i}{3+4i}-\frac{3-4i}{2-i}$ *d)* $(3+4i)^3-(2-i)^3$.

3 Pour quelles valeurs du nombre réel x le nombre complexe $[10-x+i(2+x)](x-i)$ est-il un nombre réel ? un nombre imaginaire pur ?

4 Vérifier que : $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}-1=0$.

5 1. Calculer i^3, i^4 et i^5. En déduire i^{18} et i^{19}.
2. Calculer $1+i+i^2+i^3$, puis $i^{199}+i^{200}+i^{201}+i^{202}$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{2000} i^k$ et $\sum_{k=0}^{2002}(-i)^k$.

6 Écrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants.

a) $(4-i\sqrt{3})(1+i)$ *b)* $\frac{2-i}{-3i+i}$

c) $\frac{(1-i)(2+i)}{2i(-3+i)}$ *d)* $\frac{(2-3i)(1+i)}{(2-i)^2}$.

7 Soit $z_1=\frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z_2=\frac{3-2i}{5+7i}$.
Démontrer, sans calcul, que z_1-z_2 est un nombre réel et z_1+z_2 un nombre imaginaire pur.

8 Calculer le module des nombres complexes suivants.

a) $\frac{2}{1-i}$ *b)* $-\frac{1}{4i}$

c) $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)}$ *d)* $\frac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}$

e) $\frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$ *f)* $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$.

9 Déterminer les nombres complexes z tels que $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|$.

10 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants.

a) $\begin{cases}(1+i)z-iz'=2+i\\(2+i)z+(2-i)z'=7-4i\end{cases}$

b) $\begin{cases}(2+i)z+7z'=1+2i\\(1-i)\bar{z}-i\bar{z}'=4-i\end{cases}$.

Étude trigonométrique des nombres complexes

11 Dans chacun des cas suivants :
– déterminer le module et un argument de z ;
– en déduire la forme algébrique de z.

a) $z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

b) $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $z=(1+i)^2$ *e)* $z=(1-i)^4$

f) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ *g)* $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3$.

12 Soit $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
b) Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

13 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

a) $(-1-i)i$ *b)* $(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})$

c) $\frac{i}{1-i}$ *d)* $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

e) $\frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ *f)* $\frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}$ *g)* $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10}$.

14 Soit z un nombre complexe tel que :
$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta.$$
Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta.$$

15 Soit $z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$.

a) Écrire sous forme exponentielle z_1 et z_2.

b) En déduire la forme algébrique des nombres complexes : z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^3$ et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$.

16 Soit $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ et $u = 1 + j$.
1. Démontrer que : $1 + j + j^2 = 0$.
2. Calculer u^n ($n \in \mathbb{N}^*$) en fonction de n.

17 Soit $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.
1. Écrire i en fonction de j puis démontrer que tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme :
$$z = \alpha + j\beta \ (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}).$$
2. Déterminer une relation entre α et β pour que le nombre complexe $\alpha + j\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$) ait pour module 1.

18 1. Déterminer le module, un argument, la partie réelle et la partie imaginaire des racines 4-ièmes de $-i$.
2. Placer dans le plan complexe les points images de ces racines.
3. Calculer la somme et le produit de ces racines.

19 1. Calculer : $(2 + i)^3$.
2. En déduire les racines cubiques de $2 + 11i$.

20 Déterminer les nombres complexes vérifiant $2z^3 = 8i$, puis représenter leurs images dans le plan.

21 Soit (z_n) la suite définie dans $\mathbb{C}$ par :
$$z_0 = 1 + i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n.$$
1. Démontrer que $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer $\arg(z_n)$ en fonction de n, puis z_n en fonction de z_0 et n.

22 Soit n un entier naturel.
On pose : $A = \sum_{k=0}^{n-1}\cos kx$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1}\sin kx$.
1. Calculer et écrire sous forme exponentielle $A + iB$.
2. En déduire des expressions plus simples de A et B.

Résolutions d'équations

23 Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.
a) $z = 5 - 12i$ *b)* $z = -8i$ *c)* $z = 7 + 24i$.

24 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - 2 = 0$.
2. On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation, avec $\mathrm{Re}(z_1) > \mathrm{Re}(z_2)$.
Calculer : $2z_1 + 3z_2$; $(z_1 - z_2)^2$; $(z_1)^8$; $(z_2)^{10}$.

25 1. Calculer : $(1 + 8i)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$(2 + i)z^2 - (9 + 2i)z + 5(3 - i) = 0.$$

26 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
$$z^2 - 4z + 5 + i(z + 1) = 0 \quad (1)$$
$$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \quad (2).$$
2. En déduire qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d que l'on précisera tels que pour tout nombre réel x, on a : $(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$.

27 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter graphiquement les images des solutions.
a) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$ *b)* $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

28 Soit P le polynôme défini par :
$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2(1 - i).$$
1. Déterminer trois nombres complelxes a, b et c tels que : $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

29 Soit P le polynôme défini par :
$$P(z) = z^4 + (5 - 2i)z^3 + (8 - 10i)z^2 + (6 - 16i)z - 12i.$$
1. Vérifier que : $P(2i) = P(-3) = 0$.
2. Déterminer un polynôme Q du second degré tel que pour tout nombre complexe z, on a :
$$P(z) = [z^2 + (3 - 2i)z - 6i]Q(z).$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

30 Soit P le polynôme défini par :
$$P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42.$$
1. Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha)\,Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

31 Soit P le polynôme défini par :
$$P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i).$$
1. Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $i\beta$ solution de l'équation : $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - i\beta)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

Transformations et nombres complexes

32 Soit les points $\Omega\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Dans chacun des cas suivants :
- donner l'écriture complexe de la transformation ;
- déterminer l'image de A par la transformation.

a) Symétrie de centre Ω.
b) Homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.
c) Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

33 1. Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :
a) s : symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -2$.
b) s' : symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 1$.
2. Donner l'écriture complexe de $s \circ s'$ et $s' \circ s$.
En déduire que $s \circ s' = s' \circ s$ et préciser la nature de cette transformation.

34 Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont on donne l'écriture complexe.
a) $z' = \bar{z} - 4i$ *b)* $z' = -\bar{z} + 2$
c) $z' = -4z + 10 - 5i$ *d)* $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + \sqrt{2} - i$.

35 Soit f la transformation du plan dont l'écriture complexe est : $z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + 4\sqrt{3} - 2i$.

1. Déterminer le nombre complexe z_0 tel que :

$$z' - z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_0).$$

2. En déduire que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre, que l'on précisera.

Configurations planes

36 Soit a un nombre complexe non nul et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Démontrer que les points A(a), B(ja) et C(j^2a) sont les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct.

37 Soit A(3 + i), B(2i), C(2 – 2i).

1. Placer les points A, B et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

2. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D.

3. Déterminer l'affixe du point E, symétrique de A par rapport au milieu de [BC].

38 Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-\frac{1}{3} - 2i$, $1 + 2i$ et $\frac{7}{3} + 6i$.

1. Démontrer que B est le milieu de [AC].

2. Déterminer les affixes des points D et E tels que ADCE soit un carré de sens direct.

39 Soit A, B et C les points d'affixes respectives $1 + 2i$, $2 + i$ et $2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B et déterminer une mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

2. Déterminer le point D, symétrique de A par rapport à B. Quelle est la nature du triangle ADC ?

40 Soit les points A(– 1 + i), B(– 1 – i), C(2i) et D(2 – 2i).

1. Étudier la nature des triangles ACD et BCD.

2. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Lieux géométriques

41 Déterminer et représenter les ensembles de points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $|z + \overline{z} - 1| = 4$ *b)* $|z - \overline{z} - 1 + i| = 2$

c) $\arg(3i - z) \equiv 0\ [2\pi]$ *d)* $\arg(\overline{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$

e) $\arg\left(\frac{1}{z + 2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *f)* $\arg(z^2 - 4) \equiv \arg(z + 2)\ [2\pi]$.

42 Déterminer les ensembles de points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $|z + 5 - 2i| = |\overline{z} - 2 + i|$

b) $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$.

43 À tout nombre complexe z distinct de i, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z + i}{z - i}$.

Déterminer et représenter les ensembles de points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) Z est un nombre réel strictement positif.

b) Z est un nombre réel strictement négatif.

c) Z est un nombre imaginaire pur.

d) $|Z| = 1$.

e) $|Z| = 3$.

44 À tout nombre complexe z distinct de $-1 + 2i$, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}.$$

Déterminer les ensembles de points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $|Z| = 1$. *c)* Z est un nombre réel.

b) $|Z| = 2$. *d)* Z est un nombre imaginaire pur.

45 Déterminer et contruire l'ensemble des points du plan dont l'affine z vérifie la condition indiquée.

a) $z\overline{z} + i(z - \overline{z}) - 3 = 0$ *b)* $(z\overline{z})^2 - z\overline{z} - 6 = 0$.

46 Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $(z - 1 - i)(\overline{z} - 1 + i) = 5$

b) $2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i|$

c) $z^2 - (1 - 2i)^2 = \overline{z}^2 - (1 + 2i)^2$.

47 Déterminer et contruire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $\frac{2z - 1}{z^2}$ est un nombre réel.

b) $\frac{4 - (z + \overline{z})i}{1 - i + \frac{1}{2}(z - \overline{z})}$ est un nombre réel.

APPROFONDISSEMENT

48 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$ *b)* $\frac{1 - \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}$, $\alpha \in [0 ; \pi[$

49 Soit α un nombre réel tel que $-\pi < \alpha < \pi$ et z le nombre complexe défini par : $z = 1 + \cos\alpha - i\sin\alpha$.

1. Calculer $|z|$, $\arg(z)$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right)$ en fonction de α.

2. Préciser les ensembles des images de z et de $\frac{1}{z}$.

50 Démontrer que si A, B et C désignent les mesures des angles d'un triangle, on a :

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

51 **1.** Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument α $(0 \leq \alpha < 2\pi)$.

Préciser, selon les valeurs de α, le module et un argument de $z + 1$.

Conjecturer et vérifier ces résultats par des considérations géométriques, illustrées par des figures.

2. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1, d'arguments respectifs α_1 et α_2 tels que :

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2\pi.$$

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ et de $z_1 + z_2$.

(On pourra utiliser la question 1 en posant : $z = \frac{z_2}{z_1}$)

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1 + z_2| = 1$; illustrer par une figure.

c) Déterminer l'ensemble des triplets $(z_1 ; z_2 ; z_3)$ de nombres complexes de module 1 tels que :
$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ et $0 \leq \arg(z_1) \leq \arg(z_2) \leq \arg(z_3) < 2\pi$.

52 Construction d'un pentagone régulier

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a) Démontrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (E) :
$$Z^2 + Z - 1 = 0.$$

b) Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

c) Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4.

a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{e_1})$.
Démontrer que l'affixe du point H est $\cos\frac{2\pi}{5}$.

b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i.
(Γ) coupe la droite de repère $(O, \vec{e_1})$ en M et N, M étant le point d'abscisse positive.
Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de [OM].

c) En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

53 1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$.
Écrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) Placer les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative.
Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

b) Déterminer sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique l'affixe du point A', image de A par f.
En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

54 On considère les nombres complexes :
$$a = -\sqrt{3} + i,\ b = 3 + 2i \text{ et } c = 7 - 2i.$$

1. a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a.
En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel.

c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

2. Déterminer et construire les ensembles de points M d'affixe z tels que :

a) $|z - b| = |z - c|$ b) $2|z - b| = |a|$.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que f admet un seul point invariant Ω.

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω.
Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

c) Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminés à la question 2.

55 Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.
On pose : $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.
2. Calculer $a + b$ et ab. En déduire a et b.

56 Soit a et b deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.

1. a) Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\bar{a}b$ est un nombre réel.

b) Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel si et seulement si les points O, A et B sont alignés ou si OA = OB.

2. On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que les nombres complexes a et b ont pour module 1.
Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif.

3. ***Application***
Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer, en fonction de z_1 et z_2, l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1, |z_2|) ; (M_2, |z_1|)\}$.

b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1z_2}$ est un nombre réel.

c) En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$.

57 Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et 2i.
À tout nombre complexe z distinct de 2i, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C}_1)$ des points M d'affixe z tels que : $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
2. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C}_2)$ des points M d'affixe z tels que : $|Z| = 2$.
3. Démontrer que $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ont un unique point commun dont on précisera l'affixe.

58 Soit A le point d'affixe 2i et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}.$$

1. Démontrer que f admet deux points invariants.
2. Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Démontrer que la droite de repère $(O, \vec{e_2})$, privée de A, est globalement invariante par f.
4. a) Démontrer que : $|z' - 2i||z - 2i| = 9$.

b) En déduire l'image par f du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon R.
Déterminer R pour que $(\mathscr{C})$ soit globalement invariant par f.

59 Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que : $zz' = 1$.

1. a) Déterminer et construire l'image par f du point C d'affixe $1 + i$.

b) Démontrer que pour tout point M et son image M', la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$ et que $OM \times OM' = OA^2$.

2. *a)* Vérifier que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{z+z'}{2}-1\right)\left(\frac{z+z'}{2}+1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2.$$

b) Soit I le milieu de [MM'].
Démontrer que $IA \times IB = IM^2$ et que pour tout point M distinct de A et B, la droite (MM') est bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$.

60 Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et -3. À tout point M d'affixe z, distinct de A et B, on associe, s'ils existent, le(s) point(s) M' d'affixe z' tel(s) que : $\frac{z'+3}{z+3}$ est imaginaire pur et $\frac{z'-1-i}{z-1-i}$ est réel.

1. Donner une interprétation géométrique de $\arg\left(\frac{z'+3}{z+3}\right)$ et $\arg\left(\frac{z'-1-i}{z-1-i}\right)$.

2. Démontrer géométriquement qu'il existe un cercle $(\mathscr{C})$ tel que si $M \notin (\mathscr{C})$, alors M' existe et est unique.
Construire alors l'image M' d'un point M donné.

61 Soit A et B deux points d'affixes respectives a et b.

1. Démontrer qu'il existe un unique point M dont l'affixe z vérifie : $\left|\frac{z'-a}{z-b}\right| = 2$ et $\arg\left(\frac{z'-a}{z-b}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Construire ce point et calculer son affixe lorsque : $a = -4 + 2i$ et $b = 2 - i$.

62 **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^4 = 1 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1 \qquad (2).$$

2. Soit n un entier naturel non nul, a un nombre complexe et l'équation (E) : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = a$.

On désigne par P, Q et M les points d'affixes respectives i, $-$i et z.

a) Démontrer que si z est solution de (E), alors :

$$\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|a|}.$$

b) Démontrer que si (E) admet au moins une solution réelle, alors : $|a| = 1$.

c) En déduire que si (E) admet au moins une solution réelle, alors toutes ses solutions sont réelles.

63 Soit l'équation (E) :

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

1. Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors [illegible] solution de (E).

2. *a)* Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \iff z^2\left[\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z - \frac{1}{z}\right) + b\right] = 0.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation (E).

3. Démontrer que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

64 Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représenter les images des solutions.

2. Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que : $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0.$$

En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

4. Soit l'équation (E') : $(z-1)^5 = (z+1)^5$ $(z \in \mathbb{C})$.

a) Démontrer que si z_0 est solution de (E'), alors :

$$\left|\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}\right| = 1.$$

En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures.

b) Résoudre (E').