Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : BACCALAUREAT Session
Série : C/E
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4h Coef : 7/6

L'épreuve comporte deux parties indépendantes réparties sur deux pages.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (13,25 points)

EXERCICE 1 : 3 points

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, f(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{k}$ et $f(\vec{k}) = 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

1) Déterminer la matrice A de f dans la base B. **0,5 pt**
2) Montrer que $\ker f$ est une droite vectorielle dont on précisera une base. **0,5 pt**
3) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel dont on précisera une base. **0,5 pt**
4) Soit B'=$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ avec $\vec{e_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e_2} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{e_3} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$.
a) Montrer que B' est une base de E. **0,25 pt**
b) Montrer que $\vec{e_1} \in \ker f$ et que $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\operatorname{Im} f$. **0,5 pt**
c) Montrer que $f(\vec{e_2}) = -3\vec{e_2} - \frac{1}{2}\vec{e_3}$ et $f(\vec{e_3}) = -8\vec{e_2} - \vec{e_3}$. **0,5 pt**
d) En déduire la matrice A' de f dans la base B'. **0,25 pt**

EXERCICE 2 : 3,25 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; I, J)$. On considère l'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}(x - y) = 0$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{4}$, $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son image par r.

1) Exprimer x' et y' en fonction de x et y. **0,5 pt**
2) Montrer que, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x'^2 = y'$ et en déduire que (Γ) est l'image de la courbe (C) d'équation $x^2 = y$ par r^{-1}. **0,75 pt**
3) Déterminer le foyer et une équation de la directrice de (C) et en déduire ceux de (Γ). **1 pt**
4) Construire (C) et (Γ). **1 pt**

EXERCICE 3 : 3 points

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement $-1; 0; 0; 1$ tous indiscernables au toucher. On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac, on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac, puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac. Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés. A chaque tirage de trois jetons, on associe dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le point M de coordonnées (x, y, z). Soit $A(1, -1, -1)$ un point de cet espace.

1) Démontrer que la probabilité pour que le point M soit en A est égale à $\frac{1}{64}$. **0,75 pt**
2) On note E_1 l'événement : « M appartient à l'axe des abscisses ». Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$. **0,75 pt**
3) Soit (P) le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{n}(1,1,1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (P). **0,5 pt**
b) On note E_2 l'événement « M appartient au plan (P) ». Quelle est la probabilité de E_2? **1 pt**

EXERCICE 4 : 4 points

Soit α un réel donné et f_α la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f_\alpha(x) = (\alpha - 1)\ln x - \alpha\ln(x+1)$.

1) Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = -\infty$. **0,25 pt**
2) Déterminer suivant les valeurs de α, $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x)$. **0,75 pt**
3) Etudier le sens des variations de la fonction f_α : On distinguera les cas $\alpha > 1$; $\alpha = 1$ et $\alpha < 1$. **0,75 pt**
4) On pose $f(x) = f_8(x) = 7\ln x - 8\ln(x+1)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   a) Calculer $f(7)$ et en déduire le signe de f sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**
   b) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties, la primitive L de la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ qui s'annule en 1. **0,25 pt**
   c) Déterminer en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 7$. **0,5 pt**
5) On pose pour $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.
   a) Démontrer que $U_n = -\ln[(n+1)!] - 7\ln(n+1)$. **0,5 pt**
   b) En déduire que $U_n \leq -\ln n$ et donner $\lim_{n\to+\infty} U_n$. **0,5 pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (6,75 points)

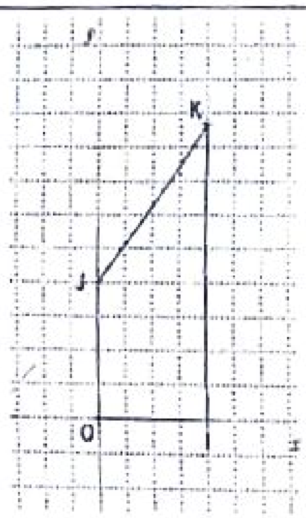
Situation :

Le nombre de personnes contaminées par une pandémie dans un pays qui comptait 20 millions d'habitants était de 3000 deux mois après l'apparition de la maladie et de 12000 cas quatre mois après. Des experts ont indiqué que l'immunité collective est atteinte quand 60% de la population est infectée.

Par ailleurs, des études révèlent que la vitesse de propagation de la maladie est proportionnelle au nombre de contaminés. Pour stopper la propagation rapide de la maladie dans sa localité, le Maire d'une ville qui compte déjà quelques personnes infectées décide d'aménager l'espace ci-contre représenté pour isoler ces personnes malades. Sur cet espace, la ligne reliant J à K est une portion de la courbe (Γ) d'équation $y - (x+1)e^{\frac{1}{12}x} = 0$ dans le repère orthonormé (O ; I ; J). On conseille de disposer chaque malade sur un espace d'au moins 4 m^2.

En outre un sérum a été mis sur pied par un groupe de chercheurs. $1cm^3$ de ce sérum est injecté toutes les 12 heures dans le sang d'un malade. Après élimination naturelle, la quantité restante de ce sérum (en cm^3) au bout d'un temps t (exprimé en heure) est de $e^{-\frac{1}{36}t}$ augmenté du cumul des restes des doses précédentes.

Le sérum n'est efficace que si le sang en contient en permanence une quantité au moins égale à $2cm^3$.



Sur la figure ci-dessus,
1 unité = 100m

Tâches :

1) Déterminer le nombre maximal de malades que peut accueillir l'espace aménagé par le Maire. **2,25 pts**
2) Déterminer dans ces conditions le temps au bout duquel l'immunité collective sera atteinte si on néglige le nombre de nouveau-nés durant cette période. (On désigne par h(t) le nombre d'habitants de ce pays contaminés à l'instant t (t en mois)). **2,25 pts**
3) Déterminer l'instant à partir duquel le sérum sera efficace. **2,25 pts**