Ministère des Enseignements Secondaires — Examen : Baccalauréat
Office du Baccalauréat du Cameroun — Épreuve: Mathématiques

Session :

Série : D-TI

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

L'épreuve est notée sur 20 et comporte deux parties A et B réparties sur deux pages.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : 4 points

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher parmi lesquelles 5 boules blanches, 3 boules bleues et 4 boules rouges. On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - a. E1 : « Les boules tirées ont la même couleur ». — 1 pt
   - b. E2 : « Les boules tirées présentent trois couleurs ». — 0,5 pt
   - c. E3 : « Les boules tirées ont des couleurs différentes ». — 0,5 pt

2. On appelle X la variable aléatoire qui à tout tirage de 3 boules de cette urne associe le nombre de boules rouges tirées.

a. Justifier que la loi de probabilité de X est : — 1 pt

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	56/220	112/220	48/220	4/220

b. Calculer l'espérance mathématique de X. — 0,5 pt

c. Calculer la variance de X. — 0,5 pt

Exercice 2 : 3 points

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

1.a. Développer et réduire $(1+\sqrt{5})^2$. — 0,25 pt

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. — 0,5 pt

2. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a. Montrer que pour tout $x \in \left[1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$, $f(x) > x$. — 0,75 pt

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$. — 0,5 pt

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge. — 0,25 pt

4. On désigne par l la limite de la suite (u_n). On admet que $f(l) = l$.

a. Montrer que $l \geq 1$. — 0,25 pt

b. Déterminer la valeur de l. — 0,5 pt

Exercice 3 : 4,25 points

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ;I ;J). L'unité sur les axes est le centimètre. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + 5i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = 3 + i$.

1. a. Donner la forme algébrique de $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$. — 0,5 pt

b. En déduire la nature exacte du triangle ABC. — 0,5 pt

2. On désigne par S la similitude directe de centre B qui transforme A en C.

a. Donner l'expression complexe de S. — 0,5 pt

b. En déduire les éléments caractéristiques de S. — 0,5 pt

3. Soient H le milieu du segment $[AC]$ et $(C1)$ le cercle de centre H et de rayon $[BH]$.

a. Donner une équation cartésienne de $(C2)$ image du cercle $(C1)$ par cette similitude directe S. **0,75 pt**

b. Représenter $(C2)$ dans le repère. **0,5 pt**

4. a. Placer dans ce même repère le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ **0,25 pt**

b. Déterminer, puis représenter le lieu géométrique des points $M(x, y)$ du plan tels que $\|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. **0,75 pt**

Exercice 4 : 3,75 points

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ; I, J). L'unité sur les axes est le centimètre.
On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
$f(x) = x\ln x - x \ si \ x > 0$ et $f(0) = 0$.
(C_f) désigne la courbe de f dans le repère orthonormé ci-dessus évoqué.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. **0,5 pt**
2. Calculer la limite de f en $+\infty$. **0,25 pt**
3. Etudier la dérivabilité de f en 0. **0,5 pt**
4. Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f. **0,5 pt**
5. Dresser le tableau des variations de f. **0,75 pt**
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]2; 3[$. **0,5 pt**
7. Tracer la courbe de f dans le repère cité plus haut. **0,75 pt**

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation:

Deux grands cultivateurs camerounais de café Ebéné et Assako passent en revue leurs productions des six premières années. M. Assako révèle que ses productions ont toujours été proportionnelles aux rangs des années de production. Les deux cultivateurs voudraient savoir approximativement ce que leur rapporteront leurs septièmes productions.
M. Ebéné vend toujours son café à un prix de 1200 FCFA le kilogramme dans un marché de sa localité tandis que M. Assako vend toujours le sien à un prix de 1800 FCFA le kilogramme dans un autre marché.
Voici les six premières productions de ces deux cultivateurs de café :

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6
Production en tonnes (y_i)	0,45	1	1,5	1,75	2,25	2,55
Cultivateur	**Ebéné**					

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6
Production en tonnes (y_i)	0,125	a	b	c	d	e
Cultivateur	**Assako**					

Tâches :

1. Estimer la recette de la septième production de M. Assako. **1,5 pt**
2. Estimer la recette de la septième production de M. Ebéné. **1,5 pt**
3. Est-il juste d'affirmer que les six premières années, M. Assako a gagné en moyenne plus d'argent que M. Ebéné ? **1,5 pt**

Présentation : **0,5 pt**

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHS AU BAC D-TI CAMEROUNAIS
SESSION 2025

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

Exercice 1

1°) Calculons la probabilité des évènements suivants :

a) E_1 : « les boules tirées ont la même couleur »

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire.
Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 boules tirées dans une urne contenant 12 boules.

Donc $$\text{card}(\Omega) = C_{12}^3 = \frac{A_{12}^3}{3!} = \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1} = \frac{1320}{6} = 220.$$

Toutes les boules ayant la même probabilité d'être tirées, alors on a : $$p(E_1) = \frac{\text{card}(E_1)}{\text{card}(\Omega)}$$

Or $$\text{card}(E_1) = C_5^3 + C_3^3 + C_4^3$$
$$= \frac{A_5^3}{3!} + 1 + 4 \quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n^n = 1 \text{ et } C_n^{n-1} = n)$$
$$= \frac{5\times 4\times 3}{6} + 5 = \frac{60}{6} + 5 = 10 + 5 = 15$$

Donc $$p(E_1) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

$$\boxed{p(E_1) = \frac{3}{44}}$$ 1pt

b) E_2 : « les boules tirées présentent trois couleurs »

On a : $card(E_2) = C_5^1 \times C_3^1 \times C_4^1$

$= 5 \times 3 \times 4 = 60$

Ainsi $p(E_2) = \frac{card(E_2)}{card(\Omega)} = \frac{60}{220} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$

$\boxed{p(E_2) = \frac{3}{11}}$ 0,5pt

c) E_3 : « les boules tirées ont des couleurs différentes »

On a : $E_3 = \overline{E_1}$; donc $p(E_3) = p(\overline{E_1}) = 1 - p(E_1)$

$p(E_3) = 1 - \frac{3}{44} = \frac{44-3}{44} = \frac{41}{44}$

$\boxed{p(E_3) = \frac{41}{44}}$ 0,5pt

2-a) Justifions que la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$

On a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

. $p(X=0) = \frac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \frac{C_8^3}{220}$

or $C_8^3 = \frac{A_8^3}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 8 \times 7 = 56$

d'où $p(X=0) = \frac{56}{220}$ 0,25pt

PDF Scanner ACE Scanner

- $P(X=1) = \frac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{220}$

$C_4^1 = 4$ et $C_8^2 = \frac{A_8^2}{2!} = \frac{8\times 7}{2\times 1} = \frac{56}{2} = 28$

Donc $P(X=1) = \frac{4\times 28}{220} = \frac{112}{220}$ 0,25pt

- $P(X=2) = \frac{card(X=2)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{220}$

$= \frac{6\times 8}{220} = \frac{48}{220}$ 0,25pt

- $P(X=3) = \frac{card(X=3)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^3 \times C_8^0}{220} = \frac{4\times 1}{220} = \frac{4}{220}$ 0,25pt

D'où la loi de probabilité de X se résume dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$

2.b) calculons l'espérance mathématique de X

On a : $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \times P(X=x_i)$

$= 0\times \frac{56}{220} + 1\times \frac{112}{220} + \frac{2\times 48}{220} + 3\times \frac{4}{220}$

$= \frac{112+96+12}{220} = \frac{220}{220} = 1$

Donc $\boxed{E(X) = 1}$ 0,5pt

PDF Scanner ACE Scanner

2-c) Calculons la variance de X.

On a : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \times p(X = x_i) - [E(X)]^2$$

$$= 0^2 \times \frac{56}{220} + 1^2 \times \frac{112}{220} + 2^2 \times \frac{48}{220} + 3^2 \times \frac{4}{220} - (1)^2$$

$$= \frac{112 + 4 \times 48 + 9 \times 4}{220} - (1)^2$$

$$= \frac{340}{220} - 1 = \frac{17}{11} - 1$$

$$= \frac{6}{11}$$

Donc $\boxed{V(X) = \frac{6}{11}}$ 0,5pt

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1-a) Développons et réduisons $(1+\sqrt{5})^2$

On a : $(1+\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2(1)(\sqrt{5}) + (\sqrt{5})^2$

$$= 1 + 2\sqrt{5} + 5$$

$$= 6 + 2\sqrt{5}$$ 0,25pt

b) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Soit $p(n)$ la proposition : « $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ »

PDF Scanner ACE Scanner

- pour $n=0$, on a $u_0=1$ et $1 \leq 1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Donc $1 \leq u_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; d'où $P(0)$ est vraie.

- soit $n \geq 0$ un entier fixé. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi ie montrons que :

$1 \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On a : $1 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ par hypothèse de récurrence.

Donc $2 \leq 1+u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$

$$\Longleftrightarrow 2 \leq 1+u_n \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow 2 \leq 1+u_n \leq \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

Or d'après la question précédente, $6+2\sqrt{5} = (1+\sqrt{5})^2$

Donc $2 \leq 1+u_n \leq \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\text{car } u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}\right)$$

$$\Longrightarrow 1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Longrightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$; d'où $P(n+1)$ est vraie

par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 0,5pt

2°) soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

a) Montrons que $\forall x \in \left[1 ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$, $f(x) > x$

Soit $x \in [1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$

posons $h(x) = f^2(x) - x^2$

$= (\sqrt{1+x})^2 - x^2 = 1+x-x^2$

$\forall t \in [0;+\infty[$, $h(t) = 0 \iff -t^2+t+1=0$

$\Delta = (1)^2 - 4(-1)(1)$

$= 1+4 = 5$

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

$\forall t \in [0;+\infty[$

Donc, $h(t) = 0 \iff t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

t	0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$h(t)$		$+$	0	$-$	

D'après ce tableau de signe, on a : $\forall t \in [0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$, $h(t) > 0$

Ainsi $h(x) > 0 \iff f^2(x) - x^2 > 0$

$\iff f^2(x) > x^2$

et comme $f(x) > 0$ et $x > 0$ alors on en déduit

que : $f(x) > x$ 0,75pt

b) Montrons que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} > U_n$.

D'après la question précédente, on a :

$\forall x \in [1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$, $f(x) > x$

Or d'après la question 1-b), $u_n \in [1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{1+u_n} > u_n$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n. \quad \underline{0,5pt}$$

2-c) Déduisons des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

De plus, d'après 1-b), $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(u_n) étant croissante et majorée alors (u_n) converge $\underline{0,25pt}$

4) Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On admet que $f(\ell) = \ell$

a) Montrons que $\ell \geq 1$

puisque (u_n) est croissante et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq 1$ ie $\ell \geq 1$ $\underline{0,25pt}$

b) Déterminons la valeur de ℓ.

ℓ est solution sur $[1; +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.

On a : $f(x) = x \Longleftrightarrow \sqrt{1+x} = x$

$$\Longleftrightarrow x^2 = 1+x$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

PDF Scanner ACE Scanner

Comme $x \in [1 ; +\infty[$ alors $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

D'où $\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ 0,5pt

Exercice 3

On donne les points A, B et C d'affixes respectives

$z_A = -1+5i$, $z_B = -1+i$ et $z_C = 3+i$

1.a) Donnons la forme algébrique de $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$

On a : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-1+i-(3+i)}{-1+i-(-1+5i)} = \frac{-1+i-3-i}{-1+i+1-5i}$

$= \frac{-4}{-4i} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2}$

$= \frac{-i}{1} = -i$

Donc $\boxed{\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = -i}$ 0,5pt

b) On en déduit que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. 0,5pt

2) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme A en C

a) Donnons l'expression complexe de S

L'écriture complexe de S est sous la forme :

$z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

. Trouvons les complexes a et b

On a : $S(B) = B \iff a z_B + b = z_B$

$\iff a(-1+i) + b = -1+i$

$S(A) = C \iff a z_A + b = z_C$

$\iff a(-1+5i) + b = 3+i$

On a donc le système $\begin{cases} a(-1+i)+b = -1+i & (1) \\ a(-1+5i)+b = 3+i & (2) \end{cases}$

$(1)-(2) \iff a(-1+i+1-5i) = -1+i-3-i$

$\iff a(-4i) = -4 \iff a = \frac{-4}{-4i} = -i$

$(1) \iff b = -1+i-a(-1+i)$

$= -1+i+i(-1+i) = -1+i-i-1$

$= -2.$

D'où S a pour écriture complexe :

$\boxed{z' = -iz - 2}$ 0,5pt

2-b) Déduisons-en les éléments caractéristique de S.

On a : $|a| = |-i| = 1$ et $\arg(a) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

Car $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

D'où S est une similitude directe de centre $B\binom{-1}{1}$, de rapport $k=1$ et d'angle $\alpha = \frac{-\pi}{2}$. 0,5pt

3°) Soient H le milieu de [AC] et $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre H et de rayon [BH]

a) Donnons une équation cartésienne de $(\mathscr{C}_2)$ image du cercle $(\mathscr{C}_1)$ par S

On a : $z_H = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-1+5i+3+i}{2} = \frac{2+6i}{2} = 1+3i$

Donc le rayon de $(\mathscr{C}_1)$ est :

$$r = BH = |z_H - z_B| = |1+3i-(-1+i)|$$
$$= |1+3i+1-i|$$
$$= |2+2i|$$
$$= \sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

S est une rotation (car $|a|=1$) de centre $B\binom{-1}{1}$ et d'angle $\frac{-\pi}{2}$; donc $(\mathscr{C}_2) = S(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de centre $S(H)$ et de rayon $r = 2\sqrt{2}$.

Soit $H' = S(H)$.

On a : $z_{H'} = -i z_H - 2$
$$= -i(1+3i) - 2 = -i+3-2$$
$$= 1-i$$

D'où $(\mathscr{C}_2) = \mathscr{C}\left(H'\binom{1}{-1} ; r = 2\sqrt{2}\right)$

Soit donc $M\binom{x}{y}$ un point du plan.

On a $M \in (\mathscr{C}_2) \iff H'M = 2\sqrt{2}$

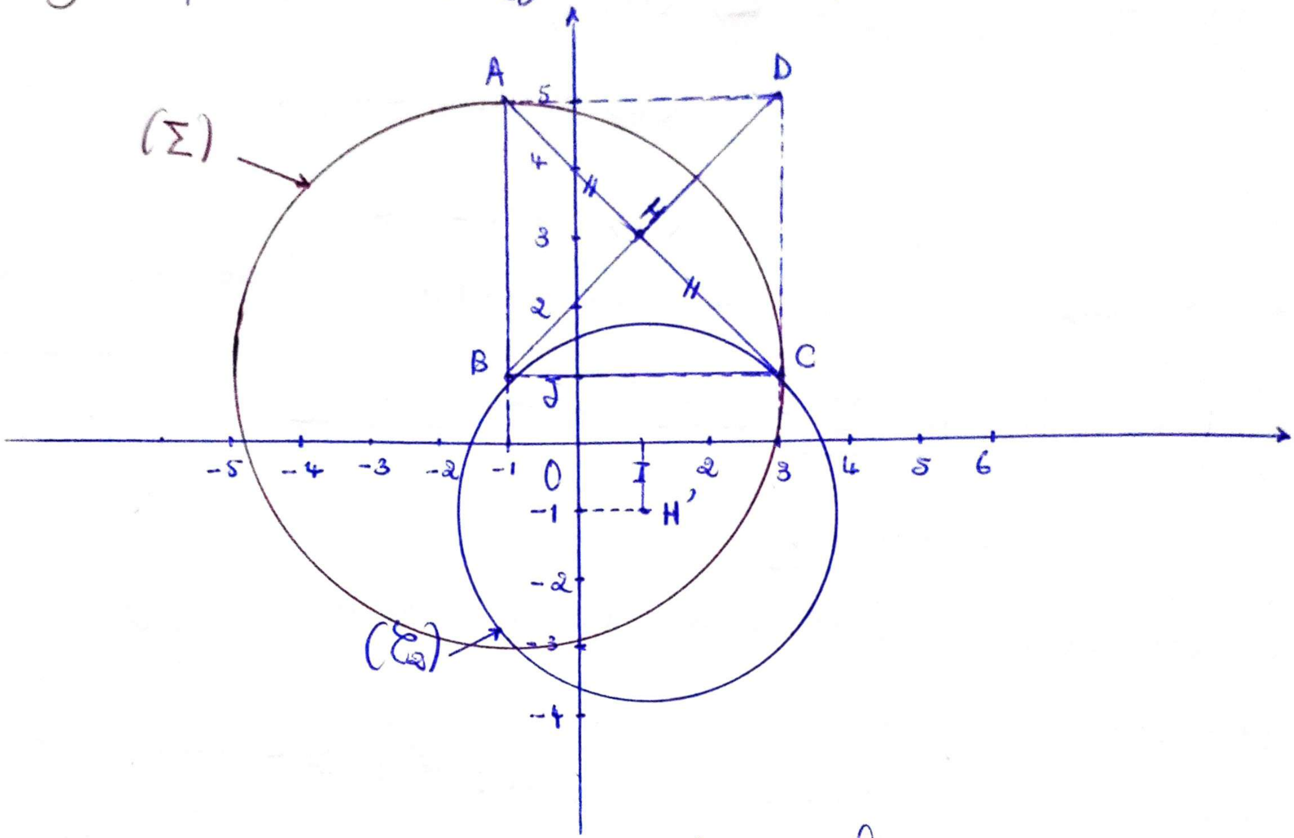
$$\iff \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 2\sqrt{2}.$$
$$\iff (x-1)^2+(y+1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$
$$\iff x^2-2x+1+y^2+2y+1 = 8$$

$\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2-2x+2y+2-8=0$

$\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2-2x+2y-6=0$

D'où $\boxed{(\mathcal{C}_2) : x^2+y^2-2x+2y-6=0}$ 0,75pt

3-b) Représentons $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère. 0,5pt



4-a) Construction du point D tel que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

Voir figure 0,25pt

b) Déterminons, puis représentons le lieu géométrique des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que :

$\|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

puisque $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ alors $-\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Donc $B = \text{bar}$

D	A	C
1	-1	-1

PDF Scanner ACE Scanner

Ainsi pour tout point $M\binom{x}{y}$ du plan, on a :

$$\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC} = (1-1-1)\overrightarrow{MB}$$
$$= -\overrightarrow{MB}$$

Soit $(\Sigma)=\left\{M\binom{x}{y}\in \mathcal{P} / \|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|\right\}$

On a donc $M\binom{x}{y}\in(\Sigma) \iff \|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

$$\iff \|-\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$$

$$\iff BM = BC$$

D'où (Σ) est le cercle de centre B et de rayon BC
0,5pt

Construction de (Σ) : [cf] figure 0,25pt

Exercice 4

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
unité graphique : 1cm
soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - x \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) désigne sa courbe représentative dans le repère orthonormé.

1°) Déterminons l'ensemble de définition de f.

On a : $\boxed{D_f = [0;+\infty[}$ 0,5pt

2°) Calculons la limite de f en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(\ln x - 1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \times \lim_{x\to+\infty} (\ln x - 1)$$

$$= +\infty \times (+\infty) \quad \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\right)$$

$$= +\infty \quad \underline{0{,}25pt}$$

3°) Etudions la dérivabilité de f en 0.

On a : $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x - x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x(\ln x - 1)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (\ln x - 1) = -\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\right)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 $\underline{0{,}5pt}$

4°) Déterminons $f'(x)$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$,

On a : $$f'(x) = (x\ln x - x)'$$

$$= \ln x + \frac{1}{x}(x) - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

Donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $\boxed{f'(x) = \ln x}$ $\underline{0{,}5pt}$

5°) Dressons le tableau des variations de f.

On a : $f'(x) = 0 \iff \ln x = 0$

$\iff x = 1$

$f(1) = (1)\ln(1) - (1)$

$= 1\times 0 - 1 = -1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

0,75pt

6) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2;3[$

la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$; donc en particulier sur $]2;3[$

De plus, on a : $f(2) = 2\ln 2 - 2 \simeq -0,61 < 0$ et $f(3) = 3\ln 3 - 3 \simeq 0,30 > 0$; donc $f(2)\times f(3) < 0$

D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2;3[$

0,5pt

7) Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$

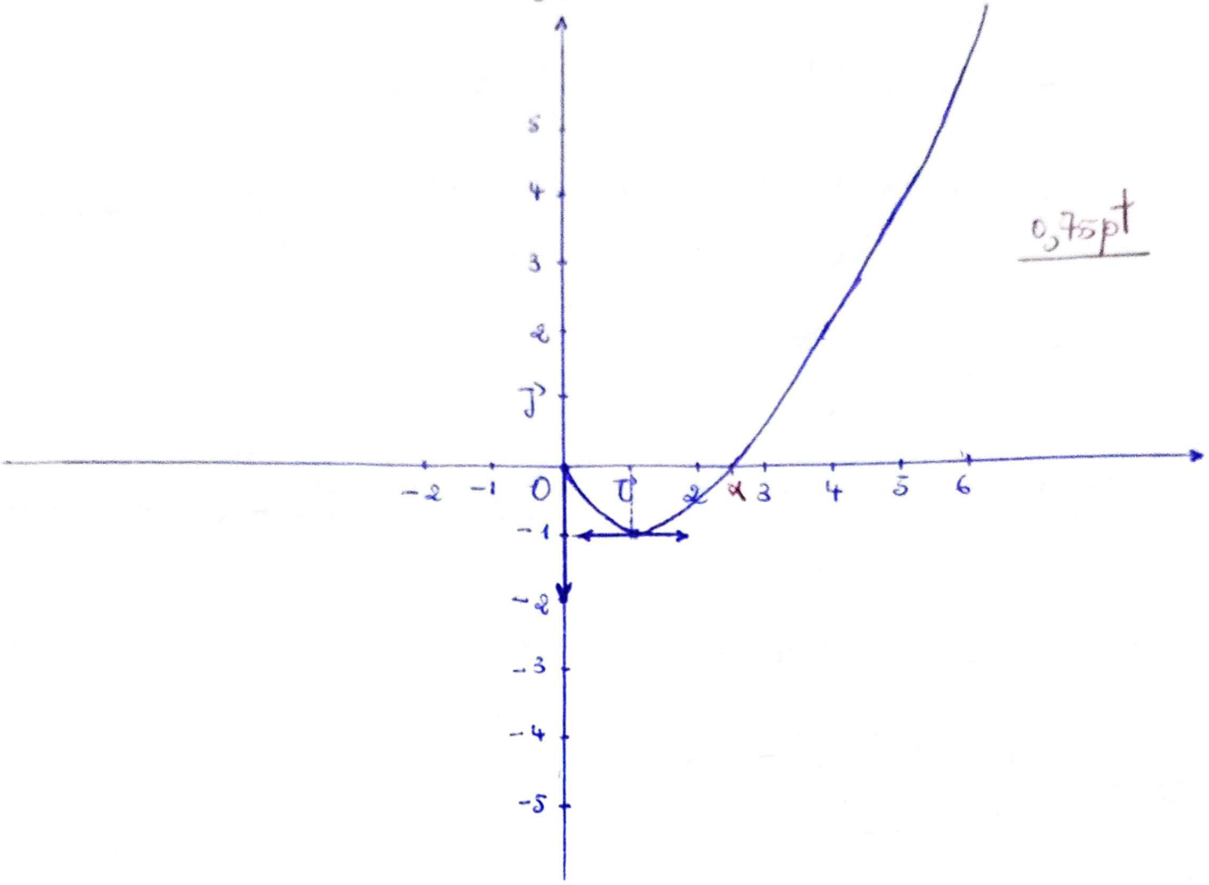
. Branche infinie de f :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x - x}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(\ln x - 1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = +\infty$

D'où $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe $(O;\vec{j})$



PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES

Tâche 1 : Estimons la recette de la septième production de M. Assako

- Recopions et complétons le tableau statistique ~~Corre~~ des six premières années de production de M. Assako

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6
production en tonnes (y_i)	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75.

0,25pt

• Déterminons, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de regression de y en x.

On a : $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3,5$

$$\bar{y} = \dfrac{0,125+0,25+0,375+0,5+0,625+0,75}{6} = \dfrac{2,625}{6} = 0,4375.$$

$$Cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{x} \times \bar{y})$$

$$= \frac{1\times 0,125 + 2\times 0,25 + 3\times 0,375 + 4\times 0,5 + 5\times 0,625 + 6\times 0,75}{6} - (3,5 \times 0,4375)$$

$$= \frac{11,375}{6} - (3,5 \times 0,4375) = 0,36$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - (3,5)^2$$

$$= \frac{91}{6} - (3,5)^2 = 2,9.$$

la droite (D) de regression de y en x a pour équation : $y = ax+b$; où $a = \dfrac{Cov(x,y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

. Trouvons les coefficients a et b

On a : $a = \dfrac{0,36}{2,9} = 0,12$ et $b = 0,4375 - 0,12 \times 3,5$

$= 0,0175.$

D'où $\boxed{(D) : y = 0,12x + 0,0175}$ 0,5pt

- <u>estimons la production de M. Assako à la 7ème année.</u>

pour $x=7$, on a : $y = 0,12 \times 7 + 0,0175$

$= 0,8575\ t = 857,5\ kg$ <u>0,25pt</u>

- 1kg de café se vend à 1800 FCFA ; donc 857,5kg se vendent à $857,5 \times 1800$ FCFA. $= 1\ 543\ 500$ FCFA

D'où la recette de M. Assako à la septième année de production est estimée à $\boxed{1\ 543\ 500 \text{ FCFA}}$ <u>0,5pt</u>

<u>Tâche 2:</u> Estimons la recette de la septième année de production de M. Ebène.

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6
production en tonnes (y_i)	0,45	1	1,5	1,75	2,25	2,55

- <u>Trouvons l'équation de la droite de regression de y en x</u> :

On a : $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$

$\bar{y} = \dfrac{0,45+1+1,5+1,75+2,25+2,55}{6} = \dfrac{9,5}{6} = 1,58$

$Cov(x,y) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i - (\bar{x} \times \bar{y})$

$= \dfrac{1\times 0,45 + 2\times 1 + 3\times 1,5 + 4\times 1,75 + 5\times 2,25 + 6\times 2,55}{6} - (3,5 \times 1,58)$

$= \frac{40,5}{6} - (3,5 \times 1,58) = 1,22.$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - (3,5)^2$$

$$= 2,9$$

la droite de regression de y en x est la droite (D) d'équation $y = ax+b$, avec $a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

. Trouvons les réels a et b

On a : $a = \frac{1,22}{2,9} = 0,42$; $b = 1,58 - 0,42 \times 3,5 = 0,11$

D'où $\boxed{(D) : y = 0,42x + 0,11}$ 0,5pt

. Estimons la production de M. Ebène à la 7ème année

pour $x = 7$, on a : $y = 0,42 \times 7 + 0,11$

$= 3,05 t = 3050 kg$ 0,5pt

. 1 kg de café se vend à 1200 FCFA ; donc 3050 kg se vendent à 3050×1200 FCFA $= 3\,660.000$ FCFA

D'où la recette de la septième production de M. Ebène est estimée à $\boxed{3\,660.000 \text{ FCFA}}$ 0,5pt

Tâche 3 : Vérifions s'il est juste d'affirmer que les six premières années, M Assako a gagné en moyenne plus d'argent que M. Ebènè.

- Au cours des (06) premières années la production moyenne de M. Assako est : $\bar{y} = 0,4375\,t = 437,5\,kg$ 0,25pt
la recette moyenne correspondante est de :

$$437,5 \times 1800 \text{ FCFA} = \underline{\underline{787\,500 \text{ FCFA}}}$$ 0,25pt

- Au cours des (06) premières années, la production moyenne de M. Ebènè est : $\bar{y} = 1,58\,t = 1580\,kg$ 0,25pt
la recette moyenne correspondante est de :

$$1580 \times 1200 \text{ FCFA} = 1\,896\,000 \text{ FCFA}$$ 0,25pt

Or $787\,500 \text{ FCFA} < 1\,896\,000 \text{ FCFA}$

D'où il est <u>faux</u> d'affirmer que les six premières années, M. Assako a gagné en moyenne plus d'argent que M. Ebènè. 0,5pt

FIN DU CORRIGÉ !