| COLLÈGE F.X. VOGT | ORA ET LABORA | Année scolaire 2024-2025 |
|---|---|---|
| Second cycle<br>Département de Mathématiques | PROBATOIRE BLANC N°1 | Date : 02 Mai 2025<br>Série : TI<br>Durée : 3h ; Coeff : 4 |

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

## Partie A : Évaluation des ressources (13 points)

### Exercice 1 : 3 points

$ABC$ est un triangle équilatéral de 6 cm de côté.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan tels qu $MA^2 + MB^2 = 44$. **1pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[-\pi\,;\pi[$, l'équation $cos2x = -\frac{1}{2}$. **1pt**
3. À quelle condition de $\theta \in [-\pi\,;\pi[$, un point G existe comme barycentre des points pondéré $(A, 2cos^2\theta)\,;(B;1)\; et\; (C, -2sin^2\theta)$? **1pt**

### Exercice 2: 3 points

1. On donne $F = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2\,;-x+y=0\}$ et $G = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y=0\}$.

a) Justifier que $F$ et $G$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer une base de chacun d'eux. **1,5pt**

b) Déterminer $F \cap G$. **0,5pt**

c) En déduire que $\mathbb{R}^2$ est la somme directe de $F$ et de $G$. **0,5pt**

2. Effectuer les opérations suivantes : $A = \overline{23021}^5 + \overline{4011}^5$ et $B = \overline{2023}^4 \times \overline{311}^4$. **0,5pt**

### Exercice 3: 3 points

Dans une ferme, une observation des poids d'un certain nombre de lapins a donné les résultats consigné dans le tableau ci-après :

| Poids (en Kg) | $[0;1[$ | $[1;2[$ | $[2;4[$ | $[4;6[$ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 10 | 14 | 20 | 6 |

1. Déterminer le poids moyen de ces lapins. **0,5pt**
2. Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants pour cette série statistique (prendre en abscisses 1 cm pour 1 Kg et en ordonnées 1 cm pour 10 lapins). **1pt**
3. Déterminer graphiquement la médiane de cette série. **0,5pt**
4. On choisit au hasard et successivement sans remise deux lapins dans cette ferme parmi ceux dont le poids est inférieur à 2 Kg pour les faire vacciner.

a) Déterminer le nombre de choix possibles que l'on peut faire. **0,5pt**

b) Déterminer le nombre de choix pour lesquels au moins un lapin ait un poids inférieur à 1 Kg. **0,5pt**

### Exercice 4: 4 points

I- On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$, par $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, I, J)$.

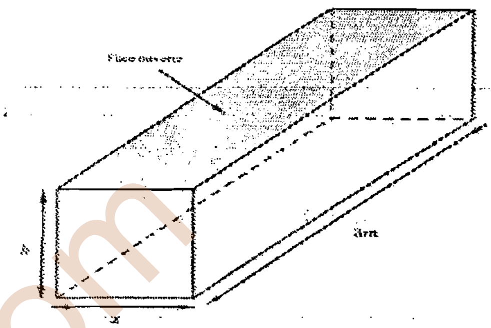
1. Justifier que $f$ est impaire. **0,25pt**
2. Justifier que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ est asymptote à $(C)$ en $+\infty$. **0,25pt**

3. Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$. **1pt**
4. a) Préciser l'élément de symétrie que possède la courbe $(C)$. **0,25pt**
   b) Tracer avec soin $(\Delta)$ et $(C)$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$. **0,75pt**

II- Soit la suite $(U_n)$ définie par: $U_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel non nul $n$, $U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n$.

1. Calculer $U_2$ et $U_3$. **0,5pt**
2. Montrer que la suite de terme général $V_n = \frac{U_n}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera son premier terme. **0,5pt**
3. En déduire l'expression de $V_n$ en fonction de $n$, puis celle de $U_n$ en fonction de $n$. **0,5pt**

## Partie B : Évaluation des compétences (7 points)




**Situation :**

Afin de garantir une réserve d'eau pendant la saison sèche, un jardinier nommé ABOUDI fait la commande d'une citerne métallique ouverte chez un chaudronnier. Cette citerne a la forme d'un pavé droit ouvert sur une face, et dont le volume est de 12 $m^3$. Le chaudronnier lui propose la maquette ci-contre, où l'un des côtés de la base mesure $3m$ tandis que l'autre côté $(x)$ et la hauteur $(h)$ en mètres sont inconnues (voir figure ci-contre). Afin d'utiliser le moins de peinture pour la protéger contre la rouille, il recommande au chaudronnier de choisir la valeur de $x$ (avec $0 < x < 3$) rendant minimale l'aire totale de la surface externe de cette citerne. Pour obtenir un résultat impeccable, 1 Kg de cette peinture sera appliquée sur 2 $m^2$ de surface.

Après qu'il ait reçu sa citerne, ABOUDI l'a remplie d'eau aux deux-tiers et l'a ensuite installée à l'air libre sur la cour de son jardin. En période de sécheresse, cette citerne perd d'un jour à l'autre 0,25% du contenu qu'elle avait au début du jour. Après 10 jours de sécheresse, il décide d'arroser ses 75 arbustes avec sa réserve d'eau restante dans la citerne. Il a besoin de 100 L d'eau par arbuste.

ABOUDI est membre d'une association de jardiniers où est instauré des cotisations telles que :

- Chaque membre fait partie exactement de deux cotisations,
- Chaque cotisation comprend exactement trois membres,
- Deux cotisations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.

**Tâches :**

1. Quelle est, au dixième près, la quantité de peinture en Kg nécessaire pour protéger la surface totale externe de cette citerne ? **2,25pt**
2. La réserve d'eau restante dans la citerne sera-t-elle suffisante pour arroser les 75 arbustes? **2,25pt**
3. Déterminer le nombre de membres et le nombre de cotisations dans cette association. **2,25pt**

**Présentation : 0,25pt**