

Épreuve zéro régionale de mathématiques au baccalauréat C 2024 (région centre)

Partie A : Évaluation des ressources : 15 points

EXERCICE 1 : 4,5 points

I/ (Série C uniquement)

On considère dans $\mathbb{R}$ le polynôme P défini par :

$$P(x) = x^4 - 32x^3 + 186x^2 - 280x + 125$$

1. Montrer que tout entier relatif n solution de l'équation $P(x) = 0$ divise 125. **0,5pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. **1pt**

I/ (Série E uniquement)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + z + z^2 + \dots + z^6 = 0$ **0,75pt**
2. Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$. **0.75pt**

I/ Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule de l'urne, puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants. On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ tirage.

1. Calculer les probabilités p_2 et p_3 . **0,5pt**
2. On considère les événements suivants :
 B_n : « Tirer une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ tirage » ;
 U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n - 1$ premiers tirages ».
 a) Calculer la probabilité de l'évènement B_n . **0,5pt**
 b) Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n . **0,5pt**
 c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier que : $p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **0,5pt**
3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$.
 a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{0,75pt}$$

- b) Déterminer la limite de la suite (S_n) . **0,25pt**

EXERCICE 2 : 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; -2; -2)$ et $D(1; 0; -3)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C sont non alignés, puis déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) . **0,5pt**
- b) Justifier que D n'appartient pas au plan (ABC) , puis calculer le volume du tétraèdre ABCD. **0,75pt**

2. On considère le plan (P) d'équation $3x + 3y - z - 5 = 0$.

Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (P) . **0,75pt**

3. Dans l'ensemble W des vecteurs de l'espace, on considère l'endomorphisme φ défini par :

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i},$$

$$\varphi(\vec{j}) = -2\vec{j} + \vec{k} \text{ et } \varphi(\vec{k}) = 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

a) Déterminer la matrice M de φ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. **0,25pt**

b) Déterminer le noyau de φ et préciser une base. **0,5pt**

c) Déterminer l'image de φ et préciser une base. **0,5pt**

d) Soit $B' = (\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

Montrer que B' est une base de W et déterminer la matrice M' de φ dans la base B' . **0,75pt**

EXERCICE 3 : 3,5 points

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{1+t^4}} dt$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Justifier que f est définie sur $]0; +\infty[$. **0,25pt**
- b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f . **0,5pt**
2. a) Pour tout réel $x > 0$, calculer à l'aide d'une intégration par parties $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$. **0,5pt**
- b) Montrer que pour tout réel $x > 0$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$ et en déduire un encadrement de la limite de f en $+\infty$. **0,75pt**
3. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$
- a) Démontrer, en calculant $g'(x)$, que g est la fonction nulle sur $]0; +\infty[$. **0,5pt**
- b) En déduire un encadrement de la limite de f en 0. **0,25pt**
- c) Tracer l'allure de la courbe (C) . **0,75pt**

EXERCICE 4 : 3 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère une courbe (H) d'équation

$$x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0.$$

1. Montrer que (H) est une hyperbole dont on déterminera les sommets. **0,75pt**
2. a) Vérifier que le point $A(1 + 2\sqrt{2}; 1)$ appartient à (H) . **0,25pt**
- b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (H) en A. **0,5pt**
3. Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{4}[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_\theta) : (\cos^2 \theta) z^2 - 2(\cos^2 \theta + 2\cos \theta) z + 5 + 4\cos \theta = 0$$

a) Résoudre l'équation (E_θ) . **1pt**

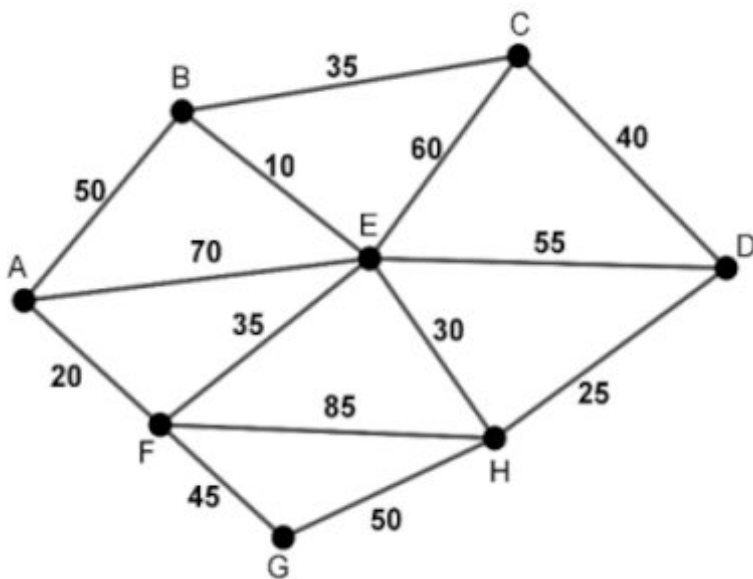
b) Soient M_1 et M_2 les images respectives des solutions z_1 et z_2 .

Montrer que M_1 et M_2 varient sur une branche (B) de l'hyperbole (H) . **0,5pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : 5 points

Situation :

En 2000, la population d'une ville était de 4,75 millions d'habitants et de 5,5 millions d'habitants en 2005. La vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants. Les autorités de la ville voudraient savoir en quelle année cette population aura atteint 10 millions d'habitants.



Sur le graphe ci-dessus, les lettres représentent certains quartiers de cette ville et les nombres représentent en hm, la distance à parcourir sur une route qui relie un quartier à un autre lorsqu'elle existe. Une société d'électricité voudrait implanter la lumière dans chaque quartier de cette ville en partant d'un quartier choisi au hasard et en utilisant le moins de câble possible. Le responsable des travaux doit quitter de la base du chantier installée au quartier A pour le quartier H où il a une séance de travail avec le maire de la ville. Compte tenu des impératifs, il doit emprunter le plus court chemin possible.

Tâches :

1. Proposer un itinéraire à ce responsable des travaux. **1,5pt**
2. Quelle est la longueur minimale du câble à utiliser pour cette implantation ? **1,5pt**
3. En quelle année cette population atteindra 10 millions d'habitants ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt

• M