# CHATPITRE APPLRCATIONS AFFINE DE L'ESPACE

## I- Généralités

*Dans les classes précédentes, nous avons étudié le parallélisme et l'orthogonalité des droites et des plans de l'espace.*

*Dans ce chapitre nous utiliserons ces notions pour définir des applications de l'espace et étudier leurs propriétés. Dans cette ressource, l'espace $\mathscr{E}$ est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. $\mathscr{W}$ désigne l'ensemble des vecteurs de l'espace. L'espace est muni du Repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.*

- *Le vocabulaire et les résultats concernant les applications du plan s'étendent à l'espace.*
- *Une transformation de l'espace est une application bijective de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.*
- *Une application affine de $\mathscr{E}$ est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée conserve le coefficient de colinéarité.*

■ *Une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est* ***une application affine*** *si et seulement si elle vérifie l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

- ***Elle conserve le barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$)***
- ***Son expression analytique est de la forme :*** $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$

- *Les propriétés* ***des*** *applications affines du plan s'étendent à l'espace. En particulier :*
- *Une application affine de $\mathscr{E}$ est déterminée par la* ***donnée d'un repère de $\mathscr{E}$ et de son image ;***
- *L'ensemble des points invariants par une application affine est $\emptyset$, un singleton, une droite, un plan, ou $\mathscr{E}$*
- *L'image d'une droite par une application affine est un singleton ou un plan*

*A toute* ***application affine de*** *$\mathscr{E}$ est associé un endomorphisme $\phi$ de $\mathscr{W}$ dans lui-même telle que pour tous points* ***A et B*** *de $\mathscr{E}$ $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)}$*

- *Toute isométrie de l'espace $\mathscr{E}$ est une transformation affine.*
- ***On appelle isométrie de l'espace*** *toute transformation affine de l'espace qui conserve l'alignement, le parallélisme l'orthogonalité, les aires et les volumes.*
- *Une isométrie de l'espace $\mathscr{E}$ est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui conserve les distances*
- *Parmi* ***les*** *isométries de l'espace, nous avons* ***: translation, les symétries orthogonales (réflexions*** *et les* ***demi-tours)***

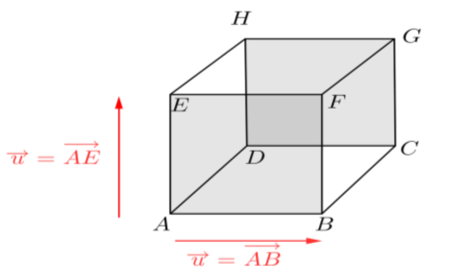
## LECON 1 : TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES

### I- TRANSLATIONS

#### a- Activité

*Soit ABCDEFGH, un cube*

1- *Déterminer les images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$ des points A, B, C, D.*
2- *Déterminer les images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ des points A, D, H, D*
3- *On considère le repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.Donner coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ dans ce repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.*
4- *Définir analytiquement la translation de vecteurs $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$*



## Solution

1- Les points **E, F, G et H** sont les images respectives des points A, B, C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$

2- Les points **B, C, G et F** sont les images respectives des points **A, D, H, D** par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

3- Donnons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ **et** $\overrightarrow{DH}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1,0,0)$.De même, on a $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} = (0,0,1)$.

4- Donnons l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$.

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$ alors, on a $\vec{u}\,(1,0,1)$.Ainsi soit **M (x, y, z)** un point de l'espace et M (x' ; y', z') son image par la translation de $\vec{u}$. $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ <==> $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ <==> $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y \\ z' = z+1 \end{cases}$ Est l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$ dans le répère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

### b- Résumé.

#### ♣ Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'ensemble vectoriel $\mathcal{W}$.

On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$, et on note $t_{\vec{u}}$ l'application de l'espace dans luimême qui à tout point **M** associe le point **M'** tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

#### ♣ Propriété (Propriété fondamentale)

Une application de l'espace est une translation si et seulement si l'image de tout couple de point (M, N) est un couple de points **(M, N)** tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M'N'}$Soit $f$ une application de l'espace dans lui-même.$f$ Est une **translation** si et seulement si, pour tous points **M et N** d'images respectives **M' et N'**, on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M'N'}$

#### ♣ Conséquence.

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle. Par une translation
- L'image d'une figure plane est une figure plane qui lui est superposable.
- L'image d'un solide de l'espace est un solide de l'espace qui lui est isométrique
- L'image d'un plan est un plan qui lui est parallèle.
- L'application réciproque de la translation de vecteur **u est la translation** de vecteur $\vec{u}$.
- **La** composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$

### c- Expression analytique d'une translation

#### ♣ Propriété

L'espace est muni du repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(a; b; c)$ est : $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \\ z' = z+c \end{cases}$

*Exemple :* Donnez l'expression analytique de la translation de vecteur **u** (1, −2, −1). Soit M (x, y, z) un point de l'espace et M (x' ; y' ; z') son image part . On a: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ <=> $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ <==> $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \\ z' = z-1 \end{cases}$

## II- HOMOTHETIE

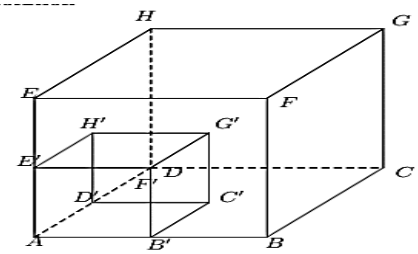
### a- Activité

Soit ABCDEFGH un cube, **h** l'homothétie de centre A et de rapport . On donne A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), D(0, 1, 0), B (0, 0, 1), C (1, 1, 0), F (1, 0, 1), G(1, 1, 1), H (0, 1, 1) ; dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1- Construire les images par h de tous les sommets du cube. Quelles sont les caractéristiques du solide obtenu ?

2- Déterminer l'expression analytique de h ,homothétie de centre G(1, 1, 1) et de rapport k=2

### Solution




**1-** *Déterminons les images par h de tous les sommets du cube.*

**2-** On a **:** $\mathbf{h(A) = A'}$ , $\mathbf{h(B) = B'}$; $\mathbf{h(C) = C'}$ , $\mathbf{h(D) = D'}$; $\mathbf{h(F) = F'}$; $\mathbf{h(G) = G'}$; , $\mathbf{h(H) = H'}$ *avec* : $\overrightarrow{\mathbf{AB'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AB}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AC'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AD'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AD}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AE'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AE}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AF'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AF}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AG'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AG}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AH'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AH}}$; *Ainsi Le solide obtenu est un cube d'arête* $\mathbf{A'B'} = \frac{1}{2}\mathbf{AB}$;

**3-** *Donnons l'expression analytique de* **h (G, 2),** *homothétie de centre G et de rapport 2*

*Soit M (x, y , z ) un point de E , M (x', y', z' ) son image par* **h** *. On a :*

$$\overrightarrow{\mathbf{GM'}} = 2\overrightarrow{\mathbf{GM}} \iff \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 1 \\ z' - 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 1 \\ z' = 2z - 1 \end{cases}$$ *Dans* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

## b- *Résumé*

### ♣ *Définition*

Soit O *un point de l'espace et un nombre réel non nul.*

*On appelle* **homothétie** *de centre* **O** *et de rapport* $k$ *et on note où* **h** *l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point* $\mathcal{M}$ *associe le point* $\mathcal{M}'$ *tel que :* $\overrightarrow{\mathbf{OM'}} = \mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{OM}}$

***Remarque :***

- *Si* $k$*=1,* **h** *est l'application identique et tous les points de l'espace sont invariants.*
- *Si* $k$*≠1,* $\mathcal{O}$ *est le seul point invariant.*
- *Si* $k$*= 1,* **h** *est la symétrie de centre* $\mathcal{O}$

### PROPRIÉTÉS

- ***Toute*** *homothétie* ***de l'espace est une*** *application affine*
- *Le rapport d'une homothétie est toujours non nul.*
- *L'application linéaire associée à une homothétie* ***h de rapport*** $k$ ***(***$k$***≠1) est l'application de*** $\mathcal{W}$ ***dans*** $\mathcal{W}$ *appelée homothétie vectorielle, qui à tout vecteur* $\vec{u}$ *associe le vecteur* $k\vec{u}$*.*
- *Tout homothétie de l'espace conserve le parallélisme, l'orthogonalité, les angles orientées, le contact.*
- *Les homothéties ne conservent pas la distance, ne conservent pas les aires, ne conservent pas les volumes. Donc les homothéties ne sont pas des isométries.*
- *Une homothétie de rapport* $k$ *multiplie les distances par* $|k|$*, les aires par* $\mathbf{k^2}$ *et les volumes par* $|\mathbf{k}|^3$
- *Les homothéties transforment : Une droite (D) en une droite parallèle à (D),Un solide en un solide de même nature ; Un plan en un plan parallèle ;Un parallélogramme en un parallélogramme..*

## c- *Expression analytique d'une homothétie.*

- *L'expression analytique de l'homothétie de centre* $I(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ *et de rapport* $k$ *est* $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$
- *Soit* ***p q et r*** *trois nombres réels, un nombre réel non nul et* ***f*** *l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point* $\mathcal{M}(x, y, z)$ *(associe le point* $\mathcal{M}'(x', y', z')$ ***tels que:*** $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \\ z' = kz + r \end{cases}$

**Exemple.** *L'espace* $\mathcal{E}$ *est muni du Repère* $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}; \vec{\mathbf{j}}; \vec{\mathbf{k}})$.

1- *Définir analytiquement l'homothétie de centre* ***I (1, −2, 5)*** *et de rapport* $k = \frac{3}{2}$

2- *Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application définie analytiquement par :* $\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$

**Solution**

**1- Définir analytiquement l'homothétie de centre $I(1, -2, 5)$ et de rapport $k = \frac{3}{2}$**

*Soit* $M(x, y, z)$ *un point de* $\mathcal{E}$, $M(x', y', z')$ *son image par* $h$. *On a:*

$$\overrightarrow{IM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IM} \iff \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+2 \\ z'-5 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{3}{2}y + 1 \\ z' = \frac{3}{2}z - \frac{5}{2} \end{cases} \text{ dans } (O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$$

**2- Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'application h d'expression analytique:** $\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$

*Cette expression analytique a la forme caractéristique de l'expression analytique d'une homothétie de* **rapport k=−2.** *Déterminons l'ensemble des points invariants pour avoir les coordonnées du centre* Ω.

$$\begin{cases} x = -2x - 4 \\ y = -2y + 1 \\ z = -2z + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = -4 \\ 3y = 1 \\ 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

*Donc* $h$ *est l'homothétie de centre* $\Omega\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ *rapport* $k = -2$.

## d- Composée de deux homothéties

### ➢ Composée de deux homothéties de même centre

**Lemme** : **Soit** $h_1$ et $h_2$ *deux homothéties de centre O et de rapport* $k_1$ et $k_2$ *respectivement. Alors :*

- $h_1 o h_2$ *est une homothétie de centre* **O** *et de rapport* $k_1 \times k_2$, **si** $k_1 \times k_2 \neq \{-1, 1\}$.
- $h_1 o h_2$ *est une symétrie de centre* **O**, **si** $k_1 \times k_2 = -1$.
- $h_1 o h_2$ *est l'application identique, si* $k_1 \times k_2 = 1$,

**Exemple.** *L'espace* $\mathcal{E}$ *est muni du repère* $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

*On donne le point* $A(-1; 2; 2)$ *et* $h_1 = h(A; -3)$; $h_2 = h\left(A; \frac{1}{2}\right)$; $h_3 = h\left(A; \frac{1}{32}\right)$

1- *Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique* **de :** $h_1 o h_2$ et $h_1 o h_3$ .

**Solution**

**1- Déterminons la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de** $h_1 o h_2$ .

- $h_1 o h_2$ *Est l'homothétie de centre A et de rapport* $k = -\frac{3}{2}$ *car* $k_1 . k_2 = (-3)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$; .

*Elle a pour expression analytiques* $\iff \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{2}y + 5 \\ z' = -\frac{3}{2}z - 5 \end{cases}$ dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

**2- Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de** $h_1 o h_3$ .

- $h_1 o h_3$ *Est l'homothétie de centre A et de* **rapport** $k = -1$ car $k_1 . k_3 = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

*Elle a pour expression analytiques* $\iff \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y + 4 \\ z' = -z - 4 \end{cases}$ dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

### ➢ Composée de deux homothéties de centres distincts

**Théorème**

**Soit** $h_1$ et $h_2$ *deux homothéties de centre respective* **O** *et* **O'** $(O \neq O'$ *de* **rapport** $k_1$ et $k_2$ *respectivement.*

- $h_1 o h_2$ *est une homothétie de de centre* Ω ( *à déterminer* )*et de rapport* $k_1 \times k_2$, **si** $k_1 \times k_2 \neq 1$
- $h_1 o h_2$ *est une translation, si* $k_1 \times k_2, = 1$ ….

**Remarque** : Généralement, on a : $h_1 o h_2 \neq h_2 o h_1$

**Exemple.** *L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On donne le point $A(1;\ -1;0)$ ; $B(-1;0;1)$; $C(0;1;\ -1)$, $h_1\left(A;\frac{1}{2}\right)$; $h_2(B;2)$; $h_3(C;-4)$

1- **Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de :** $h_1oh_3$ et $h_2oh_1$ .

**Solution**

**1- *Déterminons la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de $h_1oh_2$ .***

- $h_1oh_3$ *Est l'homothétie de centre* **H** *et de rapport* $k=-2$ *car* $k_1.k_3=\left(\frac{1}{2}\right)(-4)=-2;$

*En effet, soit* $M\,(x,y,z)$ *un point de et E* $M'(x',y',z')$ *son image par* $h_1oh_3$ *On a*
$h_1oh_3(M)=M' <=> h_1[h_3(M)]=h_1[M_1]$ *avec* $M_1=h_3(M)$

- ***Déterminons les coordonnées de*** $M$ ***puis celles de*** $M'$**. On** a

$$M_1=h_3(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{CM_1}=-4\overrightarrow{CM_1} <=> \begin{pmatrix}x_1\\ y_1-1\\ z_1+1\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}x\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix}\ Donc\ <=>\begin{cases}x_1=-4x\\ y_1=-4y+5\\ z_1=-4z-5\end{cases}\ dans\ \ (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$$

De même $M'=h_1(M_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}\\ z=\frac{1}{2}z_1\end{cases}$ dans $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Ainsi en remplaçant $x_1$; $y_1$ et $z_1$

*par leur valeur respective prise dans l'expression analytique de $h_1$ on a*

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}(-4x)+\frac{1}{2}\\ y'=-\frac{1}{2}(-4y+5)-\frac{1}{2}\\ z'=-\frac{1}{2}(z-5)-\frac{1}{2}\end{cases}=>\begin{cases}x'=-2x+\frac{1}{2}\\ y'=-2y+2\\ z'=-z-\frac{5}{2}\end{cases}dans(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$$

*. Ω le centre de l'homothétie est le seul point invariant par $h_1oh_3$ ainsi on a :*

$$\begin{cases}x=-2x+\frac{1}{2}\\ y=-2y+2\\ z=-2z-\frac{5}{2}\end{cases}=>\begin{cases}3x=\frac{1}{2}\\ 3y=2\\ 3z=-\frac{5}{2}\end{cases}=>\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\ y=\frac{2}{3}\\ z=-\frac{5}{6}\end{cases}$$

***Conclusion*** : $h_1oh_3$ **est l'homothétie de centre** $\Omega\left(\frac{1}{6};\frac{2}{3};-\frac{5}{6}\right)$

- $h_2oh_1$ Est une translation $\left(k_1\times k_2=(2)\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)$ de **vecteur** $\overrightarrow{AA'}$ calculons les coordonnées de **A'**

$$A'=h_2oh_1(A)=h_2(A)$$

*L'expression analytique de $h_2$ nous permet d'obtenir facilement les coordonnées de* **A' ;** $h_2(O;2)$ *a pour expression analytique* $\begin{cases}x'=2x+1\\ y'=2y\\ z'=2z-1\end{cases}$ *dans* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

*Donc* $A'(3;-2;-1)$ **d'ou** $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}=(2;-1;-1)$ *est le vecteur de translation, dont l'expression analytique est*

$$\begin{cases}x'=x+2\\ y'=y-1\\ z'=z-1\end{cases}\ dans\ \ (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$$

***Remarques :***

- *Le centre de l'homothétie $h_2oh_1$ , est le point invariant par: $h_2oh_1$.*
- *Le vecteur de la translation est déterminé en cherchant l'image d'un point par: $h_2oh_1$.*

- ***Composée d'une homothétie et d'une translation.***

***Théorème*** *l'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

*Si h est une homothétie de centre O et de rapport $k\neq1$ et t une translation de vecteur $\vec{u}$ alors hot est une homothétie de rapport $k\neq1$ et une translation si $k=1$*

***N B** : Si $t$ est une translation de vecteur $\vec{v}$; l'application réciproque de t est une translation de vecteur $-\vec{v}$ et l'application réciproque de l'homethétie de rapport **k** est l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$. Par suite, l'application réciproque de l'application hot est l'application $(hot)^{-1} = t^{-1}o\,h^{-1}$ l'homothie de rapport $\frac{1}{k}$*

**Exemple.** *L'espace E est muni du Repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

*Soit t la translation de vecteur* $\vec{u}(-2;1;3)$ *et soit h l'homothétie de centre* $\Omega(1,-3,4)$ *de rapport* $-\frac{2}{3}$.

1- ***Definir analytiquement l'application*** $f = hot$.
2- *Démontrer qu'il existe un point **A** et un seul, invariant par f puisque f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.*
3- *Reconnaître de même l'application* $g = toh$. ***A-t-on*** $hot = toh$ **?**

**Solution**

1- ***Definir analytiquement l'application*** $f = hot$

*Soit **M (x, y, z)** un point de E et **M (x', y', z')** son image par hot on a :*

$M' = hot(M) = h[t(M)] = h(M_1)$ *avec* $M_1 = t(M)$ *Définissons analytiquement h et t*

$\mathcal{M} = t(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$*, donc les coordonnées de M vérifient:* $\begin{cases} x_1 = x-1 \\ y_1 = y+1 \\ z_1 = z-3 \end{cases}$

*Par ailleurs on a* $\mathcal{M}' = h(\mathcal{M}_1) \Leftrightarrow \Omega\mathcal{M} = \frac{1}{2}\Omega\mathcal{M}_1$ *donc les coordonnées de* $\mathcal{M}$ *vérifient :* $\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{5}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}y_1 - 5 \\ z' = -\frac{2}{3}z_1 + \frac{20}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}(x-1) + \frac{5}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}(y+1) - 5 \\ z' = -\frac{2}{3}(z-3) + \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x + 3 \\ y' = -\frac{2}{3}y - \frac{17}{3} \\ z' = -\frac{2}{3}z + \frac{26}{3} \end{cases}$ *Qui est l'expression analytique de hot dans* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

2- Démontrons que l'ensemble des points invariants est un singleton.

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x + 3 \\ y = \frac{2}{3}y - \frac{17}{3} \\ z = \frac{2}{3}z + \frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2x + 9 \\ 3y = -2y - 17 \\ 3z = -2z + 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = -\frac{17}{5} \\ z = \frac{26}{5} \end{cases}$$

Ainsi $f$ est une homothétie de centre $A\left(\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}, \frac{26}{5}\right)$ et de rapport$k = -\frac{2}{3}$

3- Déterminons l'application $t \circ h$.

$k \neq 0$, alors $t \circ h$ est une homothétie. Déterminons son centre $I$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M''(x'', y'', z'')$ son image par $t \circ h$ on a $M'' = t \circ h(M_2)$. Les coordonnées $x'', y'', z''$ de $M''$ vérifient : $\begin{cases} x'' = x_2 - 2 \\ y'' = y_2 + 1 \\ z'' = z_2 - 3 \end{cases}$ où $x_2, y_2, et z_2$ vé-

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ y_2 = -\frac{2}{3}y - 5 \\ z_2 = -\frac{2}{3}z + \frac{20}{3} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x'' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\ y'' = -\frac{2}{3}y - 4 \\ z'' = -\frac{2}{3}z + \frac{11}{3} \end{cases}$$ est l'expression analytique de $t \circ h$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Déterminons les coordonnées du centre $I$ .Posons $I(x_o, y_o, z_o)$ $I$ est le seul point invariant par $t o h$ donc ses coordonnées vérifient : $\begin{cases} x_o = -\frac{2}{3}x_o - \frac{1}{3} \\ y_o = -\frac{2}{3}y_o - 4 \\ z_o = -\frac{2}{3}z_o + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -\frac{1}{5} \\ y_o = -\frac{12}{5} \\ z_o = -\frac{11}{5} \end{cases}$

d'où $t \circ h$ est l'homothétie de centre $I(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{11}{5})$ et de rapport $k = -\frac{2}{3}$ il est donc claire que lorsque $k \neq 1$, on a aussi $t \circ h \neq h \circ t$.

# LECON 2: SYMETRIES ORTHOGONALES

*Nous distinguons deux symétries orthogonales : **la réflexion et le demi-tour**.*

## I- Réflexions

### 1- Plan médiateur d'un segment

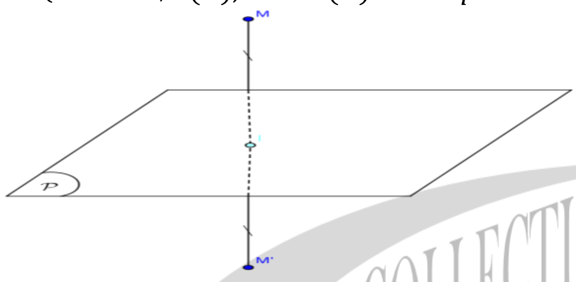
*Soit A et **B** deux points distincts de l'espace et **I** le milieu de **[AB]**.*

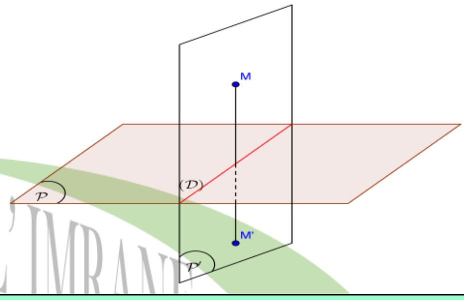
- *Le **plan médiateur** du segment **[AB]** est le plan passant par le **milieu** du segment **[AB]** et qui est **orthogonal** à ce segment.*

### 2- Définition et propriétés

**Définition.**

- *Soit **(P)** un plan de l'espace **On appelle réflexion** de plan **(P)** et on note $S_P$ ou $S_{(P)}$ l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point **M** associe le point **M'** tel que:* $\begin{cases} \rightarrow \text{Si } M \in (P), \text{alors } M = M' \\ \rightarrow \text{Si } M \notin (P), \text{alors } (P) \text{ est le plan médiateur de } [MM'] \end{cases}$




NB : ***Une réflexion de** plan (P) est aussi appelée **symétrie orthogonale par rapport à (P).***

**Remarque :**

- *L'ensemble des points invariants par est le plan (P).*
- *Si **H** est le projeté orthogonal de **M** sur **(P)** et si **M'= (M)**, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$..*
- *Si **M'= M,** alors **M= M'**. On dit que M et **M'** sont symétriques par rapport à **(P).***
- *Pour tout plan **(P),** on a $S_P \circ S_P$ **=IdE ;** est donc une transformation de l'espace et $S_P^{-1} = S_P$*

**Propriétés**

*Soit **(P)** un plan et la réflexion de plan **(P).***

- *Si (Q) est un plan perpendiculaire à **(P)** et (Δ) leur droite d'intersection, alors :*
  - *(Q) est globalement invariant par ($S_P$).*
  - *La restriction de **(** $S_P$**)** à **(Q)** est la symétrie orthogonale d'axe **(Δ).***
- *Si (D) est une droite orthogonale à **(P)** en un point **I**, alors :*
  - ***(D)** est globalement invariant par $S_P$.*
  - *La restriction de $S_P$ **à (D)** est la symétrie de centre **I**.*

**Remarques :** *réflexion de l'espace est une application affine*

### 3- Réflexions et configurations

#### a- Propriétés

- *Toute réflexion transforme les droites (respectivement les plans) en droites (respectivement en plans) en conservant parallélisme et orthogonalité.*
- *L'image d'une figure plane par une réflexion est une figure de même nature et de mêmes dimensions.*
- *L'image d'un solide de l'espace par une réflexion est un solide de même nature et de même dimension.*
- Si **(D)** est une droite orthogonale à (P) en un point I alors **(D)** est globalement 0 invariante par $S_{(P)}$ et la restriction de **(P)** à **(D)** est la symétrie de centre **I** .
- La réflexion de plan P est une isométrie.

- Toute réflexion de plan (P) est une application affine.
- L'image d'un plan par une réflexion de plan (P) est un plan.
- l'image d'une figure plane par une réflexion de plan (P) est une figure plane de même nature.
- l'image d'un solide par une réflexion est un solide de même nature.

### b- Expressions analytique d'une réflexion.

**Exemple 1**

*Soit (P) le plan d'équation cartésienne* $2x-y+z=1$; *Déterminer l'expression analytique de la réflexion* ***S*** *de plan* ***(P)***

**Solution**

**1- Déterminons l'expression analytique de la réflexion S de plan (P).**

$\vec{n}(2;-1;1)$ *Un vecteur normal à* **(P).** $S(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}(MM')\perp(P)\\ I\in(D)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MM'}=t\vec{n}\\ I\in(P)\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=2t+x & (1)\\ y'=-t+y & (2)\\ z'=t+3 & (3)\\ x+x'-\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=1 & (4)\end{cases}$$

$(1),(2)$ *et* $(3)$ *dans* $(4)$ *nous donne* $x+2t+x-\frac{y+-t+y}{2}+\frac{z+t+3}{2}=1 \Rightarrow t=\frac{-2x+y-z+1}{3}$ *Nous obtenons l'expression* ***analytique :***

$$\begin{cases} x'=\frac{2}{3}(-2x+y-z+1)+x\\ y'=-\frac{1}{3}(-2x+y-z+1)-y\\ z'=\frac{1}{3}(-2x+y-z+1)+3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{3}(-x+2y-2z-2)\\ y'=\frac{1}{3}(2x-4y+z-1)\\ z'=\frac{1}{3}(-2x+y+2z+10)\end{cases}$$

**Exemple 2 :** *Soit* $f$ *la transformation de l'espace d'expression analytique* $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(x+2y-2z-4)\\ y'=\frac{1}{3}(2x+y+2z+4)\\ z'=-\frac{1}{3}(2x-2y-z-4)\end{cases}$

1- *Démontrons que l'ensemble des points invariants par* $f$ *est plan* $\mathcal{P}$ *dont on déterminera son équation.*
2- *Soit* $f(M)=M'$ *Démontrer que le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *est le vecteur normal de* $\mathcal{P}$
3- *Montrer que I le milieu de* $[MM']\in(\mathcal{P})$.
4- *En déduire la nature de* $f$.

**Solution**

**1- Démontrons que l'ensemble des points invariants par f est plan $\mathcal{P}$ dont on déterminera son équation**

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}3x=x+2y-2z-4\\ 3y=2x+y+2z+4\\ 3z=2x-2y-z-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+2y-2z-4=0\\ 2x-2y+2z+4=0\\ 2x-2y-4z-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x-y+z+2=0 \ (\mathcal{P})$$

**2- Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur normal de $\mathcal{P}$**

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\ y'-y\\ z'-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(x+2y-2z-4)-x\\ \frac{1}{3}(2x+y+2z+4)-y\\ \frac{1}{3}(2x-2y-z-4)-z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2x+2y-2z-4\\ 2x-2y+2z+4\\ -2x+2y-2z-4\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3}\right)(-2x+2y-2z-4)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$ le vecteur

$\vec{n}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ est le vecteur normal de $\mathcal{P}$

**3- Montrons que I le milieu de $[MM']\in(\mathcal{P})$.**

$I\left(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2}\right)$ I$\in(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \frac{x+\frac{1}{3}(x+2y-2z-4)}{2}-\frac{y+\frac{1}{3}(2x+y+2z+4)}{2}+\frac{z+\frac{1}{3}(2x-2y-z-4)}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{0}{6}=0$ **C.Q.F.D**

**4- Déduisons-en la nature de $f$.**

Comme l'ensemble des points invariants par $f$ est plan $\mathcal{P}$ $d'equation$: $x - y + z + 2 = 0$ , $I$ le milieu de $[MM'] \in (\mathcal{P})$ **et** vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur normal de $\mathcal{P}$ **alors $f$ est une réflexion**

*Exemple 3*

*L'espace $\mathcal{E}$ est muni du Repère* $(0\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

*Soit f la transformation de l'espace d'expression analytique* $\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(3x + 6y - 2z - 14) \\ y' = \frac{1}{7}(6x - 2y + 3z + 21) \\ z' = \frac{1}{7}(-2x + 3y + 6z - 7) \end{cases}$

1- Verifier que $f \circ f(M) = M$.

2- Deteminer l'ensemble des points invariants par $f$.

3- On suppose que l'ensemble des points invariants est le plan (P) d'équation: $2x - 3y + z + 7 = 0$.Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan (P) ;

4- Soit $I\ (x_1;\ y_1; z_1)$ le milieu du segment $[M\,M']$, montrer que $I$ appartient au plan (P).

5- Conclure sur la nature et les éléments caractéristiques de $f$ ;

6- Soit Q le plan d'équation cartésienne : $x - 2y + z - 3 = 0$.Donner l'expression annalytique de la reflexion $S_Q$, base **Q**

## Solution

**1- Démontrer que pour tout point $M$ de l'espace $\mathcal{E}$** $fof\,(M) = f\,(M)$

On a $f \circ f(M) = f(f(M)) = f(M') = M''$

$$P(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{7}(3x' + 6y' - 2z' - 14) \\ y'' = \frac{1}{7}(6x' - 2y' + 3z' + 21) \\ z'' = \frac{1}{7}(-2x' + 3y' + 6z' - 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{7}(3x + 6y - 2z - 14) = x' \\ y'' = \frac{1}{7}(6x - 2y + 3z + 21) = y' \\ z'' = \frac{1}{7}(-2x + 3y + 6z - 7) = z' \end{cases}$$

**Donc $f \circ f(M) = f(M)$. D'où $f$, on dit que $f$ est une application involutive.**

**2- Déterminons l'ensemble des points invariants par $f$ soit $M\,(x, y\,, z\,)$ un point de l'espace, $M$ est invariant par $f$ signifie que $f(M) = M$.**

soit $M\,(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$. $M$ est invariant par $f$ signifie que $f(M) = M$

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}(3x + 6y - 2z - 14) \\ y = \frac{1}{7}(6x - 2y + 3z + 21) \\ z = \frac{1}{7}(-2x + 3y + 6z - 7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = (3x + 6y - 2z - 14) \\ 7y = (6x - 2y + 3z + 21) \\ 7z = (-2x + 3y + 6z - 7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4x + 6y - 2z - 14) = 0 \\ (6x - 9y + 3z + 21) = 0 \\ (-2x + 3y - z - 7) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2(x - 3y + z + 7) = 0 \\ 3(x - 3y + z + 7) = 0 \\ -(x - 3y + z + 7) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + z + 7 = 0 \\ x - 3y + z + 7 = 0 \\ x - 3y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

On trouve que l'ensemble des points invariants par $f$ est le plan (P) d'équation carté- sienne : $-3y + z + 7 = 0$. On dit que (P) est la base de l'application $f$.

**3- On suppose que l'ensemble des points invariants est le plan (P) d'équation: $2x - 3y + z + 7 = 0$.Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan (P) ;**

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$ En remplaçant $x$, $y$, $z$ par leur valeur prise dans l'expression analytique de $f$ on a:

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x - \frac{1}{7}(3x + 6y - 2z - 14) \\ y - \frac{1}{7}(6x - 2y + 3z + 21) \\ z - \frac{1}{7}(-2x + 3y + 6z - 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}(-4x + 6y - 2z - 14) \\ \frac{1}{7}(6x - 9y + 3z + 21) \\ \frac{1}{7}(-2x + 3y - z - 7) \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2(-2x + 3y - z - 7) \\ -3(-2x + 3y - z - 7) \\ 1(-2x + 3y - z - 7) \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{7}(2x + 3y - z - 7)\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right)$ Donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$est colinéaire au vecteur normal de **(P).**

D'où $\overrightarrow{MM'} \perp (P)$

**4- Soit $I\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ le milieu du segment $[M\,M']$, montrons que $I$ appartient au plan (P) ;Concluons sur la nature et les éléments caractéristiques de $f$ ;**

*Exprimons les coordonnées du point I en fonction de x, y, et z*

$$I\begin{pmatrix} x_1=\frac{x'+x}{2}\\ y_1=\frac{y'+y}{2}\\ z_1=\frac{z'+z}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{x+\frac{1}{7}(3x+6y-2z-14)}{2}\\ y_1=\frac{y+\frac{1}{7}(6x-2y+3z+21)}{2}\\ z_1=\frac{z+\frac{1}{7}(-2x+3y+6z-7)}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{7}(5x+3y-z-7)\\ y_1=\frac{1}{7}\left(3x+\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}z+\frac{21}{2}\right)\\ z_1=\frac{1}{7}\left(-x+\frac{3}{2}y+\frac{13}{2}z-\frac{7}{2}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1=\frac{1}{7}(10x+6y-2z-14) & (1)\\ 3y_1=\frac{1}{7}\left(9x+\frac{15}{2}y+\frac{9}{2}z+\frac{21}{2}\right) & (2)\\ z_1=\left(-x+\frac{3}{2}y+\frac{13}{2}z-\frac{7}{2}\right) & (3)\end{cases}$$

$(1)-(2)+(2)$ *nous donne* $2x_1-3y_1+z_1+7=0$ *d'où le point I appartient au plan (P)*

**5- Conclusion :**

*Le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *est orthogonal au plan (P) et le* **milieu I du segment [MM']** *appartient* **à (P)** *qui est l'ensemble des points invariants. Alors l'application f est la* reflexion *de base* **(P)**

**6- Soit Q le plan d'équation cartésienne :** $x-2y+z-3=0$. **Donnons l'expression annalytique de la reflexion S(Q) , base Q**

*Soit* **M** $(x\,;\,y\,;\,)$ *un point de* $\mathcal{E}$ *d'image* **M** $(x';\,y';\,z')$ *par la* réflexion *de plan* **(Q)** *de vecteur directeur* $\vec{n}(-2;1;1)$. *On a* **M'=S(M )** *si et seulement si le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *est orthogonal au plan* **(Q)***,et le milieu du segment* **[MM]** *appartient au plan* **(Q).** *Soit* $s$*, nombre réel,*

$$\overrightarrow{MM'}\perp(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}\,//\,\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}=s\vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'-x\\ y'-y\\ z'-z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'=x+s\\ y'=y-2s\\ z'=z+s\end{cases} \quad (s\in IR)$$

*Le milieu du segment [MM] est le point de coordonné* $K(x_1\ ,\ y_1\ ,z_2\ )$

$$\begin{pmatrix} x_1=\frac{x'+x}{2}\\ y_1=\frac{y'+y}{2}\\ z_1=\frac{z'+z}{2}\end{pmatrix}$$ *En remplaçant* **x', y' et z'** *dans le coordonnées* **K** *on obtient* $$\begin{pmatrix} x_1=\frac{2x+s}{2}\\ y_1=\frac{2y-2s}{2}\\ z_1=\frac{2z+s}{2}\end{pmatrix}$$ *en remplaçant les coordonnées* **K** *dans l'équation cartésienne de (Q).*

*On a :* $\left(\frac{2x+s}{2}\right)-2\left(\frac{2y-2s}{2}\right)+\left(\frac{2z+s}{2}\right)-3=0 \Rightarrow \left(\frac{2x+s-4y+4s+2z+s}{2}\right)-3=0$

$\Rightarrow s=-\frac{1}{3}(x-2y+z-3)$

*En remplaçant cette valeur de* $s$ *dans le système précèdent on obtient l'expression analytique de la* reflexion $S(Q)$ **de base (Q)**

$$\begin{cases} x'=x-\frac{1}{3}(x-2y+z-3)\\ y'=y+\frac{2}{3}(x-2y+z-3)\\ z'=z-\frac{1}{3}(x-2y+z-3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{3}(2x+2y-z-3)\\ y'=\frac{1}{2}(2x-y+2z-9)\\ z'=\frac{1}{3}(-x+2y+2z+3)\end{cases}$$

***Exemple 1***

*Soit (P) le plan d'équation* **cartésienne** $x-y+z=-2$; *Déterminer l'expression analytique de la réflexion* ***S*** *de plan* ***(P)***

***Solution***

*1- Déterminons l'expression analytique de la réflexion S de plan (P).*

$\vec{n}(1;-1;1)$ *Un vecteur normal à* **(P).** $S(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}(MM')\perp(P)\\ I\in(D)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MM'}=\lambda\vec{n}\\ I\in(P)\end{cases} \quad (\lambda t\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+\lambda & (1)\\ y'=y-\lambda & (2)\\ z'=z+\lambda & (3)\\ \frac{x+x'}{2}-\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=-2 & (4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+\lambda & (1)\\ y'=y-\lambda & (2)\\ z'=z+\lambda & (3)\\ x+x'-y-y'+z+z'+4=0 & (4)\end{cases}$$ x +x−y −y+z +z+4=0

$(1),(2)$ *et* $(3)$ *dans* $(4)$ *nous donne* $x+x+\lambda-y-y+\lambda+z+z+\lambda+4=0$

$\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{3}(2x-2y+2z+4)$ *Nous obtenons l'expression*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x - \frac{1}{3}(2x - 2y + 2z + 4) \\ y' = y + \frac{1}{3}(2x - 2y + 2z + 4) \\ z' = z - \frac{1}{3}(2x - 2y + 2z + 4) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z - 4) \end{array}\right.$$

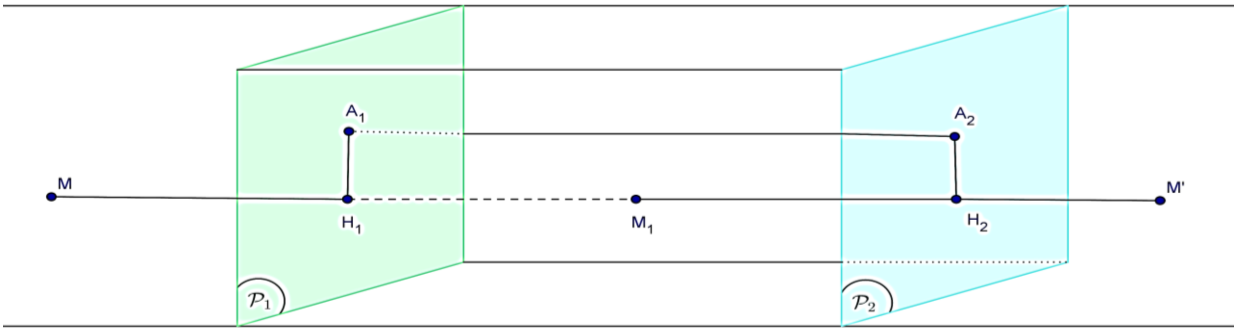
*qui est l'expression analytique de S(P) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$*

### c- *Composée de deux réflexions de plans parallèles.*

Propriétés-

- ***La composée** de **deux réflexions** de **plans parallèles** est une **translation de vecteur** $2\vec{u}$ **où** $\vec{u} = \overrightarrow{H_1H_2}$ **(vecteur normal à ces deux plans.) avec** $H_1 \in (P_1)$ **et** $H_2$ **son projeté orthogonal sur** $(H_2)$.*

*Soit* $A_1$ *un point de* $(P_1)$ *et* $A_2$ *son projeté orthogonal sur* $(P_2)$, *alors le vecteur* $\overrightarrow{A_1A_2}$ *est un vecteur normal à* $(P_1)$ et $(P_2)$.




*Soit M un point de* $\mathcal{E}$. $M_1$ *son image par* $S_{(P_1)}$ $M_2$ *par son image par* $S_{P_2}$ *(comme l'indique a figure ci-dessus), désignons par* $H_1$ *et* $(H_2)$ *les milieux respectifs des* segments $[MM_2]$ et $[M_1M_2]$.

*On a:* $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{H_2M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$.

***Donc*** $S_{(P_1)} o\, S_{(P_2)}$. *Est la translation de vecteur* $2\overrightarrow{H_1H_2}$

- *Réciproquement, toute translation de vecteur* $\vec{u}$ *non nul est la composée de deux* réflexions *de plans parallèles ayant* $\vec{u}$ *pour vecteur normal.*
- *La composée **de** deux réflexions **de** plans orthogonaux **est une rotation d'axe D et d'angle** $\pi$*

## LECON 3 : DEMI-TOURRS

## A- Définition et propriétés

### 1- *Définition*

- *Soit **(Δ) une** droite de l'espace. **On appelle demi-tour d'axe (Δ),** et on note $S_{(\Delta)}$, l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :*
- *Si **M ∈ (Δ),** alors **M'=M.***
- *Si **M ∉ (Δ),** alors **(Δ)** est la médiatrice de **[MM']***

*NB : Un demi-tour d'axe (Δ) est aussi **appelé symétrie orthogonale par rapport à (Δ).***

*Remarque :*

- *L'ensemble des points invariants par est le droite* (Δ)
- *Si **H** est le projeté orthogonal de **M** sur (Δ) et si **M'≠ (M)**, alors* $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$..
- *Si **M'= S(M),** alors **M= S(M').** On dit que **M** et **M'** sont symétriques par rapport à (Δ)*
- *Pour tout droite(Δ), on a* $S_{(\Delta)}\, o\, S_{(\Delta)}$ ***=IdE ;*** *est donc une transformation de l'espace et* $S_{(\Delta)}{}^{-1} S_{(\Delta)}$

### 2- Propriétés

- *Soit **(Δ)** une droite de l'espace, **Δ** le demi-tour d'axe **(Δ)** et **(P)** un plan orthogonal à **(Δ)** en **I***
- ***(P)** est globalement invariant par **Δ.***
- *La restriction de **Δ** à **(P)** est la **symétrie de centre I.***

- *La **composée de deux réflexions** de **plans perpendiculaires** suivant une droite*(Δ) ***est le demi-tour d'axe*** (D)
- ***Tout demi-tour d'axe*** (Δ) *est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant la droite* (Δ).

## 3- *Demi-tours et configurations*

- *Tout demi-tour transforme les droites (respectivement les plans) en droites (respectivement en plans) en conservant parallélisme et orthogonalité.*
- *L'image d'une figure plane par un demi-tour est une figure de même nature et de mêmes dimensions.*
- *L'image d'un solide de l'espace par un demi-tour est un solide de même nature et de mêmes dimensions.*

## 4- *Expressions analytique d'un demi – tour*

***Exemple 1***

*On donne* **A (1, −1, 2) et $\vec{u}(-1, 1, 1)$.** *Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe* **(Δ)**

*Solution*

1- ***Déterminons l'expression analytique du demi-tour** $S_\Delta$ **d'axe (Δ)***

*La droite(Δ) passant par le point A et dirigée par le vecteur$\vec{u}$. Soit M (x, y , z ) un point d𝒮 et M'(x , y', z)*
*son image le demi-tour d'axe ((Δ)) de repère* $((A,\vec{u})u$

$$(\Delta):\Longrightarrow\begin{cases} x=1-k\\ y=-1+k \\ z=k-2\end{cases}\quad (t\in IR)$$

Soit $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ (un vecteur directeur de **(Δ)** et soit **M** un point de l'espace et **M'**son image par **S Δ. Posons H le** milieu de **[MM']**. $S_\Delta$**(M)=M'**$\Leftrightarrow\begin{cases}(MM')\perp(\Delta)\\ H\in(\Delta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=0\\ H\in(\Delta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'-x\\ y'-y\\ z'-z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-k\\ k\\ k\end{pmatrix}=0$

$$=>-(x'-x)+(y'-y)+(z'-z)=0;\quad (2)$$

$$H\begin{pmatrix}\frac{x'+x}{2}\\ \frac{y'+y}{2}\\ \frac{z'+z}{2}\end{pmatrix}\in(\Delta)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x'+x}{2}=1-k\\ \frac{y'+y}{2}=-1+k\\ \frac{z'+z}{2}=2+k\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x'=2-2k-x\\ y'=-2+2k-y\\ z'=4+2k-z\end{cases}\quad(1)$$

$(1), dans\ (2)\ nous\ donne: -(2-2k-x-x)+(-2+2k-y-y)+(2k-z-z)=0;$

$$-2+2k-x-x-2+2k-y-y+2k-z-z=0\Rightarrow 2x-2y-2z+2k-2k+2k+2-2=0$$

$\Rightarrow k=\frac{1}{3}(-x+y+z)$ *En remplaçant cette valeur de* $\boldsymbol{k}$ *dans le système précèdent on obtient l'expression*

analytique $\begin{cases}x'=2-\frac{4}{3}(-x+y+z)-x\\ y'=-2+\frac{4}{3}(-x+y+z)-y\\ z'=4+\frac{4}{3}(-x+y+z)-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(-x+2y-2z-6)\\ y'=\frac{1}{3}(-2x-y+2z-6)\\ z'=\frac{1}{3}(-2x+2y-z+12)\end{cases}$

---

***Exemple 2 BACCALAUREAT CAMEROUN 2023***

*On considère dans un repère orthonormé* $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ *les points* $A(-1\,;-1\,;0), B(0,0,2), et\ C(-1,1,2)$

1- *Montrer que les points A , B et C définissent un plan*
2- *Déterminer l'équation cartésienne de ce plan*
3- *Soit le plan (p) d'équation* $x+y-z+2=0$*.Déterminer l'expression analytique de la réflexion S de plan (P)*
4- *Soit g la transformation de l'espace d'expression analytique* $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(-x+2y-2z+4)\\ y'=\frac{1}{3}(2x-y-2z+4)\\ z'=\frac{1}{3}(-x-2y-z+8)\end{cases}$

**4.1** *Démontrons que l'ensemble (D) des points invariants par g est la droite passant par B de vecteur directeur* $\vec{u}(-1;-1;1)$

4.2 *Soit M et M' deux points de » l'espace tels que* $g(M) = M'$

**4.2.1** *Démontrer que le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *est le vecteur normal de* $(D)$

**4.2.2** *Montrer que* $I$ *le milieu de* $[MM'] \in (D)$.

**4.2.3** *En déduire g est un demi-tour*

5. *Montrer que* $(P) \perp (D)$
6. *Démontrer que* $f o g$ *est une symétrie centrale dont on précisera son centre*

## Solution

**1- Montrons que les points A, B et C définissent un plan**

$\overrightarrow{AB}(1;1;2)$ *et* $\overrightarrow{AC}(0;2;2)$

*on a*: $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \neq \vec{0}$ comme cest deux vecteurs ne sont pas colinéaires, alors on peut conclure que *points A , B et C définissent un plan*

**2- Déterminer l'équation cartésienne de ce plan**

*On a :* $\overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ *pour tout* **M(x ;y ;z) de l'espace**

$$\overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x + y - z + 2} = 0$$

$(ABC) : \boldsymbol{x + y - z + 2 = 0}$

3- *Soit le plan (p) d'équation* $x + y - z + 2 = 0$.*Déterminer l'expression analytique de la réflexion S de plan (P)*

4- $\vec{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{1};\boldsymbol{1};\boldsymbol{-1})$ *Un vecteur normal à* **(P).** $f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp (P) \\ I \in (D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = r\vec{n} \\ I \in (P) \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + r & (1) \\ y' = y + r \quad (r \in \mathbb{R}) & (2) \\ z' = z - r & (3) \\ \frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} - \frac{z+z'}{2} = -2 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \lambda & (1) \\ y' = y - \lambda & (2) \\ z' = z + \lambda & (3) \\ x + x' + y + y' - z - z' + 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1), (2)$ *et* $(3)$ *dans* $(4)$ *nous donne* $x + x + \lambda - y - y + \lambda + z + z + \lambda + 4 = 0$

$$\lambda = \frac{1}{3}(-2x - 2y + 2 - 4) \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 4) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 4) \end{cases}$$

4.1 **Démontrons que l'ensemble $(D)$ des points invariants par g est la droite** *passant par B de vecteur directeur* $\vec{u}(-1;-1;1)$

*Soit* ***M(x ; y ; z)*** *u point de l'espace*

$$M \in (D) \Rightarrow g(M) = M \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z - 4) \\ y = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 4) \\ z = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x - y + z = 2} \\ \boldsymbol{-x + 2y + z = 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \ell \\ y = 2 - \ell \\ z = \ell \end{cases} \quad (\ell \in IR)$$

*Or* $A \in (D)$ *donc* $2 - \ell = 0 \Rightarrow \ell = 2$ *donc* $B \in (D)$. *(D)* est la droite *passant par B de vecteur directeur* $\vec{u}(-1;-1;1)$

Ainsi (D) est la droite affine de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ passant le point de coordonnées $(2,2,0)$. De plus, $(0,0,2)=2(-1;-1;1)+(2,2,0)$ donc $B\in(D)$.

b) Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x,y,z)$ et M' son image par g. On a :

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(-x+2y-2z-4)-x\\ \frac{1}{3}(2x-y-2z+4)-y\\ \frac{1}{3}(-2x-2y-z+8)-z\end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(-2x+y-z+2)\\ \frac{2}{3}(x-2y-z+2)\\ -\frac{2}{3}(x+y+2z-4)\end{pmatrix}$$

ainsi, $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{v}=-\frac{2}{3}(-2x+y-z+2)-\frac{2}{3}(x-2y-z+2)-\frac{2}{3}(x+y+2z-4)=0$ donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D).

Soit L le le milieu du segment [MM']. On a :

$$\begin{cases} x_L=\dfrac{x+x'}{2}=\dfrac{1}{3}(x+y-z+2)\\ y_L=\dfrac{y+y'}{2}=\dfrac{1}{3}(x+y-z+2)\\ z_L=\dfrac{z+z'}{2}=\dfrac{1}{3}(-x-y+z+4)\end{cases}$$

par suite $x_L=-z_L+2=y_z$. On conclut donc que $L\in(D)$.

c) D'après ce qui précède, on en déduit que .

- si $M\in(D)$ alors $g(M)=M$,
- si $M\notin(D)$ alors (D) est la médiatrice du segment $[Mg(M)]=[MM']$

par suite, g est un demi−tour. *Autrement dit une symétrique orthogonale par rapport à* (D).

5. a) Le vecteur $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ est un vecteur normal (P) colinéaire à $\vec{v}$ donc (P) et (D) sont orthogonaux. De plus, B(0,0,2) appartient à (P) et (D) donc par conséquent (P) et (D) sont perpendiculaires.

5) b) Déduisons – en que $f o g$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre.
Puisque (P) ⊥ (D), alors $f o g = S_{(P)}oS_{(D)} = S_{(P)\cap(D)} = S_B$. Donc $f o g$ est la symétrie centrale de centre B.

**Remarque**

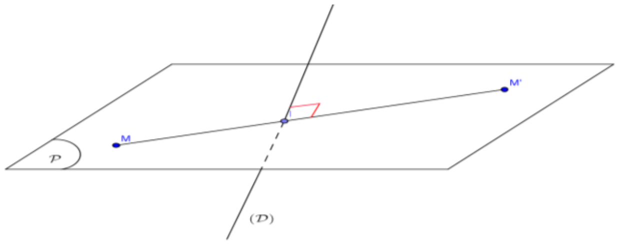
*Pour déterminer l'expression analytique d'un demi -tour, d'axe (D) il faut :*

- *Déterminer une représentation paramétrique ou une équation cartésienne de son axe ;*
- *Utiliser les deux propriétés suivantes :le milieu du segment **[MM']** appartient à l'axe **(D)** et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur directeur de la droite **(D)***

## 5- Propriétés

Soit (Δ) une droite de l'espace, Δ le demi-tour d'axe (Δ) et (P) un plan orthogonal à (Δ) en I.

- (P) est globalement invariant par Δ
- La restriction de Δ à (P) est la **symétrie de centre I.**




## 6- Composée de deux demi-tours

**Lemme**

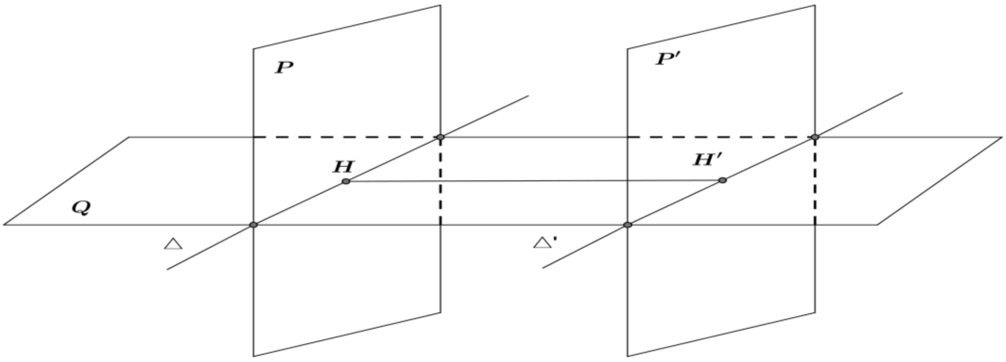
*Soient (D) et (D') deux droites de l'espace distinctes, et coplanaires, et $S_D oS_{D'}$ les demi-tours d'axes respectifs (D) et (D') .*

***Etudions l'application*** $S_{D'}oS_D$.

➲ *Désignons par (Q) le plan déterminé par $S_D$ et $S_{D'}$ par (P) (resp.(P')) les plans contenant $S_D$ (resp $S_{D'}$)et perpendiculaires à (Q).* Soit $\boldsymbol{S_P}$ **et** $\boldsymbol{S_{p'}}$**.et** $\boldsymbol{S_Q}$ *les réflexions d'axes (P), (P') et (Q) respectivement. On a les plans (P) et (Q) sécants suivants la droite (D) d'où $S_D$ ) $= S_Q \circ S_P$ ). De même on a $S_{D'} = S_{P'}\ o\ S_Q$ par suite on a $S_{D'} O\ S_D = S_{P'}\ o\ S_P$. Nous distinguons deux cas pour poursuivre notre études :* **les droites (D) et (D') sont parallèles ; les droites (D) et (D') sont sécantes**

- ***premier cas*** *: (D) et(D') sont parallèles*

  *Dans ce cas les plans* ***(P), et (P')*** *sont parallèles.(comme l'indique la figure1 ci-dessous). Application* $\boldsymbol{S_D\ o\ S_{D'}} =$ $\boldsymbol{S_{P'}\ o\ S_P}$**. est la translation de** $\overrightarrow{HH'}$




- *Deuxième cas : (D) et (D') sont sécantes.*

  *Désignons par K le point d'intersection des droite(D)et(D'), les plans (P) et (P') sont sécants ; leur intersection est la droite (Δ) perpendiculaire au plan (Q). Orientons la droite (Δ) par un vecteur unitaire* $\vec{n}$. *alors on a :* $\boldsymbol{S_{D'} o S_D = S_{P'}\ o\ S_P}$ ***est la réflexion d'axe (Δ) Ou une rotation d'axe (Δ).***

***Théorème*** *La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une Translation. 2. La composée de deux demi-tours d'axes sécants est une Rotation.*

## *7- Composée d'un demi-tour et d'une* réflexion

***Théorème*** *La composée d'un demi-tour d'axe (Δ) et d'une réflexion de plan* ***(P)*** *perpendiculaire à* ***(Δ)*** *en un point* ***K*** *est la symétrie de* ***centre K*** .

# AUTRES APPLICATIONS AFFINES: LES PROJECTIONS

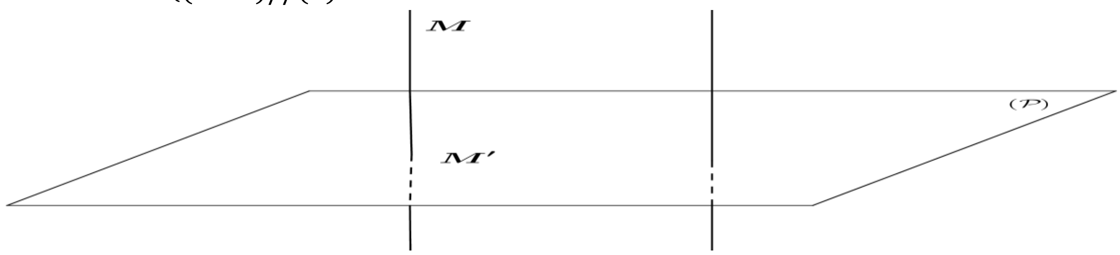
## 1- PROJECTIONS SUR UN PLAN

### a- Définition et propriété

***Soit (P) un plan de l'espace et (Δ) une droite non parallèle à (P).***

*On appelle* **projection sur (P)** *parallèlement à* **(Δ)** *l'application* **p** *de l'espace dans lui-même qui à tout point* **M** *associe* **M'**, *point d'intersection de* **(P)** *avec la parallèle à* **(Δ)** passant par M.

$$\textbf{Soit } p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (P) \\ (MM')//(\Delta) \end{cases}$$




<u>**NB**</u> **:** *M'est le projeté de* **M** *sur* **(P)** *parallèlement à* **(Δ)**

## <u>Remarque :</u>

- *L'images d'un point par une projection est appelée projeté de M .*
- *La projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (D) est dite orthogonale lorsque (P)est orthogonale à (D).*
- *Pour toute projection P de l'espace, on a* ***P∘P=P.*** *De même, toute application de l'espace vérifiant* ***f ∘ f = f*** *est une projection de l'espace*

## <u>Propriétés</u>

**P1 : *Soit p la projection sur un plan (P) sur un plan (P) parallèlement à une droite (Δ).***

- *L'image de l'espace ℰ par* **p** *est (P).*
- *L'ensemble des* ***antécédents*** *par* **p** *d'un point M' de (P) est la parallèle à (Δ) passant par M'.*
- *L'ensemble des* ***points invariants*** *par* **p** *passant par* ***M'.***
- ***L'ensemble des*** *points invariants par* **p** *est le plan* **(P).**

***P2 Soit P une projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (D).***

- *– L'ensemble des points invariants par P est le plan (P)*
- *– L'ensemble des antécédents par la projection P est la parallèle à (D).*

*P1 conservation de la projection*

- *3 points alignés ont aussi leurs images alignés par une projection.*
- *Toute projection de l'espace est une application affine,d'application linéaire associée une projection vectorielle P .*

### <u>*Exemple 1*</u>

*L'espace ℰ est muni du Repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

*On considère dans l'espace ℰ le plan (P) d'équation cartésienne* $2x + y + 2z + 4 = 0$ *et la droite* **(D)** *de représentation paramétrique* $\begin{cases} x = -1 + \eta \\ y = 1 - \eta \\ z = 1 - 2\eta \end{cases}$ $(\eta \in IR)$

*1- Démontrer que la droite (D) et le plan (P) sont sécants en un point A dont on déterminera les coordonnées.*

*2 Soit* **P** *l'application de* **E** *dans* **E** *qui a tout point* ***M (x, y , z )*** *associe le point M' (x', y', z') dont les coordonnées sont données par :*

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(5x + y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-4x - 2y - z + 8) \end{cases}$$

*a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par l'application P est le plan (P)* *b) Démontrer que l'ensemble des antécédents du point A par l'application P est une droite parallèle à (D)*

1- *Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera*

2- *Soit B (1, 0, 1) un point de (P) Déterminer l'ensemble des antécédents du point B par l'application P puis conclure*

**Solution**

---

**1- Démontrons que la droite (D) et le plan (P) sont sécants en un point A dont on déterminera les coordonnées.**

*Soit $\vec{u}(1,-1,-2)$ un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}(2,1,2)$ un vecteur normal à (P) On sait que (P) et (D) sont sécants si et seulement si $\vec{n}\vec{u}=0$.*

*Ainsi, on a :* $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=(-1)(1)+(2)(1)+(-2)(2)=3\neq 0$ *Donc (D) et (P) sont sécants Soit $A(a,b;c)$ leur point d'intersections*

On a : $(D)\cup(P) \Rightarrow 2(-1+\eta)+(1-\eta)+2(1-2\eta)+4=0$

$\Rightarrow -2+2\eta+1-\eta+2-4\eta+4=0 \Rightarrow \eta=-1$. *Donc* $\begin{cases}x=-1-1\\y=1-(-1)\\z=1-2(-1)\end{cases} \Rightarrow A\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$

---

**2- Démontrons que l'ensemble des points invariants par l'application P est le plan (P)**
**Soit M (x, y , z ) un point de ξ . M est invariant par P signifie que P (M )=M,**

$$P(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}(5x+y+2z-4)\\y=\frac{1}{3}(-2x+2y-2z+4)\\z=\frac{1}{3}(-4x-2y-z+8)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x=5x+y+2z-4\\3y=-2x+2y-2z+4\\3z=-4x-2y-z+8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+y+2z-4=0\\2x+y+2z-4=0\\2x+y+2z+4=0\end{cases}$$

On trouve que l'ensemble des points invariants est le plan d'équation : $2x+y+2z+4=0$

---

**3- Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe dont on précisera**

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}$ *En remplaçant $x';y';z'$ par leur valeur prise dans l'expressionanalytique on a On obtient*

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(5x+y+2z-4)-x\\\frac{1}{3}(-2x+2y-2z+4)-y\\\frac{1}{3}(-4x-2y-z+8)-z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x+y-2z-4\\-2x-y-2z+4\\-4x-2y-z+8\end{pmatrix} \Leftrightarrow (x+y+2z+4)\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

*C'est à dire que $\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{u}$ (1, −1, −2)* ***(vecteur directeur de la droite (D) ).****On dit que la droite (D) est la direction de la projection P sur le plan (P)*

---

**4- Déterminons l'ensemble des antécédents du point B.**

*Soit M (x, y, z) un point de ξ antécédent de* **B** *par P . Alors les coordonnées de M verifient*

$\begin{cases}1=\frac{1}{3}(5x+y+2z-4)\\0=\frac{1}{3}(-2x+2y-2z+4)\\1=\frac{1}{3}(-4x-2y-z+8)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+y+2z-7=0\\-4x-2y-z+5=0\end{cases}$ *Donc l'ensemble des antécédents est une droite de l'espace (comme intersection de deux plans non parallèles) de vecteur directeur $\vec{u}$* **(1, −1, −2)** *qui est le vecteur directeur de la droite (D).*

*Conclusion*

*→ L'application P définie ici est la projection sur le plan (P) parallèlement à (D) C'est pourquoi (P) est l'ensemble des points invariants et (D) est la direction de l'ensemble des antécédents.*

## *Exemple 2*

*L'espace ℰ est muni du Repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

*On considère dans l'espace* $\mathcal{E}$ le *plan (P) d'équation cartésienne* $2x + y + 2z + 4 = 0$ *et la droite*

**(D)** de représentation paramétrique $\begin{cases} x' = -x - y + 2z - 1 \\ y' = -2x + 2z - 1 \\ z' = -2x - y + 3z - 1 \end{cases}$ *et le point* $A\,(4, -5, 5)$.

1. *Calculer les coordonnées de* $K(a; b; c)$ *définis par* $PoP\,(M) = K$ **p**uis *déterminer la nature de.*
2. *Quelle est l'image par* ***P*** *de la droite d'équation :* $x - 1 = y - 2 = z - 3$
3. *Quelle est l'image par* ***P*** *de la droite de représentation de paramétrique* $\begin{cases} x = \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} \\ y = \mathbf{2} + \beta \\ z = \mathbf{3} + 2 \end{cases}$ $(\beta \in IR)$
4. *Quelle est l'image par* ***P*** *du plan d'équation :* $3x - y - 2z + 2 = 0$

## *Solution :*

### 1- Calculons $P \circ P\,(M) = K$

*On a* $\mathbf{P \circ P\,(M) = P\,(P\,(M)) = P\,(M) = K}$ *donc le triplet* $(a; b; c)$ *vérifient*

$$\begin{cases} a = -x' - y' + 2z' - 1 \\ b = -2x' + 2z' - 1 \\ c = -2x' - y' + 3z' - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -(-x - y + 2z - 1) - (-2x + 2z - 1) + 2(-2x - y + 3z - 1) - 1 \\ b = -2(-x - y + 2z - 1) + 2(-2x - y + 3z - 1) - 1 \\ c = -2(-x - y + 2z - 1) - (-2x + 2z - 1) + 3(-2x - y + 3z - 1) - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x + y - 2z + 1 + 2x - 2z + 1 - 4x - 2y + 3z + 2 - 1 \\ b = 2x + 2y + 4z + 1 - 4x - 2y + 6z - 2 - 1 \\ c = 2x + 2y + 4z + 2 + 2x - 2z + 1 - 6x - 3y + 9z - 3 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -x - y + 2z - 1 = x' \\ b = -2x + 2z - 1 \quad = y' \\ c = -2x - y + 3z - 1 = z' \end{cases}$$

*Donc* $\mathbf{P \circ P\,(M) = P\,(M)}$. *D'où P est une projection de E*

### 2- Déterminons l'ensemble des points invariants et la direction (qui est l'ensemble des antécédents de A par P).

→ *Ensemble des points invariants par P. Soit M (x, y , z ) un point de* $\xi$. *M est invariant par P signifie que* **P(M) = M**

**P(M) = M** $\Rightarrow \begin{cases} x = -x - y + 2z - 1 \\ y = -2x + 2z - 1 \\ z = -2x - y + 3z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ *on trouve que l'ensemble des points invariants est le plan :* $2x + y + 3z - 1 = 0$

→ *Déterminons l'ensemble des antécédents du point* **A (4; −5; 5)**

*On a* $A(4; -5; 5)$ *Les coordonnées du point A sont obtenu à partir de l'expression*

$$P(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -4 - (-5) + 2(5) - 1 \\ y_{A'} = -2(4) + 2(5) - 1 \\ z_{A'} = -2(4) - (-5) + 3(5) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 10 \\ y_{A'} = 1 \\ z_{A'} = 11 \end{cases}$$

*Ainsi l'ensemble (D) des antécédents de* ***A vérifie*** $\begin{cases} -x - y + 2z - 1 = 10 \\ -2x + 2z - 1 \quad = 1 \\ -2x - y + 3z - 1 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z + 11 = 0 \\ 2x + y - 3z + 12 = 0 \end{cases}$

### 3- Déterminons l'image par P de la droite d'équation $x - 1 = y - 2 = z - 3$

*La droite ainsi définie passe par le point* **B (1; 2; 3)** *et dirigée par le* ***vecteur*** $\overrightarrow{u}$**(1; 1; 1)** .

*Donc son image passe par* **B′=P (B ) et** *dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{u'} = P(\overrightarrow{u})$ **Avec B′(2; 3; 4) et** $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

*Ainsi, comme* $P(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ *alors l'image de cette droite est le singleton* **{B}.**

### 4- Déterminons l'image par P de la droite de représentation paramétrique

$\begin{cases} x = 1+\beta \\ y = 2+\beta \\ z = 3+2 \end{cases}$ $(\beta \in IR)$ La droite ainsi définie passe par le poin **C (1; 2; 3)** et dirigée par $\overrightarrow{u}$ **(2; 1; 2)**.
On a: $\overrightarrow{v'} = P(\overrightarrow{v}) = (1;0;1) \neq \vec{0}$.on a **C' (2; 3; 4),** comme $\overrightarrow{u} \neq \vec{0}$ l'image de cette droite est l'image de cette droite est la droite passant par **C (2; 3; 4)** et dirigée par $\vec{v}$**(1; 0; 1).**

**5- Déterminons l'image par P du plan d'équation 3x − y − 2z + 2 = 0.**

Le plan donné passe par le point **I (0; 0; 1)** et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$**(1; 1; 1) et** $\vec{w}$**(1; 3; 0).**

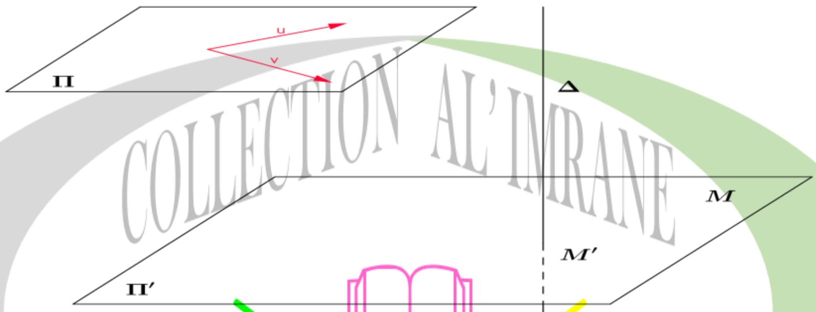
On a **P** $(\vec{u})$ = $\vec{0}$ et **P** $(\overrightarrow{w})(-4; -2; -5) \neq \vec{0}$ . Par suite **(P)** est la droite passant par **I = P (I ) = (1; 1; 2)** , et dirigée par **P (w) = (−4; −2; −5).**

**<u>Commentaire</u> On pouvait aussi déterminer l'image par P du plan en calculant $\vec{n}$ avec $\vec{n}$ vecteur normal du plan.**

**b- Projection sur une droite (Δ) parallèlement à un plan (Π).**

Soit **(Δ)** une droite de l'espace et **(Π)** un plan non parallèle à **(D).**
On appelle projection sur **(Δ)** parallèlement à **(Π)** l'application **q** de l'espace dans lui-même qui à tout point **M** associe **M'**, point d'intersection de **(D)** avec le plan parallèle à **(Π)** passant par **M.**

Soit $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\Delta) \\ (MM')//(\Pi) \end{cases}$




<u>NB</u> : M'est le projeté de M sur (Δ) parallèlement à (Π)

**P2 : Soit q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan (Π).**

- L'image de l'espace **E** par **q** est **(D)**
- L'ensemble des **antécédents** par **q** d'un point M' de (D) est le plan parallèle à **(Π)** passant par **M'.**
- L'ensemble des **points invariants** par **q est la droite (D)**
- Soit (Δ) une droite et (Π) un plan. Soit q la projection sur (Δ) parallèlement à (Π). L'ensemble des points invariants par q est la droite (Δ) et l'ensemble des antécédents est le plan P parallèle à (Π).

<u>Exemple 1</u>

L'espace E est muni du Repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère dans l'espace E le plan (P) d'équation cartésienne $2x + y + 2z + 4 = 0$ et la droite **(D)** de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1+\eta \\ y = 1-\eta \\ z = 1-2\eta \end{cases}$ $(\eta \in IR)$

Soit q l'application de E dans E qui a tout point **M (x, y , z )** associe le point **M'(x', y', z')** dont les coordonnées sont données par : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(2x+y+2z+1) \\ y' = \frac{1}{3}(2x+2y+2z+4) \\ z' = \frac{1}{3}(4x+2y+4z-1) \end{cases}$

1- Démontrer que pour tout point M de l'espace E **q ∘ q (M ) = q (M )**
2- Démontrer que l'ensemble des points invariants par **q** est la droite définie à l'énoncé
3- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un plan que l'on précisera les vecteurs directeurs
4- Vérifier que l'ensemble des antécédents du point A par l'application **q** est un plan parallèle a celui de l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$.

## Solutions

**1- Démontrer que pour tout point $M$ de l'espace $\mathcal{E}$ $q \circ q(M) = q(M)$**

On a $q \circ q(M) = q(q(M)) = q(M') = M''$

$$P(M) = M'' \Longleftrightarrow \begin{cases} x'' = -\frac{1}{3}(2x' + y' + 2z' + 1) \\ y'' = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + 2z' + 4) \\ z'' = \frac{1}{3}(4x' + 2y' + 4z' - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{-1}{3}(2x + y + 2z + 1) = x' \\ y'' = \frac{1}{3}(2x + 2y + 2z + 4) = y' \\ z'' = \frac{1}{3}(4x + 2y + 4z - 1) = z' \end{cases}$$

**Donc $q \circ q(M) = q(M)$. D'où $q$ est une projection de l'espace**

**2- Démontrer que l'ensemble des points invariants par $q$ est la droite définie à l'énoncé**

soit $M(x, y, z)$ un point de $\xi$. $M$ est invariant par $q$ signifie que $q(M) = M$

$$q(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}(2x + y + 2z + 1) \\ y = \frac{1}{3}(2x + 2y + 2z + 4) \\ z = \frac{1}{3}(4x + 2y + 4z - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = 2x + y + 2z + 1 \\ 3y = 2x + 2y + 2z + 4 \\ 3z = 4x + 2y + 4z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z + 4 = 0 \\ 4x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

On trouve que l'ensemble des points invariants est : $\begin{cases} -5x - y - 2z - 1 = 0 \\ 4x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ système d'équations cartésiennes de la droite $(\Delta)$ passant par le point $A(-1, 2, 1)$ et dirigée par leVecteur **$u$ $(1, -1, -2)$** qui sont les caractéristiques de la droite

**3- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un plan que l'on précisera le vecteurs directeurs**

$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$ En remplaçant $x'; y'; z'$ par leur valeur prise dans l'expressionanalytique on a On obtient

$$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2x + y + 2z + 1) - x \\ \frac{1}{3}(2x + 2y + 2z + 4) - y \\ \frac{1}{3}(4x + 2y + 4z - 1) - z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(2x - y - 2z - 1) \\ y' - y = \frac{1}{3}(2x - 2y + 2z + 4) \\ z' - z = \frac{1}{3}(4x + 2y + 2z - 1) \end{cases} \text{posons} \begin{cases} x' - x = X \\ y' - y = Y \\ z' - z = Z \end{cases}$$

et cherchons quatre **réels a, b, c, et d** tels que : $a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z) + d = 0$ c'est à dire que

$$aX + bY + cZ + d = 0. \begin{cases} X = \frac{1}{3}(2x - y - 2z - 1) \ (1) \\ Y = \frac{1}{3}(2x - 2y + 2z + 4) \ (2) \\ Z = \frac{1}{3}(4x + 2y + 2z - 1) \ (3) \end{cases} \quad 2(1) + (2) + 2(3) = 0$$

Donc il suffit de prendre **a = 2; b = 1; c = 2 et d = 0.** Ainsi on déduit que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est contenu dans le plan d'équation cartésienne : $2X + Y + 2Z = 0$ les vecteurs **$U(-1, 0, 1)$** et **$V(1, -2, 0)$** forment une base de ce plan.

4. Verifions que l'ensemble des antécedents du point $A(-1, 2, 1)$ est un plan parallèle au plan trouvé a la question précedente. l'ensemble des antécedents du point $A$ est défini par :

$$\begin{cases} -1 = -\frac{1}{3}(2x + y + 2z + 1) \\ 2 = \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 4) \\ 1 = \frac{1}{3}(4x + 2y + 4z - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z - 2 = 0 \\ 4x + 2y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

ce système est équivalent à l'équation : $2x + y + 2z - 2 = 0$. Il est évident que cette équation cartésienne est celle d'un plan parallèle au plan d'équation cartésienne $2X + Y + 2Z = 0$

*Exemple 2* L'espace $\mathcal{E}$ est muni du Repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soit le plan d'équation : $x - 3y + z - 1 = 0$ et $D\,(A; \vec{u})$ la droite passant par **$A\ (1, 0, 1)$** et dirigée par $\vec{u}$ **$(-2, 1, 1)$.**

1- Définissez analytiquement les projections $P$ sur le plan $(P)$ parallèlement à la droite **(D)** ;

2- Définissez analytiquement la projection **$q$** sur la droite (D) parallèlement au plan **(P)**.

## Solution

**1- Définissons analytiquement les projections $P$ sur le plan (P) parallèlement à la droite (D) ;**

*La projection P est caractérisée par deux propriétés*

- *pour tout point M (x ;y ; z ) de* *ℰ d'image M' (x', y' ; z') par la projection P, le vecteur c est colinéaire au vecteur $\vec{u}$;*
- *le point M appartient au plan (P)*

☞ $\overrightarrow{MM'} // \vec{u} \Rightarrow \exists\lambda, \in IR\ \overrightarrow{MM'} // \lambda\vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2\lambda \\ y' = y + \lambda \\ z' = z + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in IR)\ (1)$

☞ $M' \in (P) \Leftrightarrow x' - 3y' + z' - 1 = 0 \qquad (2)$

☞ (1) *dans* (2) *donne* $(x - 2\lambda) - 3(y + \lambda) + z + \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4}(x - 3y + z - 1)$ *rempotant cette valeur de λ dans le système précèdent, nous obtenons l'expression analytique*

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2}{4}(x - 3y + z - 1) \\ y' = y + \frac{1}{4}(x - 3y + z - 1) \\ z' = z + \frac{1}{4}(x - 3y + z - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{4}(2x + 6y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{4}(x + y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{4}(x - 3y + 5z - 1) \end{cases}$$

---

## 2- *Définissons analytiquement la projection q sur la droite (D) parallèlement au plan (P).*

*la projection **q** est caractérisée par deux* propriétés

- *pour tout point M (x, y , z , ) de ξ et d'image M' (x' , y', z') par la projection **q** , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$ du plan **(P)** ;*
- *le point M appartient à la droite(D).*

☞ $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}.\vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (x' - x) - 3(y' - y) + (z' - z) = 0\ (1)$

☞ $\overrightarrow{AM'} = \propto \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2\propto \\ y' = y + \propto \\ z' = z + \propto \end{cases} \quad (\propto \in IR) \qquad (2)$

☞ (2) *dans* (1) *donne* $(x - 2\propto - x) - 3(y + \propto - y) + (z + \propto - z) = 0 \quad \Rightarrow \propto = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2)$

*en remplaçant cette valeur de ∝ dans le système précedent on a l'expression analytique de la*

*projection q* $\begin{cases} x' = x - \frac{2}{4}(-x + 3y - z + 2) \\ y' = y + \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2) \\ z' = z + \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + 3y + z - 2) \\ y' = \frac{1}{4}(-x + 7y + z + 2) \\ z' = \frac{1}{4}(-x + 3y + z - 2) \end{cases}$

***Exemple 3***

On considère l'application $f$ de l'espace $\xi$ dans lui même qui à tout point $M(x, y, z)$

définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(x - 2y + 2z) \\ y' = -\frac{2}{9}(x - 2y + 2z) \\ z' = \frac{2}{9}(x - 2y + 2z) \end{cases}$

1. Démontrer que l'image $M'$ de tout point M appartient à une droite $(\mathfrak{D})$ dont on déterminera un repère $(A, \vec{u})$
2. Démontrer que pour tout point $M$ d'image $M'$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonale à $\vec{u}$. En déduire que $f$ est la projection orthogonale sur $(\mathfrak{D})$.

**Solution**

1. Démontrons que l'image $M'$ de tout point $M$ appartient à une droite de l'espace dont on précisera le repère. en observant l'expression analytique de l'application $f$ on remarque que son système d'équation est équivalent au système suivant : $\begin{cases} 2x' + y' = 0 \\ y' + z' = 0 \end{cases}$ ,qui est un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathfrak{D})$ passant par le point O (origine du repère) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1, 2, -2)$.

2. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$. On a :$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$ .

   En remplaçant $x'$ $y'$ $z'$ par leurvaleur respective prise dans l'expression analytique, on a :

   $\overrightarrow{MM'} = \begin{cases} x'-x = \frac{1}{9}(-8x-2y+2z) \\ y'-y = \frac{1}{9}(-2x-5y-4z) \\ z'-z = \frac{1}{9}(2x-4y-5z) \end{cases}$ posons : $X = x'-x; Y = y'-y; Z = z'-z$

   et cherchons trois réels $a, b, etc$ tels que $a(x'-x) + b(y'-y) + c(z'-z) = 0$ c'est à dire que $aX + bY + cZ = 0$.Il est facile de remarquer que $X - 2Y + 2Z = 0$ donc il suffit de prendre $a = 1; b = -2; c = 2$. l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ est contenu dans un plan de vecteur normal$\vec{n}(1,-2,2)$ colinéaire au vecteur $\vec{u}(-1,2,-2)$ ;d'où $\overrightarrow{MM'}$est orthogonal à $\vec{u}$.On conclut alors que l'application $f$ est est la projection orthogonale sur la droite $(\mathfrak{D})$ .