COLLÈGE F-X. VOGT		**Année scolaire 2024-2025**
Département de Mathématiques	**BAC BLANC**	**Date : Du 22 au 26 Avril 2025**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle C** Durée : **04 heures** Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 POINTS

Exercice 01 : 05 Points

A- On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce de monnaie dont on désigne les côtés par pile et face. À chaque lancé, on associe le nombre complexe $z = re^{i\frac{n\pi}{6}}$ défini de la manière suivante : si face apparait sur la pièce, alors $r = 1$ et si pile apparait, alors $r = 2$ et n est l'entier lu sur la face supérieure du dé. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note M le point d'affixe $z = x + iy$, z étant le nombre complexe défini plus haut.

1- ***Le dé et la pièce ne sont pas truqués*** :

a) Déterminer le nombre de points M que l'on peut obtenir. ***0,5pt***

b) Calculer la probabilité de l'évènement "$y = 1$". ***0,5pt***

2- ***On conserve le dé non truqué mais la pièce est pipée*** de telle sorte que la probabilité d'obtenir face soit le double de celle d'obtenir pile.

a) Montrer que la probabilité de l'évènement "$y = 1$" est de $\frac{2}{9}$. ***0,5pt***

b) On répète trois fois de suite l'épreuve précédente, et de façon indépendante. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un point M tel que $y = 1$? ***0,5pt***

B- L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. (P) est le plan passant par $A(-11, 35, -13)$ et de vecteur normal $\vec{n}(48, 35, 24)$ et (Q) le plan d'équation $z = 16$. On considère l'équation suivante dans $\mathbb{Z}^2$, (E): $48x + 35y = 1$.

1- a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E). ***0,5pt***

b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de (E). ***0,5pt***

2- Écrire une équation cartésienne de (P). ***0,5pt***

3- Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants en une droite (D) dont on donnera un système d'équations paramétriques. ***0,5pt***

4- On désigne par s_D le demi-tour d'axe (D). Donner l'expression analytique de s_D. ***1pt***

Exercice 02 : 05 Points

A- f_a est la fonction définie pour tout $x \neq 0$, par $f_a(x) = xa^{1-\frac{1}{x}}$, $a > 0$ et $a \neq 1$ et on désigne par (E) l'équation différentielle $x^2y' - yln a = x^2a^{\frac{x-1}{x}}$.

1- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f_a est solution de l'équation différentielle (E). ***0,5pt***

2- On désigne par C_a la courbe de f_a dans un repère orthonormé (O, I, J).

a) Déterminer les coordonnées du point M_a de C_a en lequel la tangente est parallèle à (OI). ***0,5pt***

b) Montrer que l'ensemble (S) des points M_a lorsque a varie dans $\mathbb{R}^* - \{1\}$ est la courbe d'équation $y = xe^{1-x}$; Puis construire (S). ***1,5pt***

B- On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$ où ln désigne le logarithme népérien. (S_n) est la suite définie par : $S_n = \frac{ln2}{2^2} + \frac{ln3}{3^2} + \cdots + \frac{ln(n)}{n^2} = \sum_{p=2}^{n} \frac{ln(p)}{p^2}$.

1- a) Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$. ***0,5pt***

b) En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$. ***0,5pt***

c) En utilisant une intégration par parties, déterminer une primitive de f. **0,5pt**

2- Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $S_n - \frac{ln2}{2^2} \leq \int_2^n f(t)dt \leq S_n - \frac{ln(n)}{n^2}$. **0,5pt**

3- En déduire un encadrement de S_n. **0,25pt**

4- Montrer que la limite L de S_n, lorsqu'elle existe, est telle que : $\frac{1}{2} + \frac{ln2}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} + \frac{3ln2}{4}$. **0,25pt**

<u>Exercice 03</u> : 05 Points

Dans le plan P privé de la droite d'équation $x = 1$, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la transformation T qui, à tout point $M(x, y)$ du plan, fait correspondre le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = -\frac{x}{1-x} \\ y' = \frac{y}{1-x} \end{cases}$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (C') son image par T.

1- Montrer que T involutive. **0,5pt**

2- Montrer qu'une équation cartésienne de (C') est $y^2 = -2x + 1$. **0,5pt**

3- Justifier que (C') est une parabole dont on précisera le sommet, le foyer et la directrice. **0,5pt**

4- Construire (C') dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **0,5pt**

5- Soit (Γ_k) l'ensemble des courbes d'équation $x^2 + ky^2 + 4x - 4 = 0$.

a) Montrer que les courbes (Γ_k) sont globalement invariantes par T. **0,5pt**

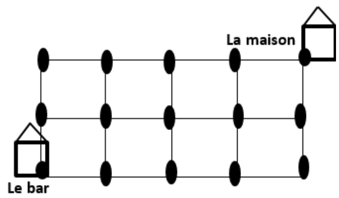
b) Vérifier qu'une équation réduite des courbes (Γ_k) est : $\frac{(x+2)^2}{8} + \frac{ky^2}{8} = 1$. **0,5pt**

c) Préciser la nature et les éléments remarquables des courbes (Γ_1) et (Γ_{-1}) correspondant aux valeurs $1, -1$ du réel k. **1pt**

6- Tracer sur le même repère que (C') les courbes (Γ_1) et (Γ_{-1}). **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES — 05 POINTS

<u>Situation :</u>



Il est minuit à Ewankan lorsque Jo l'ivrogne demande une n-ième bouteille de bière au gérant du bar, mais ses amis s'y opposent et Jo ne peut donc plus boire. Heureusement pour moi, se dit Jo, il me reste une bouteille à la maison (*quatre blocs plus à l'est et deux blocs plus au nord*), je vais rentrer la consommer. Jo est vraiment ivre et ne sait plus où il habite. Mais il se souvient qu'il doit franchir 6 blocs pour y arriver et qu'à chaque carrefour il peut aller au nord ou à l'est.

Une fois chez lui, Jo a retrouvé sa bouteille, mais avant même la moitié, il s'est écroulé, c'était la bouteille de trop. Sa femme a aussitôt fait appel à un infirmier qui lui a injecté dans le sang une dose de 1,8 unité d'une substance médicamenteuse. Cette substance se répartit instantanément dans le sang et est ensuite progressivement éliminée. Au bout d'une heure, la quantité de substance dans le sang a diminué de 30%. On rappelle que si $Q(t)$ désigne la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, en heure, alors le processus d'élimination peut se présenter par l'équation $Q'(t) = -\lambda Q(t)$, où λ est un réel.

L'infirmier, rentré avant une heure de temps, a laissé la consigne à la dame de réinjecter une dose analogue toutes les heures jusqu'à ce que Jo reprenne conscience. Mais attention cette quantité ne doit pas atteindre 6,01 unités dans le sang, sinon Jo va mourir.

<u>Tâches</u>

1- Montrer qu'au bout d'une heure, le réel λ est presque égal à 0,4. **1,5pt**

2- Luc, un ami de Jo, affirme qu'il a moins de 20% de chance de retrouver sa maison à cette heure de la nuit et avec tout ce qu'il a consommé. A-t-il raison ? **1,5pt**

3- Jo peut-il supporter indéfiniment toutes les doses de ce médicament ? Justifier. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt