

Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (4 points)

- Effectue la division euclidienne de -283 par 19 . **0,25pt**
- Prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $A_n = 2^{3n+1} + 3^{6n} + 11^{3n+1}$ est divisible par 7 . **0,75pt**
- Dans le système décimal, un entier naturel non nul X s'écrit : $X = a_p a_{p-1} \cdots a_2 a_1 a_0$; $a_p \neq 0$.
Justifie qu'on a : $X \equiv 0[11]$ si $\sum_{i=0}^p (-1)^i a_i \equiv 0[11]$. **0,75pt**
- Dans un système en base n , on considère les nombres : $a = \overline{211}$, $b = \overline{312}$ et $c = \overline{133032}$.
(a) Sachant que $c = a \times b$, montre que n divise 8 . **0,75pt**
(b) Déduis-en la valeur de n , puis écris a et b dans le système décimal. **0,75pt**
- Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation, $(E): 37x + 54y = 3$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (4,25 points)

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$. Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$.

On note H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K celui, sur la droite (AB) .

- Soit G l'isobarycentre des points A, B et C .
(a) Donne les coordonnées du point G , puis vérifie que $(OG) \perp (ABC)$. **0,75pt**
(b) Ecris une équation cartésienne du plan (ABC) . **0,5pt**
- Montre que $\left| \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} MH$; calcule la distance du point M au plan (ABC) . **0,5pt**
- (a) Exprime la distance MK en fonction de la norme $\left\| \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \right\|$ vue comme une aire. **0,5pt**
(b) Déduis-en que $\sqrt{2}MK = \sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}$. **0,5pt**
- On se place dans le plan (OAB) d'équation $z = 0$ et on considère l'ensemble (Γ) des points M du plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC) .
(a) Montre que (Γ) ne contient aucun point de la droite (AB) ; calcule le rapport $\frac{MH}{MK}$. **0,5pt**
(b) Donne la nature de (Γ) , un foyer, la directrice associée à ce foyer et l'excentricité. **1pt**

EXERCICE 3 : (3 points)

- Donne la solution φ de l'équation $(E): y'' - 4y' + 3y = 0$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 2$. **0,75pt**
- On considère les intégrales $I = \int_0^\pi \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$.
(a) Vérifie que pour tout réel x , on a : $\cos^4 x = \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x)$. **0,25pt**
(b) A l'aide d'une intégration par parties, montre que :
$$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I.$$
 1pt
(c) Calcule $I + J$; $I - J$ puis déduis-en les intégrales I et J . **1pt**

EXERCICE 4 : (3,75 points)

A) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher parmi lesquelles 5 boules portent le nombre -3 ; 3 boules portent le numéro 1 et deux boules portent le numéro 4. On tire successivement sans remise trois boules de cette urne. On désigne par a , b et c les numéros portés par les boules tirées respectivement au 1^{er}, au 2^{ème} et au 3^{ème} tirage. On note $S_{(P)}$ la réflexion de plan (P) d'équation $ax + cy + z = 0$ et $S_{(Q)}$ celle de plan d'équation $x + y + 2z = 0$. On pose $g = S_{(P)} \circ S_{(Q)}$.

1. Calcule la probabilité de l'événement A : « g est un demi-tour ».

0,75pt

2. Calcule la probabilité de l'événement B : « g est une translation ».

0,5pt

B) E est espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E tel que :

$$f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}, f(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \text{ et } f(\vec{k}) = 2\vec{k}.$$

1. f est-il un automorphisme ? Détermine $f(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$ et tire une conclusion.

1pt

2. Donne l'écriture analytique de f .

0,5pt

3. Détermine $\ker f$ et $\text{Im } f$ en précisant leurs bases respectives.

1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

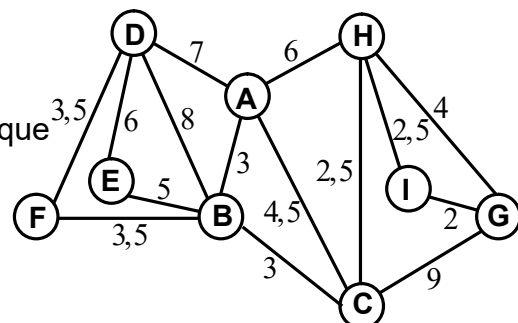
SITUATION : (Pour la tâche 3, on prendra $\sqrt{10} \approx 3,16$)

Dans sa politique de gestion des ordures, un Maire décide pour le stockage des déchets plastiques de construire un entrepôt ayant la forme d'un solide $PQRS$ où P, Q, R et $S \notin (PQR)$ sont les points de coordonnées respectives $(1, 2, -3)$, $(-5, -2, -4)$, $(3, -6, 2)$ et $(-2, 4, 5)$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité graphique 1dam . Dans cette commune, la quantité de déchets plastiques produits par jour est estimée à 4,5 tonnes au début de la 1^{ère} année. Cette quantité augmente au début de chaque année de 100kg de déchets et reste constante tout au long de l'année.

On suppose que 100kg de déchets plastiques occupent un volume de 1m^3 et qu'un an a 365 jours.

Sur un terrain communal de forme rectangulaire, le maire décide de lancer un projet de culture de tomates. Les dimensions du champ (en hm) sont les modules des deux nombres complexes z_1 et z_2 , solutions du système d'équations :
$$\begin{cases} iz_1 - z_2 = -1 + i \\ 0,5\overline{z_1} + (1+i)\overline{z_2} = 2 + 5i \end{cases}$$
 Le rendement du sol est de 500kg de tomates à l'hectare. Un cageot de 2,5kg est vendu à 6500 FCFA.

Parti du parking G , un camion de la mairie collecte les ordures dans les quartiers A, B, C, D, E, F, H et I . Le graphe ci-contre indique les voies et les distances, en km , entre ces différents quartiers. Ce camion consomme 1,5l de gasoil au km et le litre coûte 840 FCFA.



Tâches :

1. Cet entrepôt peut-il recevoir tous les déchets plastiques produits pendant 5 ans ?

1,5pt

2. Quelle est le coût minimal en gasoil de ce camion pour aller du parking G au quartier D ?

1,5pt

3. Le maire pourra-t-il acheter un camion de 8.200.000 FCFA après la vente des tomates ?

1,5pt

Présentation générale : 0,5pt