Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (5 points)

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $E\left(2;1;1\right)$, $A\left(-\frac{4}{3};\frac{13}{3};-\frac{7}{3}\right)$ et l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ d'expression analytique : $\begin{cases}3x'=x+2y-2z-6\\3y'=2x+y+2z+6\\3z'=-2x+2y+z-6\end{cases}$.

1. Détermine l'image de A par f. **0,5pt**
2. Soit $M\left(x,y,z\right)$ un point de l'espace et $M'\left(x';y';z'\right)$ son image par f.
   (a) Démontre que $\overrightarrow{MM'}=-\frac{2}{3}\left(x-y+z+3\right)\vec{u}$ avec $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. **0,75pt**
   (b) Détermine l'ensemble $\left(\pi\right)$ des points invariants par f. **0,5pt**
   (c) Justifie que la droite $\left(MM'\right)$ est orthogonale à $\left(\pi\right)$. **0,25pt**
   (d) Démontre que le milieu K du segment $\left[MM'\right]$ appartient au plan $\left(\pi\right)$. **0,5pt**
   (e) Déduis-en la nature de f. **0,25pt**
3. (a) Ecris une représentation paramétrique de la droite $\left(d\right)$ de repère $\left(E,\vec{u}\right)$. **0,5pt**
   (b) Justifie que $\left(d\right)\perp\left(\pi\right)$ et détermine les coordonnées de leur point d'intersection K. **0,5pt**
4. Détermine l'expression analytique du demi-tour $S_{(d)}$ d'axe $\left(d\right)$. **0,75pt**
5. Détermine la nature de $S_{(d)}\circ f$, puis détermine $S_{(d)}\circ f\left(A\right)$. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (5 points)

Soit la fonction f définie par $f\left(x\right)=\begin{cases}e^x-x-1,\text{ si } x\leq 0\\ x\ln x,\text{ si } x>0\end{cases}$. On désigne par $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique $2cm$.

1. Montre que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x}=0$. **0,5pt**
2. Vérifie que dans l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$, la fonction $K: x\mapsto\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x$ est une primitive de la fonction $k: x\mapsto x\left(1-\ln x\right)$. **0,5pt**
3. Calcule les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition D_f. **0,5pt**
4. (a) Etudie la continuité, puis la dérivabilité de f en 0. Interprète les résultats. **0,75pt**
   (b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation. **1pt**
5. Etudie les branches infinies de $\left(C_f\right)$. **0,5pt**
6. Construis soigneusement la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. **0,75pt**
7. Calcule l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 du domaine délimité par la courbe $\left(C_f\right)$, les droites d'équations $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ et la droite $\left(\Delta\right)$ d'équation $y=x$. **0,5pt**

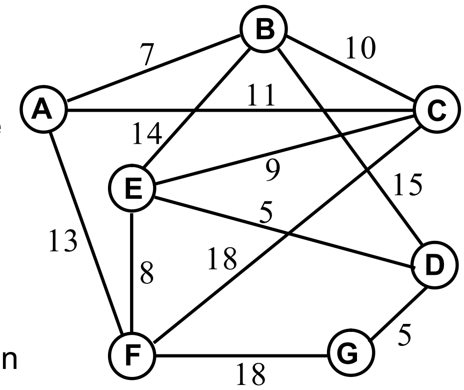
EXERCICE 3 : **(5 points)**

A) E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ associe le vecteur $\varphi\left(\vec{u}\right)=\left(-x+2y\right)\vec{i}+\left(2x-4y+z\right)\vec{j}+x\vec{k}$.

1. Ecris la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**
2. Montre que φ est un automorphisme de E , puis déduis-en $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$. **1pt**
3. On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2}=2\vec{j}-4\vec{k}$.
4. **(a)** Montre que $\mathscr{B}'=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\vec{j}\right)$ est une base de E. **0,5pt**

   (b) Ecris la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\vec{j}\right)$. **0,75pt**

B) Un livreur de pains prépare sa livraison. Il doit livrer un certain nombre de ses clients A,B,C,D,E,F et G. Les liaisons possibles sont représentées sur le graphe $\mathscr{G}$ ci-contre pondéré par les durées en minutes des trajets.



1. Détermine le degré de chaque sommet de ce graphe. **0,5pt**
2. Le graphe $\mathscr{G}$ est-il connexe ? Justifie. **0,5pt**
3. En utilisant l'algorithme de DIJKSTRA, propose à ce livreur un trajet le plus court de A à G et donne la durée de ce trajet. **1,25pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES **(5 points)**

SITUATION :

Une étude du service des transports donne la distance de freinage Y d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse X.

Vitesse X (en km/h)	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance Y (en m)	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On suppose que cette évolution se poursuit et que le coefficient de corrélation linéaire vaut $0,998$.
M. BELL, un automobiliste roulant à $150km/h$ entame un freinage à $85m$ d'un obstacle immobile.

Pour réduire le nombre d'accidents de circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcootest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test ;
- 95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test.

Le Commandant de brigade de la gendarmerie de cette localité voudrait savoir le nombre minimal d'automobilistes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure à $0,99$.

Tâches :

1. M. BELL percutera-t-il l'obstacle ? **1,5pt**
2. Quelle devrait être la vitesse maximale de M. BELL au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ? **1,5pt**
3. Aide le Commandant de brigade à répondre à sa préoccupation. **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt