Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3 points)

1. Détermine un couple d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E): 48x + 35y = 1$. **0,5pt**
2. Déduis-en tous les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E). **0,75pt**
3. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le vecteur $\vec{u} = 48\vec{i} + 35\vec{j} + 24\vec{k}$ et le point $A(-11, 35, -13)$.
   (a) Donne une équation cartésienne du plan ($\mathscr{P}$) passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$. **0,5pt**
   (b) Soit ($\mathscr{D}$) la droite d'intersection du plan ($\mathscr{P}$) et du plan ($\mathscr{Q}$) d'équation $z = 16$.
   Trouve tous les points de ($\mathscr{D}$) à coordonnées entières appartenant à $[-100;100]$. **1pt**
   (c) Déduis-en les coordonnées entières du point B de ($\mathscr{D}$) le plus proche du point O. **0,25pt**

EXERCICE 2 : (4,25 points)

1. **(a)** Etudie les variations de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x+1)$. **0,5pt**
   (b) Trace sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $2cm$. **0,5pt**
   (c) Démontre que sur $]2;+\infty[$, la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$ est bijective et que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique λ. **0,5pt**
2. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = 2\ln(1+U_n)$.
   (a) Représente les quatre premiers termes de la suite sur le graphique précédent. **0,5pt**
   (b) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 2$. **0,5pt**
   (c) Montre que pour tout $x \in [2;+\infty[, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. **0,25pt**
   (d) Déduis-en que pour tout $n, |U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$ et que $|U_n - \lambda| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **0,75pt**
   (e) Déduis-en que la suite (U_n) converge vers λ. **0,25pt**
   (f) Trouve le plus petit entier p tel que $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que représente U_p pour λ ? **0,5pt**

EXERCICE 3 : (4,75 points)

1. **(a)** On donne le nombre complexe $\delta = 6 - 4i$. Ecris δ^2 sous forme algébrique. **0,25pt**
   (b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 4z - 1 + 12i = 0$ **0,5pt**
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1 + 2i, b = 5 - 2i$ et $c = 3 + 2i$. Soit S_1 l'application dans le plan complexe $\mathscr{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1-i)z - 2 - i$.
   (a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S_1. **0,5pt**

(b) Donne l'expression analytique de S_1. **0,5pt**

(c) Détermine l'affixe d du point D qui a pour image par S_1 le point C. Place le point D. **0,5pt**

3. **(a)** Donne l'écriture complexe de la similitude plane directe S_2 de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Détermine par son affixe g l'image G du point C par S_2. Place G. **1pt**

(b) Montre que $S_2 \circ S_1$ a pour écriture complexe $z' = -iz + 2 + 2i$. **0,5pt**

(c) Détermine f l'affixe du point F milieu du segment $[AB]$. Détermine $S_2 \circ S_1(D)$. **0,5pt**

(d) Caractérise la transformation $S_2 \circ S_1$ puis déduis-en la nature du triangle FGD. **0,5pt**

EXERCICE 4 : (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 6 boules portant les nombres complexes $1+i, 1-i, -1+i, -1-i, 1$ et -1, quatre boules portant les nombres complexes $i, -i, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Calcule la probabilité de chacun des événements :

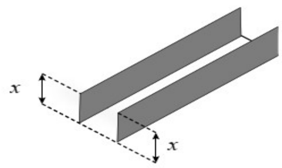
1. A : « les boules tirées portant des nombres réels » **0,5pt**
2. B : « les boules tirées portant des nombres complexes dont un argument $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ » **0,75pt**
3. C : « Parmi les boules tirées, au moins une boule portant un nombre complexe dont le module est égal à $\sqrt{2}$ » **0,75pt**
4. Calcule $p_B(A)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifie ta réponse. **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION : ***(Les valeurs numériques relatives à la tâche 1 seront arrondies à 10^{-2} près)***

M. NANGA, responsable du chantier de construction d'un immeuble utilise une grue pour soulever des objets. Le tableau ci-dessous donne la charge maximale en tonne y_i que cette grue peut lever pour une longueur x_i en mètres de la flèche.

x_i	18	19	20	22	25	27	29	32	35	39	42
y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3



M. NANGA a acheté un spécimen de feuille métallique de forme rectangulaire de $12cm$ de largeur et $2m$ de longueur. Il souhaite la modeler pour en faire une gouttière en pliant les deux longs côtés pour les relever perpendiculairement à la feuille.

M. NANGA dispose d'une carte bancaire dont le code confidentiel a été oublié. Il se rappelle que c'est un nombre entier naturel de quatre chiffres, multiple de 99. Le chiffre des milliers est le chiffre des unités du nombre 3^{2023} ; le chiffre des centaines est la plus petite solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $(E): 4x + 5 \equiv 0[7]$. Il a besoin urgemment de retirer l'argent à la banque pour payer les ouvriers.

Tâches :

1. Cette grue peut-elle lever une charge de $155kg$ avec une flèche de $49m$ de longueur ? **1,5pt**
2. Quelle est la hauteur des côtés relevés pour que la gouttière ait un volume maximal ? **1,5pt**
3. Aide M. NANGA à retrouver le code confidentiel de sa carte bancaire. **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt