MINESEC — *Délégation Régionale du Nord* — ANNÉE SCOLAIRE **2024-2025**

Groupe Répétition le Scorpion — $T^{le}C$

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES — *Durée : 4H30min*

Examinateur : Mr. KAKA DAIROU — EXAMEN BLANC N 1 — Coef : 7(C)

La qualité des figures et la clarté de la rédaction sont les éléments qui définissent l'hygiène de la mathématique

PARTIE EVALUATIONS DES RESSOURCES 29pts

EXERCICE 1

Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si $PGCD(a,b)=1$ *alors* $PGCD(a^2, b^2)=1$. On *considère que la suite* (S_n) *est définie pour* $n>0$ *par* $S_n=\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^2+2^3+3^4+4^5+\cdots\ldots+n^3$ *On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de* S_n *et* S_{n+1}

1- *Démontrer que, pour tout n > 0,* $1^2+2^3+3^4+4^5+\cdots\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

2- *Etude du cas* n *pair. Soit k l'entier naturel non nul tels que :* $n=2k$.

  a- *Démontrer que :* $PGCD(S_{2k}\,;\,S_{2k+1})=\left[(2k+1)^2\ PGCD\left(k^2;(k+1)^2\right)\right]$

  b- *Calculer* $PGCD(k\,;\,k+1)$

  c- *Calculer* $PGCD(S_{2k}\,;\,S_{2k+1})$

3- *Etude du cas ou* n *est impaire. Soit* k *l'entier naturel non nul tels que* $n=2k+1$.

  a- *Dé montrer que :* $(2k+1)\wedge(2k+3)=1$

  b- *Calculer* $PGCD(S_{2k+1}\,;\,S_{2k+2})$

  c- *Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur n, que l'on déterminera, pour laquelle* $S_n \wedge S_{n+1}=1$

EXERCICE 2

Pour entretenir le puits SOUFYANE confectionne couvercle ayant la forme d'un disque dont le bord est un cercle (Γ) *circonscrit au triangle formé dans le plan complexe* $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ *par les points l'image des solutions de l'équation*

Soit l'équation $(E): z^3-3z^2-3z^2\overline{z}-3z\overline{z}-(2+4i)z+6+12i=0\ (z\in\mathbb{C})$

1- *Démontrer que (E) admet une solution réelle unique a que l'on précisera*

2- *Vérifier que :* $z^3-3z^2-3\overline{z}z^2-3z\overline{z}-(2+4i)z+6+12i=(z-3)(z^2+z\overline{z}-2-4i)$

3- *Montrer que si* W_0 *est solution de (E), alors* $-W_0$ est aussi éri solution de E

4- *Résoudre* $z^2+z\overline{z}-2-4i=0$ puis donner la nature du triangle $M_0;\ M_1$ *et* M_2

5- *Justifier que le point G d'affixe* $Z_G=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$ *est le centre du couvercle du puis déterminer l'équation cartésienne de* (Γ)

EXERCICE 3

Soit f *une fonction définie sur* $I=]-\infty;+\infty[$ *par :* $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(x)}{x+1} & si\ x\geq 1\\ e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & si\ x<1\end{cases}$ *et on note* Cf *sa courbe representative de* f *dans le repère orthonormé* $(O;I;J)$ *tel que* $\|\vec{i}\|=1$ *cm et* $\|\vec{j}\|=2$ *cm. On considère la fonction* g *définie sur* $J=[1;+\infty[$ *par :* $g(x)=1+x-x\ln x$.

I- *Etude de la fonction auxiliaire* g

1- *Déterminer les limites de* g *aux bornes de* J.

2- *Etudier le sens de variation de* g *puis dressé son tableau de variation.*

3- *Démontrer que l'équation* $g(x)=0$ *admet une unique solution* $\alpha\in]3,5\,;4[$ *puis déduire le signe de* g *sur* J.

II- Etude de la fonction f.

1- *Déterminer les limites de* f *aux bornes de* I .

2- *Etudier la dérivabilité de* f *en* **1** *puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

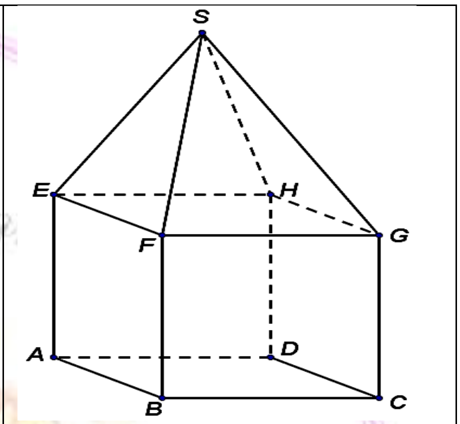
3- *Calculer* $f'(x)$ $\forall x \in IR \setminus \{1\}$ *et vérifier que* $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$ $\forall x \in IR \setminus \{1\}$ ***puis dresser le*** *tableau de variation de la fonction* ***f.***

4- *Montrer que :* $\alpha f(\alpha) = 1$ *puis tracer* **(C),** *ses tangentes et ses asymptotiques.*

PARTIE B. ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES : (10pts)

Situation :

Le bâtiment municipal est composé d'un cube surmonté d'une pyramide. La salle dispose de trois lampes au plafond dont les positions sont représentées sur un même cercle (Γ) *, un rideau de séparation disposé perpendiculairement au plan du sol et supporté par une ficelle ; et des décorations fixées selon une équation spécifique. Les climatiseurs nécessaires sont déterminés par le volume du bâtiment. La zone d'exposition requiert un tapis vert, dont le coût est connu. Les documents mentionnent techniques*
Les informations ci-dessous :



- *L'espace st munie u repère orthonormé direct* $(O;\vec{i};\vec{j})$: *le sommet* **S** *du toit a pour coordonnées* $S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ *; la ficelle supportant le rideau est assimilable a une portion de droite* (Δ) *système d'équation cartésienne* $\begin{cases} \frac{x-2}{3} = -\frac{y}{4}. \\ z = 1 \end{cases}$
- *Des objets de décoration sont fixé en des point e l'ensemble* (Σ) *des point* **M** *de l'espace tels que :* $(2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$
- *Les bâtiments de la commune utilisent des climatiseurs de* **400KWh ou 600KWh,** *selon que leurs volumes soient inferieurs* $500m^3$ *ou non.*
- *L'administration communale a décrit la zone d'exposition qu'elle voudrait aménager en la couvrant de tapis vert coutant* **5000F** *le mètre carré.*

L'élève **IMRANE** *doit caractériser ces éléments géométriques, choisir le bon climatiseur et estimer le coût du tapis.*
Le plan u plafond est munie du repère orthonormé direct les points représentant les positions des lampes plafonnières sont les images des solutions de l'équation $(E) : z^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 + 2(1 - i\sqrt{3})z^2 - -4i\sqrt{3}$
On admet que l'un de ces point donc l'affixe est $Z_A = 1 - i\sqrt{3}$ *est solution de E.*

Tâches :

1- *Déterminons la nature et un repère de* (Σ)

2- *Déterminons le centre et le rayon de* (Γ) ***(On déterminera d'abord la nature du triangle forme*** *les points représentant les positions des lampes plafonnières****).***

3- *Détermine le type de climatiseur adapté au bâtiment.*