Collège François Xavier Vogt		Année scolaire 2024-2025
Département de Mathématiques	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	MINI SESSION N° 2 Janvier 2025
Classe : Tle TI	Durée : 4h	Coef :

Partie A : Evaluation des ressources 15 points

Exercice 1 5 points

1.a) Déterminer les restes des puissances de 2 et 3 par la division euclidienne par 7. **1 pt**

b) Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 0[7]$. **0,5 pt**

2. On considère l'équation (E) : $11x - 24y = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) Montrer à l'aide de l'énoncé d'un théorème que cette équation admet au moins une solution. **0,5 pt**

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (E). **0,5 pt**

c) On suppose que $(11; 5)$ est une solution de (E), Déterminer la forme générale des solutions de (E). **0,5 pt**

3. Déterminer les nombres entiers relatifs a et b tels que : $\begin{cases} a + b = 25 \\ ppcm(a; b) = 264 \end{cases}$. **1,25 pt**

4. Déterminer tous les entiers x vérifiant : $\begin{cases} x \equiv 0[11] \\ x \equiv 1[24] \end{cases}$. **0,75 pt**

Exercice 2 5 points

I. Soit P le polynôme complexe défini par : $P(z) = z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i$.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que : $z^2 + z + 1 - i = 0$. **0,5 pt**

2. Monter que $(z - 2)$ est un facteur de $P(z)$. **0,25 pt**

3. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$. **0,5 pt**

II. On considère dans le plan complexe rapporté au repère ortonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = -1 - i$ et $z_C = i$.

1.a) Déterminer l'écriture algébrique de $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$. **0,5 pt**

b) En déduire la nature exacte du triangle ABC. **0,25 pt**

c) On considère D le point d'affixe $z_D = -2i$, Justifier que A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **0,5 pt**

2.a) Déterminer l'affixe z_I de I milieu du segment $[AB]$. **0,25 pt**

b) Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixes z vérifiant : $|2z - 1 + i| = \sqrt{10}$.

i) Justifier que A, B et C appartiennent à (Γ). **0,75 pt**

ii) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). **0,5 pt**

c) Construire (Γ). **0,5 pt**

III. Linéariser : $\cos^2 x \sin^3 x$. **1 pt**

Exercice 3 5 points

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x + 1)$

1. Montrer que : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. **0,5 pt**

2. Justifier que : Dans D_f, $f'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$. **0,5 pt**

3. En déduire que : Pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq 0$. **0,5 pt**

4.a) Prouver que dans D_f,

i) $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ **0,25 pt**

ii) $x \mapsto (x+1)[1-\ln(x+1)]$ est une primitive de $x \mapsto -\ln(x+1)$. **0,5 pt**

b) En déduire la primitive F de f sur D_f qui prend la valeur 1 en 0. **0,5 pt**

5. Vérifier que dans $]0;1[$,

a) $|g(x)| \leq \frac{1}{2}$. **0,5 pt**

b) L'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α, où g est la fonction définie sur $]0;1[$ par : $g(x) = \frac{\ln(x1)}{x}$. **0,5 pt**

6. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathrm{IN}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que : Pour tout $n \in \mathrm{IN}$, $0 < U_n < 1$. **0,5 pt**

b) Démontrer que : Pour tout $n \in \mathrm{IN}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. **0,5 pt**

c) En déduire que : Pour tout $n \in \mathrm{IN}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. **0,25 pt**

d) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $|U_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-3}$. **0,25 pt**

Partie B : Evaluation des compétences 5 points

Situation :

WARMAI est un pisciculteur qui se fait livrer ses alevins dans des glacières de capacité $15\ Kg$ ou dans celles de $21\ kg$. Le fournisseur pour le prévenir du retard sur la livraison, l'informe de ce qu'il ne dispose présentement que des 65 % de la commande, et que s'il la livre dans des glacières de $21\ kg$, il y aura $7\ kg$ hors glacière tandis que s'il la livre dans des glacières de $15\ kg$ alors il y'aura $4\ kg$ hors glacière. Depuis le lancement de son projet, le volume de ses commandes augmente 4 % à chaque nouvelle commande et le volume total des 30 dernières est 5,068494 tonnes. Cet étang est rectangulaire d'aire $9800\ m^2$ et son côté qui sert à l'approvisionnement et à l'évacuation des eaux est un bord rectiligne d'un fleuve le technicien qu'il avait sécurisé cet étang a pris $4750\ F\ CFA$ le mètre.

Tâches :

1. Quel est le volume de la commande actuelle ? **1,5 pt**
2. Quel est le volume qu'il a démarré le projet avec ? **1,5 pt**
3. Avec quel montant au minimum a – t –il sécurisé cet étang ? **1,5 pt**

Présentation : 0,5 pt