EXERCICE 3 :

1. **Déterminer l'ensemble de définition de f :**
   La fonction $f(x) = -2x+2-3\ln x$ est définie pour $x > 0$ car le logarithme naturel $\ln x$ n'est défini que pour $x > 0$. Donc, l'ensemble de définition de f est :
   $$\boxed{\mathbb{D}_f =]0; +\infty[}$$

2. **Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$:**

   - **Limite en 0^+ :**
   $$\lim_{x\to 0^+}(-2x+2-3\ln x) = -2(0)+2-3(-\infty) = 2+\infty = +\infty$$
   Donc, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$.
   - **Limite en $+\infty$:**
   $$\lim_{x\to +\infty}(-2x+2-3\ln x) = -\infty+2-\infty = -\infty$$
   Donc, $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$.

3. **Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = \frac{-2x-3}{x}$:**

   Calculons la dérivée de $f(x) = -2x+2-3\ln x$:
   $$f'(x) = \frac{d}{dx}(-2x) + \frac{d}{dx}(2) + \frac{d}{dx}(-3\ln x) = -2+0-\frac{3}{x} = -2-\frac{3}{x}$$
   En mettant au même dénominateur :
   $$f'(x) = \frac{-2x-3}{x}$$
   Donc, $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2x-3}{x}}$.

4. **En déduire le sens de variation de f :**

   La dérivée $f'(x) = \frac{-2x-3}{x}$ est définie pour $x > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur $-2x-3$ car $x > 0$.

   - Pour $x > 0$, $-2x-3 < 0$, donc $f'(x) < 0$.
   - La fonction f est donc **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.

Donc, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[}$.

5. **Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$:**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$
$-\infty$		

- $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 0^+$.
- $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$.
- $f(x)$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

6. **Montrer que g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$:**

La fonction $g(x) = -x^2+5x-3x\ln x$ est définie sur $]0;+\infty[$. Pour montrer que g est une primitive de f, il suffit de montrer que $g'(x) = f(x)$.
Calculons $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(-x^2) + \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(-3x\ln x)$$

$$g'(x) = -2x + 5 - 3\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = -2x + 5 - 3(\ln x + 1)$$

$$g'(x) = -2x + 5 - 3\ln x - 3 = -2x + 2 - 3\ln x$$

$$g'(x) = f(x)$$

Donc, $\boxed{g \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0;+\infty[}$.