EXERCICE 1
On considère le polynôme P défini pour tout réel x par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6.$$

1. Montrer que $P(-2) = 0$**.**
Pour montrer que $P(-2) = 0$, on remplace x par -2 dans l'expression de $P(x)$:

$$P(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 11(-2) + 6.$$

Calculons chaque terme :

$$\begin{gathered} 2(-2)^3 = 2(-8) = -16, \\ -3(-2)^2 = -3(4) = -12, \\ -11(-2) = 22, \\ 6 = 6. \end{gathered}$$

En additionnant ces résultats :

$$P(-2) = -16 - 12 + 22 + 6 = 0.$$

Donc, $P(-2) = 0$.
2. Montrer que $P(x) = (x+2)(2x^2 - 7x + 3)$**.**
On sait que $P(-2) = 0$, donc $(x+2)$ est un facteur de $P(x)$. Pour factoriser $P(x)$, on effectue la division polynomiale de $P(x)$ par $(x+2)$.
Division polynomiale :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6.$$

On divise $P(x)$ par $(x+2)$:

1. $2x^3 \div x = 2x^2$. On multiplie $(x+2)$ par $2x^2$ pour obtenir $2x^3 + 4x^2$.
2. On soustrait ce résultat de $P(x)$:

$$(2x^3 - 3x^2) - (2x^3 + 4x^2) = -7x^2.$$

3. On abaisse le terme suivant $-11x$:

$$-7x^2 - 11x.$$

4. $-7x^2 \div x = -7x$. On multiplie $(x+2)$ par $-7x$ pour obtenir $-7x^2 - 14x$.
5. On soustrait ce résultat :

$$(-7x^2 - 11x) - (-7x^2 - 14x) = 3x.$$

6. On abaisse le terme suivant +6 :

$$3x + 6.$$

7. $3x \div x = 3$. On multiplie $(x + 2)$ par 3 pour obtenir $3x + 6$.
8. On soustrait ce résultat :

$$(3x + 6) - (3x + 6) = 0.$$

Le quotient de la division est $2x^2 - 7x + 3$, donc :

$$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 7x + 3).$$

3. En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation $P(x) = 0$.
On a :

$$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 7x + 3) = 0.$$

Pour résoudre $P(x) = 0$, on résout chaque facteur séparément :

1. $x + 2 = 0$ donne $x = -2$.
2. $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Résolvons l'équation quadratique $2x^2 - 7x + 3 = 0$:
Le discriminant est :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25.$$

Les solutions sont :

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}.$$

Donc :

$$x = \frac{7 + 5}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Les solutions de $P(x) = 0$ sont donc :

$$x = -2, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 3.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{3x} - 3e^{2x} - 11e^x + 6 = 0$.
On pose $y = e^x$. L'équation devient :

$$2y^3 - 3y^2 - 11y + 6 = 0.$$

On reconnaît ici le polynôme $P(y) = 2y^3 - 3y^2 - 11y + 6$, dont les racines sont $y = -2$, $y = \frac{1}{2}$, et $y = 3$.

Cependant, $y = e^x$ doit être strictement positif. Donc, on ne retient que les solutions $y = \frac{1}{2}$ et $y = 3$.

1. Pour $y = \frac{1}{2}$, on a :

$$e^x = \frac{1}{2} \implies x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

2. Pour $y = 3$, on a :

$$e^x = 3 \implies x = \ln(3).$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$x = -\ln(2), \quad x = \ln(3).$$