Exercice 4 : Probabilités

Exercice 4 : 3 points

1) Lancer d'un dé 8 fois

On lance successivement 8 fois de suite et de manière indépendante un dé cubique équilibré dont les faces portent les numéros de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus une fois le numéro 2 ?

Solution :

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où le numéro 2 apparaît en 8 lancers. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir au plus une fois le numéro 2 est :

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Calculons chaque probabilité :

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 8 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

Ainsi :

$$P(X \leq 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^8 + 8 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

Réponse finale :

$$\boxed{P(X \leq 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^8 + 8 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^7}$$

2) Tirages de jetons

Un sac contient :

— 3 jetons verts portant les numéros de 1 à 3,

— 4 jetons rouges portant les numéros de 1 à 4,

— 2 jetons jaunes portant les numéros de 1 et 2.

Tous ces jetons sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 jetons du sac.

a) Calculer la probabilité d'obtenir trois jetons de couleurs différentes deux à deux.

Solution :

Le nombre total de jetons est :

$$3 \text{ (verts)} + 4 \text{ (rouges)} + 2 \text{ (jaunes)} = 9 \text{ jetons}$$

Le nombre total de façons de tirer 3 jetons parmi 9 est :

$$\binom{9}{3} = 84$$

Le nombre de façons de tirer un jeton de chaque couleur est :

$$3 \text{ (verts)} \times 4 \text{ (rouges)} \times 2 \text{ (jaunes)} = 24$$

La probabilité est donc :

$$P(3 \text{ couleurs différentes}) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

Réponse finale :

$$\boxed{P(3 \text{ couleurs différentes}) = \frac{2}{7}}$$

b) Sachant que les jetons tirés portent le numéro 2, quelle est la probabilité qu'ils soient de couleur rouge ?

Solution :

Les jetons portant le numéro 2 sont :

- 1 jeton vert (numéro 2),
- 1 jeton rouge (numéro 2),
- 1 jeton jaune (numéro 2).

Il y a donc 3 jetons portant le numéro 2. Le nombre de façons de tirer 3 jetons portant le numéro 2 est :

$$\binom{3}{3} = 1$$

Cependant, il n'y a qu'un seul jeton rouge portant le numéro 2, donc il est impossible de tirer 3 jetons rouges portant le numéro 2. Ainsi :

$$P(\text{Rouges} \mid \text{Numéro 2}) = \frac{0}{1} = 0$$

Réponse finale :

$$\boxed{P(\text{Rouges} \mid \text{Numéro 2}) = 0}$$

c) Loi de probabilité de la variable aléatoire X

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage de trois jetons, associe le nombre de jetons jaunes obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution :

Les valeurs possibles de X sont 0, 1 et 2 (car il n'y a que 2 jetons jaunes).

- **Cas $X = 0$:** Aucun jeton jaune n'est tiré.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$$

— **Cas** $X = 1$ **:** Un jeton jaune est tiré.

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{7}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{2 \times 21}{84} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$$

— **Cas** $X = 2$ **:** Deux jetons jaunes sont tirés.

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{7}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{1 \times 7}{84} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$$

Réponse finale :

$$\boxed{\begin{cases} P(X=0) = \frac{5}{12} \\ P(X=1) = \frac{1}{2} \\ P(X=2) = \frac{1}{12} \end{cases}}$$