

Exercice et corrigé complet

Situation

TOBI possède un jardin et un grand champ où il emploie des ouvriers.

- Le jardin a la forme d'un triangle rectangle dont l'aire est égale à 3000 m^2 et la longueur du plus long côté est 130 m .
- Le champ a la forme rectangulaire dont les quatre sommets sont les images des solutions de l'équation $4 \cos^2(x) - 1 = 0$ sur un cercle trigonométrique d'unités sur les axes 2 km .

TOBI a oublié les dimensions de son jardin et celles de son champ. Il désire :

- Entourer tout son jardin par une ligne de fil barbelé.
- Planter des rejets de plantains sur tout le champ en mettant 3 rejets par 20 m^2 .

Il propose deux types de rémunération à ses ouvriers :

- **Type I** : Salaire hebdomadaire de 20000 F avec une augmentation de 550 F toutes les semaines.
- **Type II** : Salaire hebdomadaire de 18000 F avec une augmentation de 4% (par rapport au salaire précédent) toutes les semaines.

Un ouvrier ne dispose que de douze semaines de travail.

Tâches

1. Déterminer le type de rémunération qui est le plus avantageux pour l'ouvrier.
2. Déterminer la longueur du fil barbelé nécessaire pour le jardin.
3. Déterminer le nombre minimal de rejets que TOBI doit acheter.

Corrigé

1. Déterminer le type de rémunération le plus avantageux pour l'ouvrier

Type I : Salaire avec augmentation fixe

- Salaire initial : 20000 F
- Augmentation hebdomadaire : 550 F
- Durée : 12 semaines

Le salaire total perçu sur 12 semaines est la somme des 12 premiers termes d'une suite arithmétique :

$$S_{12} = \frac{12}{2} \times (2 \times 20000 + (12 - 1) \times 550)$$

$$S_{12} = 6 \times (40000 + 6050) = 6 \times 46050 = 276300 \text{ F}$$

Type II : Salaire avec augmentation en pourcentage

- Salaire initial : 18000 F
- Augmentation hebdomadaire : 4%
- Durée : 12 semaines

Le salaire total perçu sur 12 semaines est la somme des 12 premiers termes d'une suite géométrique :

$$S_{12} = 18000 \times \frac{1,04^{12} - 1}{1,04 - 1}$$

Calculons $1,04^{12}$:

$$1,04^{12} \approx 1,6010$$

Donc :

$$S_{12} = 18000 \times \frac{1,6010 - 1}{0,04} = 18000 \times 15,025 = 270450 \text{ F}$$

Conclusion

— Type I : 276300 F

— Type II : 270450 F

Le **Type I** est plus avantageux pour l'ouvrier.

2. Déterminer la longueur du fil barbelé nécessaire pour le jardin

Le jardin a la forme d'un triangle rectangle dont :

— Aire : 3000 m^2

— Hypoténuse : 130 m

Étape 1 : Trouver les côtés du triangle

Soit a et b les deux côtés de l'angle droit. On a :

$$\frac{a \times b}{2} = 3000 \quad \Rightarrow \quad a \times b = 6000$$

Et d'après le théorème de Pythagore :

$$a^2 + b^2 = 130^2 = 16900$$

On résout le système :

$$\begin{cases} a \times b = 6000 \\ a^2 + b^2 = 16900 \end{cases}$$

On utilise l'identité :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 16900 + 12000 = 28900$$

$$a + b = \sqrt{28900} = 170$$

On a donc :

$$\begin{cases} a + b = 170 \\ a \times b = 6000 \end{cases}$$

Les solutions sont les racines de l'équation quadratique :

$$x^2 - 170x + 6000 = 0$$

$$\Delta = 170^2 - 4 \times 6000 = 28900 - 24000 = 4900$$

$$x = \frac{170 \pm \sqrt{4900}}{2} = \frac{170 \pm 70}{2}$$

$$x_1 = 120 \text{ m}, \quad x_2 = 50 \text{ m}$$

Les côtés du triangle sont donc 120 m et 50 m.

Étape 2 : Calculer la longueur du fil barbelé

Le périmètre du triangle est :

$$P = 120 + 50 + 130 = 300 \text{ m}$$

La longueur du fil barbelé nécessaire est **300 m**.

3. Déterminer le nombre minimal de rejets que TOBI doit acheter

Le champ a la forme d'un rectangle dont les sommets sont les images des solutions de l'équation :

$$4 \cos^2(x) - 1 = 0$$

Étape 1 : Résoudre l'équation trigonométrique

$$4 \cos^2(x) - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{4}$$
$$\cos(x) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

Les solutions sur le cercle trigonométrique sont :

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

Les coordonnées des sommets du rectangle sont donc :

$$\left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = (1, \sqrt{3})$$
$$\left(2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right), 2 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) = (1, -\sqrt{3})$$
$$\left(2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = (-1, \sqrt{3})$$
$$\left(2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = (-1, -\sqrt{3})$$

Étape 2 : Calculer les dimensions du champ

La longueur et la largeur du rectangle sont :

$$\text{Longueur} = 2 \times 2 = 4 \text{ km}$$

$$\text{Largeur} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ km}$$

Étape 3 : Calculer l'aire du champ

$$\text{Aire} = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ km}^2$$

Convertissons en m^2 :

$$16\sqrt{3} \text{ km}^2 = 16\sqrt{3} \times 10^6 \text{ m}^2$$

Étape 4 : Calculer le nombre de rejets

On plante 3 rejets par 20 m^2 . Le nombre total de rejets est :

$$N = \frac{16\sqrt{3} \times 10^6}{20} \times 3 = 2400000\sqrt{3}$$

$$N \approx 2400000 \times 1,732 = 4156800$$

Le nombre minimal de rejets à acheter est **4 156 800**.