

COLLEGE F.X. VOGT			Année scolaire 2024-2025	
Département de Mathématiques		MINI-SESSION	Date : Mercredi 29 janvier 2025	
Classe : TTI	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES		Durée : 3h45	Coef :4

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,00 POINTS)

EXERCICE 1 : (05,00 POINTS)

A. Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 6x - 4)^4$; b) $g(x) = \frac{6x^2+x+1}{3x-1}$; c) $h(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - \sin x(\cos x)^7$ (1,5 pt)

B. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. (Solutions sous forme exponentielle). (1 pt)

C. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f qui transforme A en B et E en F avec $z_A = 1 - i$, $z_B = -1 - 2i$, $z_E = -2 + i$ et $z_F = -9 - i$. (1 pt)

D. Soit g la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soient les points B et D du plan tels que $z_B = 1 + i$ et $g(B) = D$.

1. Donner l'écriture complexe de g . (0,5 pt)

2. Donner l'écriture trigonométrique et algébrique de l'affixe du point D. (0,5 pt)

3. En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{5\pi}{12}$. (0,5 pt)

EXERCICE 2 : (05,00 POINTS)

A. x et y désignent deux entiers naturels non nuls tels que $x < y$. Soit S l'ensemble des couples tels que $\text{pgcd}(x; y) = y - x$.

1. Le couple (363; 484) appartient-il à S ? Justifier votre réponse. (0,75 pt)

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le couple $(n; n + 1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse. (0,5 pt)

3. a) Montrer que le couple $(x; y)$ appartient à S si et seulement s'il existe un entier naturel k , non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$. (0,5 pt)

b) Déduire que pour tout couple $(x; y)$ de S, on a $\text{ppcm}(x; y) = k(k + 1)(y - x)$. (0,5 pt)

4. a) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 228. (0,5 pt)

b) En déduire l'ensemble des couples $(x; y)$ de S tels que $\text{ppcm}(x; y) = 228$. (0,75 pt)

B. Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation : $\ln(2 - x) + \ln(x + 4) > \ln(3x + 2)$. (1,5 pt)

EXERCICE 3 : (05,00 POINTS)

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2(1 - \ln x)$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (1 pt)

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]1,2; 1,3[$. (0,5 pt)

3. En déduire le signe g suivant les valeurs de x . (0,5 pt)

4. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$

a. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. (0,5 pt)

b. Justifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ (0,5 pt)

- c. Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
 - d. Démontrer que $(D): y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe de f . (0,25 pt)
 - e. Etudier la position relative entre la droite (D) et la courbe de f . (0,5 pt)
5. Représenter la courbe de f dans un repère et ses asymptotes. (0,75 pt)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES (5,00 POINTS)

Dans la zone de MBADOUMOU, une compagnie de téléphone décide d'installer un pilonne. Ce pilonne aura une couverture réseau qui est délimitée par l'ensemble (C) des points $M(z)$ du plan complexe tels que $|z - 2 + i| \leq 7$.

M. ELONO est un habitant cette zone et son secteur d'habitation a la forme d'un triangle dont les sommets sont les solutions de l'équation $z^3 - (5 + 7i)z^2 - (4 - 25i)z - 12i + 30 = 0$, l'un des sommets ayant pour coordonnées $(0; 2)$. Tous les habitants de cette zone décident de s'abonner dans cette compagnie. Après deux années d'implantation, le chiffre d'affaires en millions de francs CFA réalisé par ladite compagnie dans cette zone en fonction du nombre x de mégabits vendus est donné par la fonction $f(x) = x^2 + 4 - 2\ln x$.

M. ELONO décide se représenter aux élections municipales de l'année 2025 de la commune de MBANKOMO comme conseiller municipal. Pour cela, pour être candidat à ces élections, la zone MBADOUMOU doit avoir au moins 500 électeurs. Ne sachant pas l'effectif réel des électeurs de sa zone, il fait appel à un démographe pour les études. Après ces études, le démographe constate qu'à l'élection municipale de l'année 2020, MBADOUMOU comptait 1500 électeurs. Depuis cette période, chaque année, la population électorale diminue de 15% et 75 nouveaux électeurs viennent s'inscrire.

1. Dire si la zone de M. ELONO sera toute couverte par le réseau de cette compagnie. (1,5 pt)
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} de la quantité de mégabits (*quantité plus grande qu'un mégabit*) vendue pouvant rapportée à la compagnie le chiffre d'affaire de 25 millions F. (1,5 pt)
3. Dire si la candidature M. ELONO sera acceptée par des autorités compétentes. (1,5 pt)

Présentation : 0,5 point

Rappel : Pour toute suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$, on peut toujours trouver une suite numérique définie par $w_n = u_n + r$ telle que (w_n) soit géométrique.