DELEEGATION DU NORD — ANNÉE SCOLAIRE 2024-2025
LYCÉE BILINGUE DE NGONG — $T^{le}C$
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES — Durée : 4H
Examinateur: Mr. KAKA DAIROU. W. S — Séquence 2 — Coef : 7

La qualité des figures et la clarté de la rédaction sont les éléments qui définissent l'hygiène de la mathématique

PARTIE EVALUATIONS DES RESSOURCES 14,5pts

EXERCICE 1 (3,5pts)

Pour tout $\theta \in]0\,;\,\pi[$ on considère la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ definie par :

$$P_n = \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

1- Montrer que $(P_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et déduire que $\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right)$

2- Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 2, \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux). 1pt

3- Déduire que $\forall n \geq 2, \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux). 0,5pt

4- Déduire que $2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\pi$ aisnsi que la $\lim_{n\to+\infty}\left(2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\right)$. 1pt

EXERCICE 2. (2,25pt)

On considère la série statistique suivante :

x_i	a	4	b	8	c	12
y_j	-3	a	4	-b	7	c

1- Exprimer $\overline{X}$; $\overline{Y}$ et $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i y_j n_{ij})$ en fonction de a ; b et c. 0,75pt

2- Déterminer a, b et c sachant que $\overline{X} = \frac{40}{6}$; $\overline{Y} = \frac{14}{6}$ et $Cov(X;Y) = \frac{179}{18}$. 1,5pt

EXERCICE 3. (4,5pts)

Soit $\mathscr{B}=(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace vectoriel E et f un endomorphisme de E tel :

$f(-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}) = \vec{i}+\vec{j}$; $f(-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}) = \vec{i}+\vec{k}$ et $f(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}) = \vec{j}+\vec{k}$.

1- Déterminer la matrice de K de f dans la base $\mathscr{B}=(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et montrer que f n'est pas automorphisme. 1,5pt

2- Soit l'endomorphisme h donc la matrice H est donnée par : $H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a- Déterminer le noyau $\ker h$ ainsi que sa base. 0,75pt
b- Déterminer l'image $\mathrm{Im}h$ ainsi que sa base. 0,75pt
c- Montrer $\ker h$ et $\mathrm{Im}h$ sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de IR^3. 0,5pt

3- On pose $\vec{e_1} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{e_2} = -\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{e_3} = -\vec{i}+\vec{k}$

a- Montrer que $\mathfrak{B}' = (\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ de E et donner la matrice A de h dans la base $\mathfrak{B}'$. 1pt

EXERCICE 4. (4,75pts)

1- Pour tout entier naturel n, on pose : $F_n = 2^{2^n}+1$.

1.1- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $F_n \equiv 2(\mathrm{mod}3)$. 0,75pt

1.2- En déduire que pour tout entier naturel non nul n $F_n + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}6)$. 0,75pt

2- Pour tout entier naturel n et k tels que $0 \leq k \leq n$.

2.1- Montrer que : $F_{n+k} = (F_n - 1)^{2^k} + 1$. 0,5pt

2.2- Vérifier que : $(-4)^{16} \equiv -4(\mathrm{mod}100)$. 0,75pt

2.3- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$, on a: $F_{4n+1} \equiv -3(\mathrm{mod}100)$. 0,75pt

2.4- **Déduire les** deux derniers chiffres de l'entier naturel $\sum_{k=1}^{2024} F_{4k+1}$ 0,75pt

PARTIE B EVALUATIONS DES COMPÉTENCES (5pts)

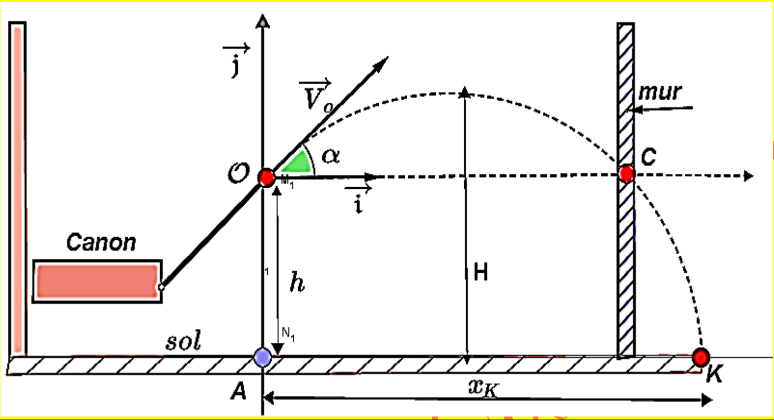
Mr. MAXWELL veut tester un nouvel armement, un canon X_{α}. MAXWELL doit viser une cible située sur un mur au point **C** comme illustre la figure ci-dessous. Pour atteindre la cible, le tireur doit incliner l'arme d'un angle α avec l'horizontale une portée $OC = x$ mètre tel que x verifie le systeme suivant : $\begin{cases} m^2 - 3d^2 = 1998 \\ 9 < x \leq 20 \end{cases}$ *Avec* $m = PPCM(x\,;y)$ *et* $d = PGCD(x\,;y)$. L'équation cartésienne de la trajectoire e la balle dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donnée par la fonction :

$h(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + x\tan(\alpha)$. On donne: $g = 10m/s^2$; $h = 1{,}80m$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

TACHE 1 : ***SOUFYANE***, agent de cette société se demande à quel distance **''d=OC''** du mur que **MAXWELL** doit se positionner afin qu'il puisse atteindre la cible? **SOUFYANE** Vous présente la situation et sollicite votre aide. En tant qu'élève de la classe de **T^{le}C ,** Réponds à sa préoccupation l'aide de vos connaissances mathématiques. **1,75pt**

TACHE 2 : on suppose dans la suite que tire **MAXWELL** la balle avec une vitesse initiale $V_o = 10\ m/s$, pour atteindre la cible dans ce cas quelle serais la hauteur maximal **H** qu'atteindrait la balle avant de d'atteindre la cible ? **1,5pt**

TACHE 3 : Quelles pourraient être les coordonnées du point de chute de la balle **s'il** n'y avait pas le mur ? **1,75pt**



BONUS 4pts

1- *Résoudre dans IN³ le système* $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ c \wedge b = 1 \\ a \times b \times c = 495 \end{cases}$ *1pt*

2- *Soit x; y et z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre* $K = \overline{x13y8z}$ *en base*

-Déterminer tous les triplets $(x;\ y;\ z\ )$pour lesquelles $K \equiv 0[495]$. *3pts*

« Il y a qu'une façon d'échouer, c'est d'abandonner avant d'avoir réussi »

CORRECTION

La qualité des figures et la clarté de la rédaction sont les éléments qui définissent l'hygiène de la mathématique

PARTIE EVALUATIONS DES RESSOURCES 14,5pts

EXERCICE 1 (3,5pts)

1- Pour tout $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ on considère la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ **definie par :** $P_n = \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

Montrons que P_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

on a: $P_{n+1} = \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

$$P_{n+1} = \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^1}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right)\ldots\ldots\times\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^1}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\times\ldots\ldots\times\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \qquad (1)$$

Or $\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \qquad (2)$

(2) dans (1) donne $P_{n+1} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^1}\right)\times\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^1}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\times\ldots\ldots\times\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}_{\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}$

$\Rightarrow P_{n+1} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{1}{2}P_n$ **donc** $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n$

Donc P_n est une suite geometrique de premier terme $\frac{1}{2}$ **et de premier terme** $P_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2^1}\right)\prod_{k=1}^{1}\cos\left(\frac{\theta}{2^1}\right)$

$P_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin(\theta)$ **donc** $P_n = 2\sin(\theta)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sin(\theta)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad \Rightarrow P_n = \sin(\theta)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2- **Déduisons que** $\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right)$

D'après la question prétendent $P_n = \sin(\theta)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (1) et $P_n = \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ (2)

En égalisant les deux relations, on a : $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \sin(\theta)\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right)$ **d'ou le résultat**

3- **Démontons par récurrence que** $\forall n \geq 2, \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\,(n-1\ \textit{radicaux}).$ 1pt

✓ ***INITIALISATION*** *:pour* $n = 2$ *car* $\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **vraie** (*hypothèse de récurrence*)

✓ ***HERIDITE :*** Supposons le résultat jusqu'à un ordre $n \geq 2$, et montrons que

$\forall n \geq 2, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\,(n\ \textit{radicaux}).$

Or on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2^n}}{2}\right) - 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$

d'après hypothèse de récurrence $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\,(n-1\ \textit{radicaux})$

ainsi $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\ (n-1\ \textit{radicaux})$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\,(n-1\ \textit{radicaux})} = \sqrt{\frac{1}{4}\left[2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\right]}\,(n-1\ \textit{radicaux})$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ radicaux)$ la proposition est vraie au rang **n+1**

✓ *Conclusion.* : $\forall n \geq 2, Cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n-1\ radicaux)$.

4- Déduisons-en que $\forall n \geq 2, \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n-1\ radicaux)$. **0,5pt**

On a : $\mathbf{Sin}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}$ (1) Or $Cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n-2\ radicaux)$ **(2)**

Dans (2) Donne $\mathbf{Sin}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\ (n-2\ radicaux)}$

$\mathbf{Sin}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\ (n-2\ radicaux)} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n-2\ radicaux)}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\left[2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\right]}(n-2\ radicaux) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ radicaux)$ CQFD

5- Déduison-en que $2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\pi$ aisnsi que la $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\right)$.

- **Déduison-en que $2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\pi$**

On a : $\mathbf{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ \text{radicaux})$

$\Leftrightarrow \frac{2^n}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ \text{radicaux})$ *an multipliant les deux membres par* 2^n

$\Leftrightarrow \frac{2^n}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ \text{radicaux}) = 2^n\ \mathbf{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ \text{radicaux}) = 2\times 2^n\ \mathbf{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ \text{radicaux}) = \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}(n\ \text{radicaux}) = \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\pi}\pi$ D'OU LE RESULTAT

- ***Déduisons la limite*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right)}\pi\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)\pi}{\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)}\right)$. Posons : $\begin{cases} X = \frac{2\pi}{2^n} \\ quand\ n \dashrightarrow \infty, X \longrightarrow 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)\pi}{\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)}\right) = \lim\limits_{X\to0}\left(\frac{\mathrm{Sin}X}{X}\pi\right) = 1\times\pi = \pi$, *Car* $\lim\limits_{X\to0}\left(\frac{\mathrm{Sin}X}{X}\right) = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\right) = \pi$

EXERCICE 2. (2,25pt)

On considère la série statistique suivante :

x_i	A	4	b	8	c	12
y_j	-3	a	4	-b	7	c

1- Exprimons $\overline{X}$; $\overline{Y}$ et $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i y_j n_{ij})$ en fonction **de a ; b et c.** **0,75pt**

$\overline{X} = \frac{a+4+b+8+c+12}{6} = \frac{a+b+c+24}{6}$. $\overline{Y} = \frac{-3+a+4-b+c+7}{6} = \frac{a-b+c+8}{6}$

$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i y_j n_{ij}) = \frac{-3a+4a+4b-8b+7c+12c}{6} = \frac{a-4b+19c}{6}$

2- Déterminons a, b et c sachant que $\overline{X} = \frac{40}{6}$; $\overline{Y} = \frac{14}{6}$ et $Cov(X;Y) = \frac{179}{18}$. 1,5pt

$$\begin{cases} \overline{X} = \frac{40}{6} \\ \overline{Y} = \frac{14}{6} \\ Cov(X;Y) = \frac{179}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b+c+24}{6} = \frac{40}{6} \\ \frac{a-b+c+8}{6} = \frac{14}{6} \\ \frac{a-4b+19c}{6} - \frac{40}{6} \times \frac{14}{6} = \frac{179}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+24 = 40 \\ a-b+c+8 = 14 \\ 6a-24b+144c = 358+560 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 16 \\ a-b+c = 6 \\ 6a-24b+144c = 918 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 16 \\ a-b+c = 6 \\ a-4b+57c = 153 \end{cases}$$ Apres la résolution on *obtient* $a = 8,11$; $b = 5$; $c = 2,89$

EXERCICE 3. (4,5pts)

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace vectoriel **E** et **f** un endomorphisme de **E** tel :

$f(-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}) = \vec{i}+\vec{j}$; $f(-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}) = \vec{i}+\vec{k}$ et $f(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}) = \vec{j}+\vec{k}$.

1- Déterminons la matrice de **K** de f dans la base $\mathscr{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et montrer que f n'est pas automorphisme. **1,5pt**

- *Déterminons la matrice de K de f dans la base $\mathscr{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$*

on a: $$\begin{cases} f(-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}) = \vec{i}+\vec{j} \\ f(-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}) = \vec{i}+\vec{k} \\ f(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}) = \vec{j}+\vec{k}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -f(\vec{i}) - f(\vec{j}) + 2f(\vec{k}) = \vec{i}+\vec{j} \\ -f(\vec{i}) + 2f(\vec{j}) - f(\vec{k}) = \vec{i}+\vec{k} \\ 2f(\vec{i}) - f(\vec{j}) - f(\vec{k}) = \vec{j}+\vec{k}. \end{cases}$$

apres resolution, on obtient $$\begin{cases} f(\vec{i}) = -2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k} \\ f(\vec{k}) = \vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}. \end{cases}$$ *d'ou* $$K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- *montrer que f n'est pas automorphisme*

*Calculons le déterminant de la matrice **M** de f*

$$det(K) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\| \\ -6}} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}_{\substack{\| \\ +3}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\| \\ +3}} = 0$$ ***donc f n'est pas automorphisme***

2- *Soit l'endomorphisme h donc la matrice H est donnée par* : $$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a- *Déterminons le noyau de h noté Ker(h) et donnons une base $\vec{e_1}$* **0,75pt**

$Ker(h) = \{\vec{u}(x,y,z) \in IR^3 \ / \ h(\vec{u}) = \vec{O}_{IR^3}\}$

On a : $$\begin{cases} -2x+y+z = 0 \ (1) \\ x-2y+z = 0 \ (2) \\ x+y-2z = 0 \ (3) \end{cases}$$

$(3)-(2)$ donne : $3y-3z = 0 \Longrightarrow y = z \ (4)$

(4) dans (1), on a : $-2x+2y = 0 \Longrightarrow x = y$.

*D'où le noyau de **h** est une droite vectorielle d'équation $x = y = z$ engendrée par le vecteur $\vec{e_1}$*

$\vec{e_1} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ *est la de base Ker(h).*

b- *Déterminer l'image Im h ainsi que sa* **base**$(\vec{e_1};\vec{e_2})$. **0,75pt**

$Im(h) = \{\vec{u}'(x'.y';z') \in IR^3, \exists \ \vec{u}(x,y,z) \in IR^3 \ / \ h(\vec{u}) = \vec{u}'\}$

$$\begin{cases} x' = -2x+y+z \ (1) \\ y' = x-2y+z \ (2) \\ z' = x+y-2z \ (3) \end{cases}$$

En faisant $(1)+(2)+(3)$, on trouve $x'+y'+z' = 0$.

D'où le noyau de h *est une droite vectorielle d'équation* $x+y+z=0$ *engendrée par le vecteur* $\overrightarrow{e_2}$ *et* $\overrightarrow{e_3}$ *tels que* $\overrightarrow{e_2}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ *et* $\overrightarrow{e_3}=-\vec{\imath}+\vec{k}$.

c- *Montrer ker h et Im h sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de* IR^3. 0,5pt

Ker (h) et Im (h) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de IR^3 *si et seulement si*

$$\begin{cases} Ker(h)\cap Im(h)=\{O_{IR^3}\} \\ dim(Ker(h))\cap dim(Im(h))=dim(IR^3) \end{cases}$$

- $Ker(h)\cap Im(h)=\{O_{IR^3}\}$

On a : $\begin{cases} x=y=z\ (1) \\ x+y+z=0\ (2) \end{cases}$

En remplaçant (1) dans (2), on trouve $x=0$, $y=0$ et $z=0$.

- *Montrons que* $dim(Ker(h))\cap dim(Im(h))=dim(IR^3)$

On a : $dim(Ker(h))+dim(Im(h))=dim(IR^3)=1+2=3$ *et* $dim(IR^3)=3$

Donc : $dim(Ker(h))+dim(Im(h))$

D'où $Ker(h)$ *et* $Im(h)$ *sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* IR^3

3- On pose $\overrightarrow{e_1}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$; $\overrightarrow{e_2}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_3}=-\vec{\imath}+\vec{k}$

a- *Montrons que* $\mathfrak{B}'=(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ *de E et donnons la matrice A de h dans la base* $\mathfrak{B}'$. 1pt

- *Montrons que* $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ *est une base de* IR^3.

$(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ *est une base de* IR^3 *si et seulement si,* $det(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})\neq 0$.

$$det(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-\underbrace{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}_{1}+\underbrace{\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}}_{1}-\underbrace{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}_{1}=3\neq 0$$ *donc* $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ *est une base de* IR^3.

- *Donnons la matrice A de h dans la base* $\mathfrak{B}'$.

On a : $\begin{cases} h(\overrightarrow{e_1})=h(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}) \\ h(\overrightarrow{e_2})=h(-\vec{\imath}+\vec{\jmath}) \\ h(\overrightarrow{e_3})=h(-\vec{\imath}+\vec{k}). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(\overrightarrow{e_1})=h(\vec{\imath})+h(\vec{\jmath})+h(\vec{k}) \\ h(\overrightarrow{e_2})=-h(\vec{\imath})+h(\vec{\jmath}) \\ h(\overrightarrow{e_3})=-h(\vec{\imath})+h(\vec{k}). \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(\overrightarrow{e_1})=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}+\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}+\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k} \\ h(\overrightarrow{e_2})=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}+\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k} \\ h(\overrightarrow{e_3})=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}+\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}.. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(\overrightarrow{e_1})=O\overrightarrow{e_1}+O\overrightarrow{e_2}+O\overrightarrow{e_3} \\ h(\overrightarrow{e_2})=3\vec{\imath}-3\vec{\jmath} \\ h(\overrightarrow{e_3})=3\vec{\imath}-3\vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(\overrightarrow{e_1})=O\overrightarrow{e_1}+O\overrightarrow{e_2}+O\overrightarrow{e_3} \\ h(\overrightarrow{e_2})=-3(\vec{\imath}-\vec{\jmath}) \\ h(\overrightarrow{e_3})=-3(\vec{\imath}-\vec{k}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(\overrightarrow{e_1})=O\overrightarrow{e_1}+O\overrightarrow{e_2}+O\overrightarrow{e_3} \\ h(\overrightarrow{e_2})=-3\overrightarrow{e_2} \\ h(\overrightarrow{e_3})=-3\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$ *D'où* $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

EXERCICE 4. (4,75pts)

1- Pour tout **entier** naturel **n**, on pose : $F_n=2^{2^n}+1$.

1.1- *Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $F_n \equiv 2(mod3)$.* **0,75pt**

On a :2 $\equiv -1[3] \Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv (-1)^{2^n}[3]$

$\Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv \left((-1)^2\right)^n[3]$

$\Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv 1[3]$

$\Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv 1[3]$

$\Leftrightarrow 2^{2^n} + 1 \equiv (1+1)[3].$

$\Leftrightarrow \underbrace{2^{2^n} + 1}_{F_n} \equiv 2[3]. \Longrightarrow, F_n \equiv 2[3].$ ***Cqfd***

1.2- **<u>Déduisons-en que pour tout entier naturel non nul n $F_n + 1 \equiv 0[6]$</u>**

- ✓ **On** a : $F_n \equiv 2[3] \Leftrightarrow F_n + 1 \equiv (1+2)[3]$
  $\Longrightarrow F_n + 1 \equiv 0[3].$ **(1).**
- ✓ On a:**2** $\equiv 0[2] \quad \Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv 0[2]$
  $\Leftrightarrow 2^{2^n} + 1 \equiv 1[2]$

$\Longrightarrow F_n + 1 \equiv 0[2]$ **(2).**

$or\ 2 \wedge 3 = 1$. **Donc** $\begin{cases} F_n + 1 \equiv 0[3]. \\ F_n + 1 \equiv 0[2] \end{cases} \Longrightarrow F_n + 1 \equiv 0[6]$ **car**

$\left(\begin{cases} a \equiv 0[c] \\ a \equiv 0[d] \end{cases} \Longrightarrow a \equiv 0[ppcm(cd)]\right)$

2- Pour tout entier naturel n ***et*** k tels que $0 \leq k \leq n$.

2.1- Montrons que : $F_{n+1} = (F_n - 1)^{2^k} + 1.$

On a : : $F_{n+k} = 2^{2^{n+k}} + 1 = 2^{2^n \times 2^k} + 1$

$= \underbrace{\left(2^{2^n}\right)}_{F_n - 1}{}^{2^k} + 1$

$\Longrightarrow (F_n - 1)^{2^k} + 1.$ ***Cqfd***

2.2- **<u>Vérifier que $(-4)^{16} \equiv -4[mod100]$.</u>**

On a : $(-4)^4 \equiv 256[100] \Leftrightarrow (-4)^4 \equiv 56[100]$

$\Leftrightarrow [(-4)^4]^2 \equiv 56^2[100]$

$\Leftrightarrow (-4)^8 \equiv 3136[100]$

$\Leftrightarrow (-4)^8 \equiv 36[100]$

$\Leftrightarrow [(4)^8]^2 \equiv 36^2 \times 6[100]$

$\Leftrightarrow (-4)^{16} \equiv 1996[100]$

$\Leftrightarrow (-4)^{16} \equiv -4[100]$

Car $1996 \equiv -4[100]$

2.3- **<u>Montrer par récurrence que :</u>**

$\forall n \in IN^*, on\ a$: $F_{4n+1} \equiv -4[mod100]$

Pour n=1, $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 2^{2\times 16} + 1$

$(-4)^{16} + 1$

or dapres la question precedente, on a

$(-4)^{16} \equiv -4[100] \Leftrightarrow (-4)^{16} + 1 \equiv -3[100]$ vrai

Soit n un entier naturels non nul supposons que

$F_{4n+1} \equiv -3[100]$ et montrons que

$F_{4(n+1)+1} \equiv -3[100]$

$F_{4n+5} = F_{(4n+1)+4} = (F_{4n+1} - 1)^{2^4} + 1$ (***car***

$F_{n+1} = (F_n - 1)^{2^k} + 1)$ Or $F_{4n+1} - 1 \equiv -4[100]$

$\Leftrightarrow (F_{4n+1} - 1)^{2^4} + 1 \equiv (-4)^{16}[100]$

Or$(-4)^{16} \equiv -4[100]$ donc $(F_{4n+1} - 1)^{2^4} + 1 \equiv (-4)^{16}[100]$

$F_{4n+1} \equiv -3[100] \Longrightarrow (F_n - 1)^{2^4} \equiv -3[100]$

D'où : $F_{4n+1} \equiv -3(mod100)$

22. Déduire les deux derniers chiffres de l'entier **naturel** $E = \sum_{k=1}^{2024} F_{4k+1}$

On a : $F_{4k+1} \equiv -3[100]$

- ➢ **Si k=1** $\Longrightarrow F_{4(1)+1} \equiv -3[100]$
- ➢ **Si k=2** $\Longrightarrow F_{4(2)+1} \equiv -3[100]$
- ➢ **Si k=3** $\Longrightarrow F_{4(3)+1} \equiv -3[100]$
- ➢ ‖ ‖ ‖
- ➢ ‖ ‖ ‖

Si k=2024 $\Longrightarrow F_{4(2024)+1} \equiv -3[100]$

En additionnant les **2024** *congruences une à une on obtient* $\sum_{k=1}^{2024} F_{4k+1} \equiv 2024(-3)[100]$

$\equiv -6072[100]$

$\equiv -6072 + 6100[100]$

car **6100** $\equiv 0[100] \equiv 28[100]$

Ainsi $E \equiv 28[100]$ *donc les deux dernier chiffres de E sont 28*

<u>*PARTIE B EVALUATIONS DES COMPÉTENCES (5pts)*</u>

<u>TACHE 1 :</u> SOUFYANE, agent de cette société se demandes à quel distance "d" du mur que MAXWELL doit se positionner afin qu'il réussisse à atteindre la cible. SOUFYANE vous présente

la situation et sollicite votre aide. En tant qu'élève e la classe de $T^{le}C$ Répondons à sa préoccupation l'aide de nos connaissances mathématiques. **1,75pt**

Résolvons le système $\begin{cases} m^2 - 3d^2 = 1998 \\ 9 < x \leq 20 \end{cases}$ Avec $m = PPCM(x\,;y)$ et $d = PGCD(x\,;y)$

$m^2 - 3d^2 = 1998$ (1) soit $(x'\,;y')$ tel que $PGCD(x'\,;y') = 1$ et $x = x'd$ (2); $y = y'd$ (3)

(2) et (3) dans (1) donne $(x'y'd)^2 - 3d^2 = 1998 \Longrightarrow (x'y')^2 - 3 = \frac{1998}{d^2} = \frac{2\times3^3\times37}{d^2}$

Le seul entier dont le carré qui est diviseur de 1998 est, 3 donc d=3

$(x'y')^2 - 3 = \frac{1998}{3^2} = 222 \Longrightarrow (x'y')^2 = 225$

$\Longrightarrow (x'y')^2 = 15^2 \Longrightarrow x' \times y' = 15 \Longrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5 \end{cases}$

si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(1) = 3 \\ y = 3y' = 3(15) = 45 \end{cases}$

Si $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(3) = 9 \\ y = 3y' = 3(5) = 15 \end{cases}$

or $9 < x \leq 20$ *dont* $\boldsymbol{x = 15}$

Distance "**d**" du mur que **MAXWELL** doit se positionner afin qu'il réussisse à atteindre la cible est de **15m**

TACHE 2 : on suppose dans la suite que MAXWELL tire la balle avec une vitesse initiale $V_0 = 10$ m/s, pour atteindre la cible dans ce cas quelle serais la hauteur maximal H qu'atteindrait la balle avant de d'atteindre la cible ? **1,5pt**

On a $h(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 Cos^2(\alpha)}x^2 + x\tan(\alpha)$. On donne: *g =10m/s²; h=1,80m;* $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

AN : a $h(x) = -\frac{1}{2}\frac{10}{100Cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}x^2 + x\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + x + 18.$

Au sommet ; $h'(x_m) = 0 \Longrightarrow = -\frac{1}{5}x_m + 1 = 0 \Longrightarrow x_m = 5.$

Or $H = h + y$ **de plus ;** $y = h(5) = -\frac{1}{10}(5)^2 + 5 = -2,5 + 5 = 2,5.$

Donc $H = 1,80 + 2,50 = 4,3m$

TACHE 3 : Quelles pourraient être les coordonnées du point de chute de la balle s'il n'y avait pas le mur ? **1,75pt**

La balle chute après avoir parcouru une hauteur h **c – a – d** $h(x) = H$

$h(x) = H \Leftrightarrow -\frac{1}{10}x^2 + x = 4,3 \Longrightarrow -x^2 + 10x - 18 = 0, \Longrightarrow -(x + 1,56)(x - 11,56).$ **x=-1,56 ou x=11,56**

Or $x > 0$ **donc** $x = 11,56$

Les coordonnées du point K de chute de la balle s'il n'y avait pas le mur *K(11,56 ; -1,8)*

BONUS 4pts

1- *Résoudre dans IN³ le système* $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ c \wedge b = 1 \\ a \times b \times c = 495 \end{cases}$ *1pt*

$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ c \wedge b = 1 \\ a \times b \times c = 495 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ c \wedge b = 1 \\ a \times b \times c = 3^2 \times 5 \times 11 \end{cases}$ **or** $\begin{cases} 9 \wedge 11 = 1 \\ 11 \wedge 5 = 1 \\ 5 \wedge 9 = 1 \\ a \times b \times c = 3^2 \times 5 \times 11 \end{cases}$

Donc S $\{(9;5;11),(9;11;5),(5;9;11),(5;11;9),(11;5;9),(11;9;5)\}$

1- *Soit x; y et z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $K = \overline{x13y8z}$ en base 10. Déterminer tous les triplets $(x;\ y;\ z)$ pour lesquelles $K \equiv 0[495]$.* *3pts*

Déterminons tous les triplets (x, y, z) pour lesquelles A est divisible par 495 :

A est divisible par 495 si A est à la fois divisible par 9; 5 et 11.

* $A = x13y8z$ est divisible par 5 si $z \in \{0; 5\}$;

- Pour $z = 0$:

* $A = x13y80$ est divisible par 9 si : $x + 1 + 3 + y + 8 + 0 \equiv 0[9]$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $x + y = 9k + 6$ (1)

* $A = x13y80$ est divisible par 11 si : $0 - 8 + y - 3 + 1 - x \equiv 0[11]$

Soit $k' \in \mathbb{Z}$, tel que : $y - x = 11k' + 10$ (2)

On a : $x + y = 9k + 6$	On a : $y - x = 11k' + 10$
$0 < x \leq 9$	$0 < y \leq 9$
$+ \; 0 < y \leq 9$	$-9 < -x \leq 0$
$0 < x + y \leq 18$	$-9 < y - x \leq 9$
$0 < 9k + 6 \leq 18$	$-9 < 11k' + 10 \leq 9$
$-0{,}66 < k \leq 1{,}33$	$-1{,}72 < k' \leq -0{,}09$
Alors $k \in \{0; 1\}$	Alors $k' = -1$

Formons un système avec l'équation (1) et (2) :

* Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 6 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

* Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 15 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$

Avec le triplet $(8; 7; 0)$, on a : $\boxed{A = \mathbf{813780}}$

- Pour $z = 5$:

* $A = x13y85$ est divisible par 9 si : $x + 1 + 3 + y + 8 + 5 \equiv 0[9]$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $x + y = 9k + 1$ (3)

* $A = x13y85$ est divisible par 11 si : $5 - 8 + y - 3 + 1 - x \equiv 0[11]$

Soit $k' \in \mathbb{Z}$, tel que : $y - x = 11k' + 5$ (4)

On a : $x + y = 9k + 1$	On a : $y - x = 11k' + 5$
$0 < x \leq 9$	$0 < y \leq 9$
$+ \; 0 < y \leq 9$	$-9 < -x \leq 0$
$0 < x + y \leq 18$	$-9 < y - x \leq 9$
$0 < 9k + 1 \leq 18$	$-9 < 11k' + 5 \leq 9$
$-0{,}11 < k \leq 1{,}88$	$-1{,}27 < k' \leq 0{,}36$
Alors $k \in \{0; 1\}$	Alors $k' \in \{-1; 0\}$

Formons un système avec l'équation (3) et (4) :

- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-5}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Avec le triplet $(8; 2; 5)$, on a : $\boxed{A = \mathbf{813285}}$

$$\boxed{S = \{(\mathbf{8; 7; 0}); (\mathbf{8; 2; 5})\}}$$