COLLECTION HACHMOMO

EVALUATION 3 CLASSE DE Tle D

Ministère des Enseignements Secondaires | Année Scolaire 2021/2022
LYCEE BILINGUE DE FOKOUE | Evaluation séquentielle N°3
B.P : 05 FOKOUE | Classe : Tle D
Département de Mathématiques | Durée : 4h ; Coef : 04

Examinateurs : TEDJOU BIENVENU (PLEG)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB : la clarté, la lisibilité et toutes les étapes de calculs seront prises en compte. L'épreuve est numérotée sur deux pages

A. EVALUATIONS DES RESSOURCES : $[15,5pts]$

EXERCICE 1 : $[06,5pts]$

1- Soit la fonction f définie sur $]-4;+\infty[$ par $f(x)=(x+4)\sqrt{x+4}$

a- Donner la fonction dérivée f' de la fonction f $[0,75pt]$

b- En déduire une primitive sur $]-4;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+4}$ $[0,5pt]$

2- Lineariser $cos^5 x$ $[1pt]$

3- on donne dans le plan les points A,B,C et D d'affixes : $z_A=2-2i$; $z_B=2i$; $z_C=-1+i$ et $z_D=-1-i$. Montrer A,B,C et D sont cocycliques $[1pt]$

4- Le plan complexe est muni du repère $(0;\vec{I};\vec{J})$ et On considère dans $\mathbb{C}$ points A,B,C d'affixes : $z_A=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$; $z_B=-1+i$; $z_C=1-2i$

a- Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s de centre A et qui transforme le point B en C $[1pt]$

b- Déterminer l'expression analytique de s $[0,5pt]$

5- Soit f l'application du plan dans lui-même qui a tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;y')$ tel que : $\begin{cases} x'=-x+y\sqrt{3}-\sqrt{3} \\ y'=-x\sqrt{3}-y+2\sqrt{3} \end{cases}$

a- Déterminer l'écriture complexe de f $[1pt]$

b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f $[0,75pt]$

EXERCICE 2 : $[03,5pts]$

Une entreprise spécialisée dans l'industrie du bois envisage de faire des prévisions pour $l'année$ 2013 du cout de production des feuilles de contre plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des données statistiques résumées dans le tableau suivant.

$\mathrm{X}=$ chiffre d'affaire (en million de francs) ; $\mathrm{Y}=$ cout de production (en million de francs)

$années$	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
x_i	350	380	500	540	580	650	700
y_i	40	45	50	55	60	65	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double (X,Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(0,\vec{I},\vec{J})$. on prendra $1cm\ pour\ 50\ millions$ de francs en $abscisse$ et $1cm\ pour\ 5\ millions$ de francs en $ordonnées$ $[0,75pt]$

2- Déterminer les coordonnées du point moyen G et représenter le dans le repère $[0,25pt]$

3- Vérifier qu'un arrondi de la covariance $cov(X,Y)$ de cette série est 1193 $[0,75pt]$

4- En utilisant les données et réponses précédentes :

a- Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre $X\ et\ Y$ $[0,25pt]$

b- Déterminer une équation de régression de la droite d'ajustement (D) de $Y\ en\ X$ par la méthode des moindres carrés $[1pt]$

c- Prévoir le cout de production de cette entreprise pour $l'année$ 2014 ou son chiffre d'affaires est de $800\ 000\ 000F$ $[0,5pt]$

PROBLEME : $[05,5pts]$

Les parties A et B sont liés et sont obligatoire

PARTIE A : $[02pts]$

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$

1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. $[0,75pt]$

2- montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0,6 \leq \alpha \leq 0,61$ $[0,75pt]$

3- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x $[0,5pt]$

PARTIE B : $[03,5pts]$

On définie la fonction f par $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1}$ et (C_f) sa courbe representative dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique $4cm$

1- étudier les variations de les variations de f $[1pt]$

2- déterminer une équation de la tangente (T) a (C_f) au point d'abscisse 0 $[0,5pt]$

3- montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{3\alpha^2}$ et que $1,7 \leq f(\alpha) \leq 1,9$ $[1pt]$

4- Construire la courbe (C_f) de f, (T) et les asymptotes dans un repère orthonormal $[1pt]$

B. EVALUATIONS DES RESSOURCES : $[04,5pts]$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. L'unité est le mètre. Mr CLOVIS a un jardin triangulaire dont un sommet est repéré par son affixe $2 + 3i$ est les deux autres sommets sont solutions de l'équation $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$. Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le mètre coute 1000F. le terrain de Mme TAPAMO est un domaine $ABCD$ ou les sommets A,B et C ont pour affixe respectives $-1 + i$; $1 + 5i$ et $3 - i$. le point D est l'image du point C par similitude directe de centre B qui transforme A en C. Mme TAPAMO voudrait construire sur ce terrain une école et pour cela elle a besoin de recouvrir toute la superficie de ce terrain avec les carreaux. Le carton de carreaux coute 15 000F et peut recouvrir une superficie de $5m^2$. Mr CLOVIS a regrouper dans le tableau ci-dessous la production moyenne en tonne y de son jardin en fonction du nombre d'année pendant 10ans, par des calculs, il désire estimer la production en tonne de son jardin la quinzième année si le couple $(x\ ;y)$ formé de l'année x et de sa production y est solution de l'équation de la droite de régression de y en x obtenue à partir de la méthodes des moindres carrés

année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
production (y_i)	3	4	$5,1$	6	$7,5$	8	$9,4$	$10,5$	$11,5$	13

TACHES :

1- aider CLOVIS à déterminer Sa production la quinzième année $[1,5pts]$

2- quelle somme doit prévoir Mme TAPAMO pour l'achat des carreaux pouvant couvrir entièrement son terrain? $[1,5pts]$

3- quelle somme d'argent doit prévoir CLOVIS pour entourer totalement son jardin ? $[1,5pts]$

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
MINESEC
DRES CENTRE / DDES MEFOU ET AKONO
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Second Cycle
EXAMEN : Evaluation Trimestrielle N°2
SESSION DU 28/02 au 04/03 2022
CLASSE : Terminale D Durée : 4h Coef : 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve est constituée de deux parties A et B notée sur 80points

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (60 points)

Exercice 1 : Questions à choix multiples 8points

Pour chacune des questions qui te sont proposées, une seule réponse est vrai, identifie-la puis relève le numéro de question ainsi que la lettre correspondant à la bonne réponse : 2pts ×4

1- L'écriture simplifiée de $ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$:
   a- 0 b- ln2 c- $-$ln2

2- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est :
   a- 0 b- 1 c- e

3- L'équation : $2xln(2x+1) = 2x$ admet $]0, +\infty[$:
   a- zero solution b- une solution c- deux solutions

4- Si une fonction est paire, alors sa primitive :
   a- est paire b- est impaire c- n'est ni paire, ni impaire

Exercice 2 : Calcul Intégral 12points

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1. Calcul de I. Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = ln(x+\sqrt{x^2+2})$
   a. Calculer la dérivée de la fonction f. 2pts
   b. En déduire le calcul de I. 2pts
2. Calcul de J et de K
   a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : $J + 2I = K$. 2pts
   b. A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$. 3pts
   c. En déduire les valeurs de J et K. 3pts

Exercice 3 : Nombres complexes 20points

A- a désigne un nombre complexe de module r et d'argument $\theta \in [0;\ \pi]$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $-z^2 + a(a+i)z - a^3i = 0$
   1-Résoudre dans $\mathbb{C}$, en fonction de a, l'équation (E). 4pt
   2-Ecrire les solutions sous forme trigonométriques en fonction de r et θ 4pts
   3-Déterminer les valeurs de a pour lesquelles les deux solutions sont conjuguées. 2pts

B- Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ et on considère $A\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$; $B[1]$; $C[-i]$ et $D\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right]$
   1-Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques 4pts
   2-Déterminer l'expression complexe de la rotation r de centre O qui transforme A en D. 4pts
   3-Déterminer l'angle de la rotation r 2pts

Exercice 4 : Etude des fonctions et Suites Numériques 20points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). On considère la fonction cosinus hyperbolique notée ch définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Posons $f(x) = ln(chx)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1- a. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. 1pt

b. Montrer que f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ 2pts

2- Etudier les variations de f. 3pts

3- a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = x - ln2 + ln(1 + e^{-2x})$ 2pts

b. En déduire que la courbe de f a une asymptote (T) en $+\infty$ dont on précisera l'équation cartésienne. 2pts

c. Préciser la position relative de (T) et la courbe de f. 2pts

4- Représenter la courbe de f, ainsi que l'asymptote (T). 3pts

5- Soit $a > 0$ et soit (U_n) la suite telle que $U_0 = a$ et $U_{n+1} = ln(chU_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq x$ 1pt

b. En déduire que $U_n \in [0, a]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 2pts

c. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

d. En utilisant 3-a. montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 2pts

e. En déduire la limite de la suite (U_n). 1pt

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES (20 points)

BABA veut transformer une partie de son terrain en un site touristique et la zone utilisable est délimitée par l'ensemble des points $M(x; y)$du plan tels que : $70 \leq |2i\bar{z} + 2 - 3i| \leq 80$ où $z = x + iy$. L'entrepreneur lui demande une somme de 5000Fcfa par mètre carré de terrain. BABA dispose de 5 500 000 francs CFA pour l'aménagement du site. Un expert en bactériologie lui fait comprendre à BABA que la ville n'est pas appropriée pour ce genre de projet car la peste attaque les animaux dans la ville et que le nombre de victimes $f(t)$ en fonction du temps t en millions de secondes suit la fonction $f(t) = -2t^3 - t^2 + 1$; l'expert affirme aussi que cette peste fera plus de victimes entre 650 000 et 660 000 secondes.

Sur l'autre partie, BABA dispose d'un espace de jeu du Golf assez large et de longueur 11m, juste après c'est une rivière. Pendant le jeu, si la balle tombe dans l'eau ou au-delà de la rivière, le joueur est suspendu pour une semaine et paye une amende proportionnelle à la distance qui sépare le point de chute et le bord du terrain à raison 1000F pour 0,5m d'écart. La trajectoire décrite par la balle est donnée par la fonction $g(x) = \frac{5}{v_0^2(1+tan^2\alpha)}x^2 + ax + h$ où v_0 est la vitesse initiale communiquée à la balle, α l'angle entre l'horizontale et le vecteur vitesse initial et h l'altitude par rapport au niveau du sol à laquelle la balle a été lancée. Le point de tire est exactement sur une petite monticule à la limite de cet espace sur la largeur gauche et Baba a projeté la balle dans les sens de la longueur du terrain. Un système automatique permet de lire sur un écran : $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{4}$; $v_0 = 5m/s$ et l'altitude de 2m.

1- BABA sera-t-il suspendu après ce tire ? si oui quel est le montant de son amende ? 6pts

2- BABA pourra t'il réaliser son projet de site touristique ? 6pts

3- L'expert a t'il raison lorsqu'il affirme que la peste fera plus de victimes dans cet intervalle de temps ? 6pts

Présentation : 2pts

Examinateur : Luc ABOUGNE, PLEG MATHS

COLLEGE BILINGUE LA PERLE		Année Scolaire : 2021/2022
BP : 760 DOUALA NGODI-BAKOKO		C.C N° 3 Epreuve : MATHEMATIQUES
Tel : (237) 33 03 77 73		
Email. : cobilape@yahoo.fr		Classe : T^{le} D1 Durée : 2h30' Coefficient : 4
Web : www.cobilape.com		Date : 15/ 01 /2022 Prof : Olivier TIAGHO

EXERCICE 1 : 6,5 Points

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $W = 21 + 20i$. **1pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2+i)z + 6 + 6i = 0$. **1pt**
3. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $a = -2 + 2i$. **1pt**
4. Ecrire sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)}{-2+2i}$. **2pts**
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{13\pi}{12}$. **1,5pt**

EXERCICE 2 : 7 Points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty;6[$ par : $f(x) = \dfrac{2x-16}{x-6}$.

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]-\infty;6[$. **1,5pt**
2. Donner l'image de l'intervalle $]-\infty;6[$ par f.
3. On définit la suite U par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 16}{U_n - 6}$.

a) Calculer U_1 et U_2. **0,5pt**

b) Montrer que la suite U est strictement croissante. **1pt**

c) Montrer que la suite U est majorée par 4. Que peut-on dire de la suite U ? **1,5pt**

4. Soit la suite V définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 4}$.

a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on précisera la raison. **1pt**

b) Exprimer pour tout entier naturel n, V_n puis U_n en fonction de n. **1pt**

c) Calculer alors la limite de la suite U. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 6,5 Points

A) Soit la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = 1 + i$ et $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}iz_n$.
On pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = arg(z_n)$.

1. Calculer z_1, r_0 et θ_0. **1,5pt**
2. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. **0,75pt**
3. Montrer que (θ_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. **0,75pt**
4. Exprimer r_n en fonction de n, puis calculer la somme $S_{10} = r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_9$. **1,5pt**

B) On se propose de calculer la somme $\text{T} = 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3 + \cdots + 19^3$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **1pt**
2. En déduire le calcul de la somme T. **1pt**

Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél: 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire **2010-2011**
Classe: **T^{le}D** Coef: **4** Durée : **2 h**
Prof: M. Loumsia Yonga Albert

SÉQUENCE N°3 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / JANVIER 2011

Ce sujet comporte deux pages. La page 2 comportant le Q.C.M. ainsi que le repère où tracer la courbe pour l'exercice 1 est à rendre avec votre copie, n'oubliez pas d'y apposer votre nom.

Exercice n° 1 (*7 points*)

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ fourni en page 3.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Dresser le tableau de variations de f.

5. Déterminer l'équation cartésienne réduite de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A de la courbe d'abscisse 0.

6. Dans cette question, on étudie les positions relatives de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (T). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\varphi(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

a. Démontrer que pour tout réel x, on a: $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)^2$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\varphi(0)$

c. Conclure en ce qui concerne les positions relatives de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (T).

7. Tracer la tangente (T), la courbe $(\mathcal{C})$, et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ fourni en page 2.

8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ On note $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a. Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la courbe $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C})$?

b. Démontrer que g est impaire. Quelle propriété géométrique peut on en déduire concernant la courbe $(\mathcal{C}_g)$?

c. Quel rôle joue le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ pour la courbe $(\mathcal{C})$? Expliquer.

Exercice n° 2 (*6 points*)

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 7 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}\,, \\ u_{n+1} &= u_n + 2n - 5. \end{cases}$$

1. Vérifier les égalités $u_1 = 2$ et $u_2 = -1$.

2. Justifier que la suite u est monotone à partir d'un certain rang.

3. Démontrer par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = n^2 - 6n + 7.$$

Noms et Prénom:

Exercice n° 3 — Q.C.M. (*7 points*)

Ceci est un Q.C.M. Chaque question vaut 1 point, il peut y avoir plusieurs réponses correctes à chaque question. Vous devez cocher toutes les réponses valables (et elles seules) pour obtenir le maximum de points.

1. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1+\mathrm{i}|=2$ est:

- ☐ un cercle de centre Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$.
- ☐ un cercle de rayon $\sqrt{2}$.
- ☐ un cercle de centre Ω d'affixe $1-\mathrm{i}$.
- ☐ un cercle de rayon 2.

2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z)\times\mathrm{Im}(z)=0$ est:

- ☐ la réunion de deux droites.
- ☐ l'origine du repère.
- ☐ une demie droite.
- ☐ l'axe des réels.

3. L'équation $z^2+z\bar{z}=0$ a pour nombre de solutions dans $\mathbb{C}$:

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ une infinité

4. Cocher les nombres complexes solutions de l'équation: $z^2+\mathrm{i}\bar{z}=0$

- ☐ $1+\mathrm{i}$
- ☐ i
- ☐ $-\mathrm{i}$
- ☐ 0

5. Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose $Q(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^x)^2}$. Alors on a aussi:

- ☐ $Q(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- ☐ $Q(x)=\mathrm{e}^{2x}$
- ☐ $Q(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{4x}}$
- ☐ $Q(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x}$

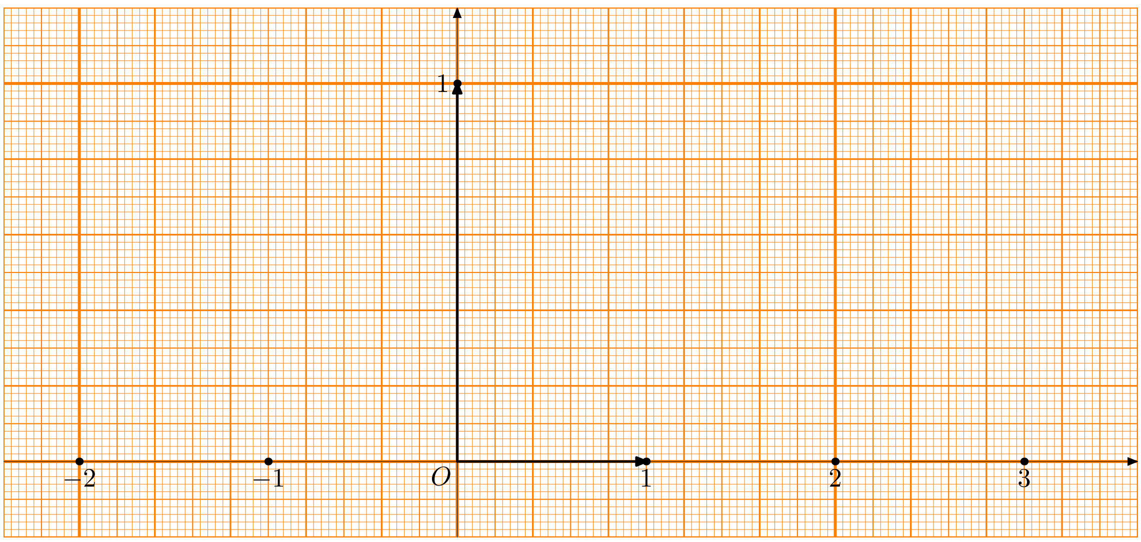
6. On considère pour x dans $\mathbb{R}$, l'équation (E): $\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^x=0$

- ☐ (E) n'a pas de solution.
- ☐ $x=1$ est solution de (E).
- ☐ (E) a deux solutions.
- ☐ (E) a les mêmes solutions que: $x^2=x$.

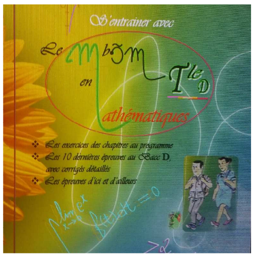
7. Une primitive sur $]-\infty;2[$ de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3}{2-x}$ est:

- ☐ $F(x)=1-\ln(2-x)$;
- ☐ $F(x)=3\ln|2-x|$;
- ☐ $F(x)=\frac{1}{3}\ln|2-x|+c$;
- ☐ $F(x)=1-3\ln(2-x)$.

Repère pour l'exercice 1.



Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
Tel : 695 95 81 81



Année Scolaire 2021-2022
Classe : Tle D
Durée : 3h

<u>Partie A :</u> Evaluation des ressources

<u>EXERCICE 1:</u> / 7,5pts

I-1-a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-4z+8=0$. Ecrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. **1,5pt**

b) Placer les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative, dans le repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ du plan complexe. **0,5pt**

c) Quelle est la nature du triangle OAB ? **0,5pt**

2-Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application f. **1pt**

b) Déterminer sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique l'affixe du point A', image de A par f. **0,75pt**

c)En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$ **0,75pt**

II-1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+2i)(z^2-(5+i)z+8+4i)=0$. **1pt**

2. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2+2i, 3-i\ et\ -2i$ et s la similitude de centre B qui transforme I en C.

a) Donner l'écriture complexe de s, déduire le rapport et l'angle de s. **1pt**

b) Soit (Δ) la droite d'équation y=x, déterminer l'image de (Δ) par s. **0,5pt**

<u>EXERCICE 2:</u> / 8pts

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$ (cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes du domaine. **0,75pt**
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et dresser le tableau de variations de f . **1,25pt**
3. Calculer $f'(x)-2$ et en déduire la position de la courbe (cf) par rapport à son asymptote horizontale. **0,5pt**
4. Donner les équations des tangentes à la courbe (cf) aux points d'abscisses respectifs 0 et 2. **1pt**
5. Tracer les tangentes précédentes et la courbe (cf). **2pts**
6. Montrer que la restriction g de f à [3;+∞[est une bijection de cet intervalle sur un intervalle J que l'on déterminera. **0,5pt**
7. Tracer dans le même repère la courbe représentative de $(cg{-}1)$. **0,5pt**
8. On considère la suite (u_n) définie par u_0 réel donné et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Pour $u_0=2$, montrer que la suite (u_n) est constante. **0,25pt**
b) On donne u_0 tel que $2 \leq u_0 \leq 3$. Montrer que pour tout n, on a $2 \leq u_n \leq 3$ **0,5pt**
c) Montrer que la suite(u_n) est croissante. **0,5pt**
d) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n)? **0,25pt**

<u>Partie B :</u> Evaluation des compétences

Situation :

La fonction de profit du Groupe Educatif en millions de Fcfa en fonction du nombre d'élèves réguliers d'une année scolaire est donnée par la fonction $f(t)=3t^3-t-1$ où t représente le nombre d'élèves en millier. Le complexe scolaire reçoit entre 0 et 3 mille élèves chaque année scolaire. Ayant constaté lors d'une année et ce pour un certain nombre d'élèves réguliers que le groupe a réalisé une perte, le fondateur voudrait compte tenu des charges financières du groupe, savoir s'il existe un certain nombre d'élèves réguliers qui peut rapporter un gain au Groupe.

- ***N.B*** *:un élève est dit régulier s'il a soldé entièrement soldé sa pension au cours de l'année.*
- *En économie, le profit est une quantité algébrique ; elle peut être négative, positive ou nulle.*

Tâches :

1) Déterminer s'il existe un certain nombre d'élèves réguliers qui peut entrainer une perte de 1 million de Fcfa. **1,5pt**

2) Déterminer s'il existe une valeur approchée du nombre d'élèves réguliers qui peut rapporter un profit nul . **1,5pt**

3) Déterminer s'il existe une valeur approchée du nombre d'élèves réguliers qui peut rapporter un gain de 5 millions de Fcfa. **1,5pt**

Présentation : 0.5points

Classe : Tle D — Année Scolaire : 2020–2021
EVALUATION N°III — Coef : 4 Durée : 4H00

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 Points)

EXERCICE 1 : 2 points

1) Montrer que pour tout réels a et b tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, on a :
$\frac{b-a}{cos^2 a} \leq \tan(b) - \tan(a) \leq \frac{b-a}{cos^2 b}$ **1pt**
2) Calculer chacune des limites suivantes $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2x-\pi}$; $\lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{2x^2+3x-4}$ **1pt**

EXERCICE 2 : 5points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé complexe (O, I, J). Unité d'axe 1cm. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + (-7+i)z + 12 - 16i = 0$

1) Calculer (E) $(5+5i)^2$ **0.25pt**
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1pt**
3) Soient les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 - 3i$ et $z_B = 6 + 2i$
   a) Calculer $\frac{z_O - z_B}{z_O - z_A}$ et en déduire la nature du triangle OAB **0.75pt**
   b) Calculer l'affixe de I milieu du segment $[AB]$ **0.5pt**
   c) Donner l'expression analytique de la similitude directe de centre de O qui transforme A en B **1pt**
4) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|z - 3{,}5 + 0{,}5i| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
   a) Dire si chacune des propositions suivantes est vraie. **0.75pt**
   i) $O \epsilon (\Gamma)$ ii) $A \epsilon (\Gamma)$ iii) $B \epsilon (\Gamma)$
   b) Donner une équation cartésienne de (Γ) et construire (Γ) **0.75pt**

EXERCICE 3 :_ 8 points

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$ (c_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Donner le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes du domaine. **0.75pt**
2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et dresser le tableau de variations de f . **1.25pt**
3) Calculer $f(x) - 2$ et en déduire la position de la courbe (c_f) par rapport à son asymptote horizontale. **0.5pt**

4) Donner les équations des tangentes à la courbe (c_f) aux points d'abscisses respectifs 0 et 2. **1pt**

5) Tracer les tangentes précédentes et la courbe (c_f). **2pt**

6) Montrer que la restriction g de f à $[3; +\infty[$ est une bijection de cet intervalle sur un intervalle J que l'on déterminera. **0.5pt**

7) Tracer dans le même repère la courbe représentative de $(c_{g^{-1}})$. **0.5pt**

8) On considère la suite (u_n) définie par u_o réel donné et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Pour $u_o = 2$ montrer que la suite (un) est constante. **0.25pt**

b) On donne u_o tel que $2 \leq u_o \leq 3$ Montrer que pour tout n, on a $2 \leq u_n \leq 3$ **0.5pt**

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante. **0.5pt**

d) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n)? **0.25pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4.5 Points)

Situation :

La fonction de profit du Groupe Educatif Sapins Colbex en millions de Fcfa en fonction du nombre d'élèves réguliers d'une année scolaire est donnée par la fonction $f(t) = 3t^3 - t - 1$ où t représente le nombre d'élèves en millier. Le complexe scolaire reçoit entre 0 et 3 mille élèves chaque année scolaire. Ayant constaté lors d'une année et ce pour un certain nombre d'élèves réguliers que le groupe a réalisé une perte, le fondateur voudrait compte tenu des charges financières du groupe, savoir s'il existe un certain nombre d'élèves réguliers qui peut rapporter un gain au Groupe.

- N.B **un élève est dit régulier s'il a soldé entièrement soldé sa pension au cours de l'année.**
- **En économie, le profit est une quantité algébrique ; elle peut être négative, positive ou nulle**

Tâches :

1) Déterminer s'il existe un certain nombre d'élèves réguliers qui peut entrainer une perte de 1 million de Fcfa. **1,5pt**

2) Déterminer s'il existe une valeur approchée du nombre d'élèves réguliers qui peut rapporter un profit nul . **1,5pt**

3) Déterminer s'il existe une valeur approchée du nombre d'élèves réguliers qui peut rapporter un gain de 5 millions de Fcfa. **1,5pt**

Présentation : 0.5points

Etablissement	Année Scolaire	Séquence	Epreuve	Séquence	Classe	Coef	Durée
LY. BI. BA. RU	2018/2019	3	MATHS	3	TleD2+ Tle D1	4	3H

Exercice 1: 6pts

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$

On considère le polynôme P défini par :$P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$

1) Montrer que P admet une racine imaginaire pure. **0,75pt**

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $\mathrm{P}(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$ **0,75pt**

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$ **0,75pt**

4) Soient trois points du plan A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 3 + i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 2 - 2i$.

4-a) Placer les points A, B et C sachant que le plan est rapporté au repère orthonormé $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. **0,75pt**

4-b) Calculer : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et les distances AB et AC **1pt**

4-c) En déduire la nature exacte du triangle ABC. **0,5pt**

5) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme et placer D sur la figure précédente. **0,75pt**

6) On note R la rotation de centre A telle que $R(B) = C$.Déterminer l'angle de R et donner l'écriture complexe de R. **0,75pt**

Exercice : 3 points

1. Résoudre dans R^2 le système d'équation suivant: $\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) - ln2 = 0 \\ \frac{e^x}{e^5} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$

2. Résoudre dans R l'équation suivante: ln(x+2) + ln (x-1) = ln(x+7).

3. Résoudre dans R l'inéquation suivante: $(\ln(x+1))^2$ - ln (x+1) – 6 ≥ 0.

Problème 2 : 11points

On considère la fonction numérique f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & si\ x \geq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ; I\ ; J)$. Unité graphique 5cm)

I) Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$.

1) Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition. **0,5pt**

2) Démontrer que pour tout $x > 0, g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$. **0,75pt**

3) Etudier le signe de $g'(x)$, donner son sens de variation et dresser son tableau de variation.

4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0{,}5\ ;\ 0{,}6[$. **1pt**

5) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,75pt**

II) Etude de la fonction *f*

1-a) Démontrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$. **0,75pt**

1-b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. **0,5pt**

2- On pose $k(x) = xf(x)$, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **0,5pt**

3-a) Démontrer que f est continue à droite de 0. (On pourra écrire $x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x\ln(x^2 + 1) - 2x\ln x$.) **0,75pt**

3-b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenue. **1pt**

4-a) Prouver que pour tout $x \in [0{,}5\ ;\ \alpha], 0 \leq f'(x) \leq f'(0{,}5)$. **1pt**

4-b) En déduire que pour tout $x \in [0{,}5\ ;\ \alpha]$: $0 \leq f(\alpha) - f(0{,}5) \leq \frac{1}{10} f'(0{,}5)$. **1pt**

4-c) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près **1pt**

5-a) Dresser le tableau de variation de f. **0,5pt**

5-b) Tracer la courbe (C_f). **1pt**

BONNE ET HEUREUSE ANNEE 2019.

Examinateur : M. TCHOUMO

Ministère des Enseignements Secondaires
Délégation Régionale du Centre
Lycée Bilingue de BOKITO
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2021/2022
Durée : 2H Coef : 04
Classe : T^{le}D
Examinateur : TCHIO Serge

CONTROLE N°3 DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte deux parties obligatoires et est notée sur 20 points

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 points

EXERCICE 1 : [5.5 points]

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *ensemble des nombres complexes, l'équation* $z^2 - 2z + 2 = 0$ **0,75 pt**

2. *En déduire dans* $\mathbb{C}$ *la résolution de* $(-iz + 3 + 3i)^2 - 2(-iz + 3 + 3i) + 2 = 0$. **0,75 pt**

3. *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{u}, \vec{v})$, *on considère les points* A, B *et* C *d'affixes respectives* $1 + i$, $1 - i$ *et* $2 - 2i$.

a) *Démontrer que les points* A, B *et* C *sont sur le cercle de centre* I *d'affixe* 3 *et de rayon* $\sqrt{5}$ **0,75 pt**

b) *Calculer le rapport* $\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}$ *et en déduire la nature exacte du triangle* AIC. **0,75 pt**

c) *Le point* E *est l'image du point* O *par la translation de vecteur* $2\overrightarrow{IC}$ *et le point* D *est l'image du point* E *par la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer les affixes des points E *et* D. **1 pt**

d) *Donner une écriture complexe de la similitude directe de centre* O *qui transforme le point* A *en le point* C. *On précisera son rapport et son angle.* **1 pt**

EXERCICE 2 : [5.5 points]

Soit f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln x$

1. *Dresser le tableau de variation de* f **1 pt**
2. **a.** *Montrer que la courbe de* f *coupe l'axe des abscisses en un unique point* α. **0,5 pt**
   b. *Donner un encadrement de* α *d'amplitude* 10^{-2} **0,5 pt**
3. *Soit* $I = [3, 4]$ *et* g *la fonction définie sur* I *par* $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$
   a. *Montrer que* α *est l'unique solution de l'équation* $g(x) = x$ **0,5 pt**
   b. *Montrer que l'intervalle* $g(I)$ *est inclus dans* I **0,5 pt**
   c. *Démontrer que pour tout* $x \in I$, $|g(x)| \leq \frac{1}{12}$ **0,5 pt**
4. *On définit la suite* (u_n) *par* $u_0 = 3$ *et pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = g(u_n)$
   a. *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $u_n \in I$ **0,5 pt**
   b. *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|u_n - \alpha|$ *puis que* $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$ **1 pt**
   c. *Déduire que la suite* (u_n) *est convergente et donner une valeur approchée de sa limite à* 10^{-3} *près.* **0,5 pt**

EXERCICE 3 : [4 points]

I. *Choisir la lettre suivi du chiffre correspondant au résultat juste. Pas de justification.*

1. *On donne* $f(x) = (2x - 1)e^x + 1$. *Les valeurs de* a *et* b *pour que* F *telle que* $F(x) = (ax + b)e^x + x$ *soit une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$ *sont :*

a. $a = 2$ *et* $b = 1$ **b.** $a = 2$ *et* $b = -3$ **c.** $a = 2$ *et* $b = -1$ **0,75 pt**

2. *Si* $G_1(32{,}5; 13)$ *et* $G_2(20{,}5; 7)$ *sont le points moyens des sous séries issues d'une série, alors une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer est :*

a. $y = \frac{1}{2}x + 10$ **b.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{205}{4}$ **c.** $y = 0{,}25x + 10{,}25$ **0,5 pt**

3. (w_n) *est une suite géométrique à termes positifs telle que* $\begin{cases} w_1 \times w_2 \times w_3 = 64 \\ w_2 \times w_0 = 64 \end{cases}$ *La valeur de* w_0 *est :* **a.** *8* **b.** *16* **c.** *12* **0,75 pt**

4. *La valeur exacte du nombre* $A = \ln(9e^3) + \ln\left(\frac{1}{3e}\right)$ *est :*

a. $A = 2 + \ln 3$ **b.** $A = 2 + 3\ln 3$ **c.** $A = 2 - \ln 3$ **0,5 pt**

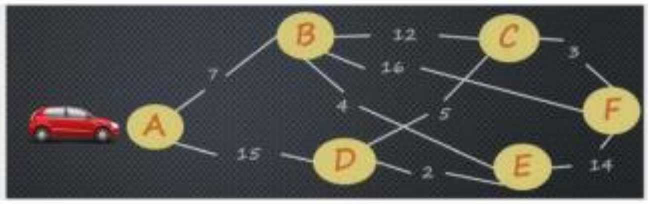
II. *On considère la fonction* f *définie sur* $I =]1, +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{x^2}{(2x-1)(x-1)^2}$

1. *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que pour tout* $x \in I$, $f(x) = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$ **0,75 pt**

2. *En déduire la primitive de* f *sur* I *qui prend la valeur* -1 *en* 2. **0,75 pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 5 points

*Monsieur **AWONO** vient de s'acquérir un terrain du côté de **FOTO** dans la ville de **DSCHANG**. Ce terrain a la forme d'un carré dont les sommets sont solutions dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes de l'équation* $z^4 = -4$. *L'unité de longueur étant de 100m. Il souhaite protéger ce terrain en l'entourant avec deux rangées de fil barbelé dont le mètre coûte 1200 FCFA.*



*Pour se rendre dans son terrain, Monsieur **AWONO** emprunte son véhicule et doit passer par chacune des pistes A, B, C, D, E et F. (voir figure ci-contre où les chiffres y figurant représentent le nombre de km séparant deux pistes). Il souhaite par conséquent dépenser le moins de carburant possible car dit-il sa voiture consomme beaucoup : « 1 litre de carburant pour 5km » Le litre de carburant à la station **TOTAL** est vendu à 650 FCFA.*

*Par ailleurs Monsieur **AWONO** est enseignant vacataire dans un établissement privé. Le tableau suivant donne l'évolution du montant du taux horaire des enseignants dans cet établissement.*

Année	*2015-2016*	*2016-2017*	*2017-2018*	*2018-2019*	*2019-2020*
Rang de l'année x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Taux horaire y_i	*2000*	*2200*	*2500*	*2700*	*2950*

Tâches :

1. *Estimer la dépense à faire par M. **AWONO** pour clôturer son terrain* **1,5 pt**
2. *Estimer la dépense à faire par M. **AWONO** pour se rendre dans son terrain* **1,5 pt**
3. *Si cette tendance se poursuit, quel serait le taux horaire de M. **AWONO** cette année dans cet établissement ?* **1,5 pt**

Présentation 0.5 pt

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

Exercice 1 (4,75 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : **(2,25pts)**
   $e^{(2x+1)}+3e^{(x+1)}-4e=0$; $ln(3x+2)+ln(x+4)>ln(4x-3)$; $(lnx)^2-2lnx<3$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2ln(xy)=58 \\ ln(x^{36})ln(y^4)=14400 \end{cases}$ **(0,75pt)**
3. Déterminer les primitives de la fonction suivante sur l'intervalle I .
   $k(x)=\frac{(x+1)}{(x^2+2x+5)}+x$, $I=\mathbb{R}$. **(0,5pt)**
4. Soit l la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1/2\}$ par $l(x)=\frac{(3x+1)}{(2x+1)^2}$.
   a) Déterminer les réels a et b tels que $l(x)=\frac{a}{(2x+1)}+\frac{b}{(2x+1)^2}$. **(0,5pt)**
   b) En déduire la primitive de l sur $]-1/2;+\infty[$ qui prend la valeur 1 en 0. **(0,75pt)**

Exercice 2 (04,25 points)

1. On considère h la transformation du plan qui à tout $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x'=x-y\sqrt{3}+\frac{3}{2} \\ y'=x\sqrt{3}+y+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
   Soient z et z' les affixes respectifs des points M et M'.
   a) Écrire z' en fonction de z. **(0,75pt)**
   b)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h **(1pt)**
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, on définit la suite (z_n) par : $\begin{cases} z_0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{n+1}=(1+i\sqrt{3})z_n \end{cases}$
   Soit M_n le point d'affixe z_n, on pose $r_n=|z_n|$ et $\beta_n=Arg(z_n)$ ainsi on a $z_n=r_ne^{i\beta_n}$
   a) Écrire z_0 et z_1 sous forme exponentielle. **(1pt)**
   b) Montrer que la suite (r_n) est une suite géométrique et que la suite (β_n) est arithmétique. (On pourra utiliser la forme exponentielle de z_{n+1}) . **(1pt)**
   c) Exprimer r_n et β_n en fonction de n. **(0,5pt)**

Problème (11 points)

Le problème comporte trois parties A, B et C. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J), (unité 1cm). On désigne par I l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie A (04 points)

Soit g une fonction définie sur I par $g(x) = x^2 - 2(1 - lnx)$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$. **(0,5pt)**
2. **a)** Justifier que g est continue et dérivable sur I et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$. **(0,75pt)**
   b) Déduire les variations de g et dresser son tableau de variation. **(0,75pt)**
3. **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1,2; 1,3[$. **(0,75pt)**
   b) En déduire le signe de g sur I. **(0,75pt)**
   c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près. **(0,5pt)**

Partie B (05,75 points)

On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = x - 2 - \frac{2lnx}{x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. **a)** Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale dont on précisera une équation. **(1pt)**
   b) Montrer que f est continue et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. **(1pt)**
   c) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5pt)**
2. **a)** Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique a la courbe $(\mathcal{C})$. **(0,5pt)**
   b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$. **(0,5pt)**
3. **a)**Déterminer les coordonnées du point B de $(\mathcal{C})$ où la tangente $(\mathcal{T})$ est parallèle à la droite $(\mathcal{D})$. **(0,75pt)**
   b)Écrit une équation de $(\mathcal{T})$ **(0,5pt)**
4. Construire $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes. **(1pt)**

NB : Utiliser la valeur approchée de α pour construire $(\mathcal{C})$.

Partie C (01,25 point)

On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = \frac{1}{2}[x^2 - 4x - 2(lnx)^2]$.

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in I$. **(0,5pt)**
2. En déduire la primitive F de f sur I qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 1. **(0,75pt)**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES.

PARTIE A: EVALUATION DES RESSOURCES : / (15,5 points)

EXERCICE 1: / (05 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans ₵, on donne l'équation(E): $z^3 - (4 + i\sqrt{3})z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})z - 3i\sqrt{3} = 0$.

1- Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure γ et deux solutions réelles α et β $(\alpha < \beta)$.**1,5pt**

2- Soit h une application de ₵ dans ₵ telle que pour tout complexe z, $h(z) = az + b$ où a et b nombres complexes. Déterminer les réels a et b de telle sorte que $h(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$ et $h(1) = 3$. **1pt**

3- Soit g la transformation du plan complexe qui, à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **0,5pt**

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g. **1pt**

c) Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées de x et y de M. **0,5pt**

d) Déterminer l'image (D') par g de la droite (D) d'équation $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$. **0,5pt**

EXERCICE 2: / (03,5 points)

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses te sont proposées parmi lesquelles une seule est juste. Recopier le numéro de la question et la réponse juste correspondante.

1- L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \ln(2x^3 - 3x)$ est :
a) $D_f = \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$; **b)** $D_f =]-\infty; 0[\cup\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$; **c)** $D_f = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$; **d)** $D_f = \left]0; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. **0,5pt**

2- La résolution dans IR² du système (s) : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln(xy) = ln10 \end{cases}$ a pour ensemble solution :
a) $S = \{(5;\ 2)\}$; **b)** $S = \{(2;5), (5;2)\}$; **c)** $S = \{(-2;-5), (-5;-2)\}$; **d)** $S = \{(-2;-5)\}$ **0,5pt**

3- L'ensemble solution dans IR de l'équation $ln(x + 2) = 1 + \ln(x - 3)$ est :
a) $S = \emptyset$; **b)** $S = \left\{\frac{3e+2}{e-1}\right\}$; **c)** $S = \left\{\frac{-3e-2}{e+1}\right\}$; **d)** $S = \left\{\frac{3e+2}{e+1}\right\}$. **0,5pt**

4- L'écriture simplifiée de l'expression $\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ est :
a) $2\sqrt{3}$; **b)** $ln1$; **c)** $-ln2$; **d)** $ln2$. **0,5pt**

5- L'ensemble solution dans IR de l'inéquation $ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0$ est :
a) $S = \left]-\infty; \frac{-4}{3}\right[\cup \left[\frac{-1}{5}; +\infty\right[$; **b)** $S = \left]-\infty; \frac{-4}{3}\right] \cup \left]\frac{-1}{5}; +\infty\right[$; **c)** $\left]-\infty; \frac{-1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ **d)** $S = \left[\frac{-1}{5}; \frac{3}{2}\right]$ **0,5pt**

6- La primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2\sqrt{x^3 + 1}$ est la fonction :
a) $F(x) = \frac{2}{3}(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}$;**b)** $F(x) = \frac{3}{2}(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}$; **c)** $F(x) = \frac{2}{3}(x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}$; **d)** aucune réponse . **0,5pt**

7- La limite de $i(x) = x - 1 - \ln(2x - 1)$ en $+\infty$ est: **a)** $+\infty$; **b)** $-\infty$; **c)** 0 ;**d)** aucune réponse. **0,5pt**

EXERCICE 3: / (04 points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $g(x) = -x^3 + 3x + 4$

1- Dresser le tableau de variation la fonction g. **0,75pt**

2- Déterminer les images des intervalles $]-\infty; -1[; [-3; 2[; [1; +\infty[$. **0,75pt**

3- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α, vérifiant $2{,}1 \leq \alpha \leq 2{,}2$. . **1pt**

4- En déduire le signe de $g(x)$ sur IR. **0,5pt**

5- On considère la restriction h de g sur l'intervalle$[1; +\infty[$.

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} de I vers un intervalle vers un intervalle J à préciser. **0,5pt**

b) Dresser le tableau de variation la fonction h^{-1}. **0,5pt**

EXERCICE 4: / (03 points)

Soit la fonction f définie$f(x) = \sqrt{x + \frac{3}{4}}$ et la suite u_n définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + \frac{3}{4}} \end{cases}$, $\forall n \in \mathrm{IN}$.

1- Montrer que pour tout réel x de$\left[0; \frac{3}{2}\right]$, $\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. **0,5pt**

2- En utilisant la conséquence de l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout réel x de$\left[0; \frac{3}{2}\right]$, $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|x - \frac{3}{2}\right|$. **0,5pt**

3- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : **1pt**

a) $u_n \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$; **b)** $\left|u_{n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|u_n - \frac{3}{2}\right|$;

b) En déduire que$\forall n \in \mathrm{IN}$ $\left|u_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$. **0,5pt**

4- Montrer que la suite u_n converge vers $\frac{3}{2}$. **0,5pt**

PARTIE B: EVALUATION DES COMPETENCES : / (04,5 points)

PROBLEME INTEGRATION :

Une élite dans le département du MAYO-BANYO organise dans le but d'encourager les couples mariés officiellement, un jeu concours en mathématiques qui se déroule de la manière suivante :

On définit sur l'ensemble ¢ la propriété **(P_1): Pour tout polynôme** P **et tout nombre complexe** z_0**, si** z_0 **est une racine de** P**, alors** $\overline{z_0}$ **et** $\frac{1}{z_0}$ **sont aussi des racines de** P**.**

Etape 1: Le conjoint imagine un polynôme P de degré supérieur à 3 à coefficients complexes devant automatiquement vérifié la propriété **(P_1) ;**

Etape 2: La conjointe imagine une racine z_0 du polynôme choisi par son époux;

Etape 3: Et l'époux déduit toutes les autres racines de son polynôme.

La réussite à **l'étape 1** fait gagner au couple 3000 FCFA; la réussite à **l'étape 2** fait gagner au couple 5000*FCFA* et la réussite à **l'étape 3** fait gagner 10000 FCFA.

Règles du jeu: Pour passer à l'étape supérieure, il faut automatiquement réussir l'étape précédente; sinon le jeu s'arrête. La participation à ce jeu est gratuite.

Monsieur et Madame TAKAM se présentent à ce jeu. **Monsieur TAKAM** choisit un polynôme P défini par: $p(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$ et **Madame TAKAM** choisi $z_0 = 1 + i$ comme racine de P et enfin **Monsieur TAKAM** propose: $1 - i$; $\frac{1}{2}(1 - i)$; $\frac{1}{2}(1 + 2i)$, comme autres racines de P.

Tâches:

1- Montrer que le couple **TAKAM** passe **l'étape 1.** **1,5pt**

2- . Montrer que le couple **TAKAM** passe **l'étape 2.** **1,5pt**

3- Montrer que le couple **TAKAM** ne peut gagner plus de 8000FCFA à ce jeu. **1,5pt**

LYCEE D'OKOLA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE 2020/2021

CLASSE	EVALUATION DE LA 3$^{\text{ème}}$ SEQUENCE	DUREE 4HEURES
Tle D		Coefficient 4

Exercice 1 6.5pts

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$.

a- Vérifier que $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$. **0.5pt**

b- Donner les variations de f et dresser son tableau de variation. **1pt**

2. On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

a- Démontrer que pour tout entier naturel $n, 0 \leq u_n < 1$. 0.5**pt**

b- Donner le sens de variation de (u_n). **0.5pt**

3. On pose pour $n \geq 1$, $X_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n$.

Montrer par récurrence que $X_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$. **1pt**

4. (v_n) est la suite de terme général $v_n = \ln u_n$.

a- Donner la condition d'existence de (v_n). **0.5pt**

b- Donner le sens de variation de (v_n). **0.5pt**

c- Donner la limite de (v_n). **0.5pt**

5. Soit $Y_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$.

a- Exprimer Y_n en fonction de n. **1pt**

b- Donner la limite de (Y_n). **0.5pt**

Exercice 2 4pts

En 2020 la répartition d'élèves ayant passé le Baccalauréat général dans la Lékié est :
17% d'élèves dans les séries A, 31% d'élèves dans la série C et 52% d'élèves dans la série D.
Par ailleurs, les taux de réussite dans ces séries sont :
90,6% en A, 91,2% en C et 91,8% en D.
On tire au hasard un élève ayant passé le Bac général en 2020.

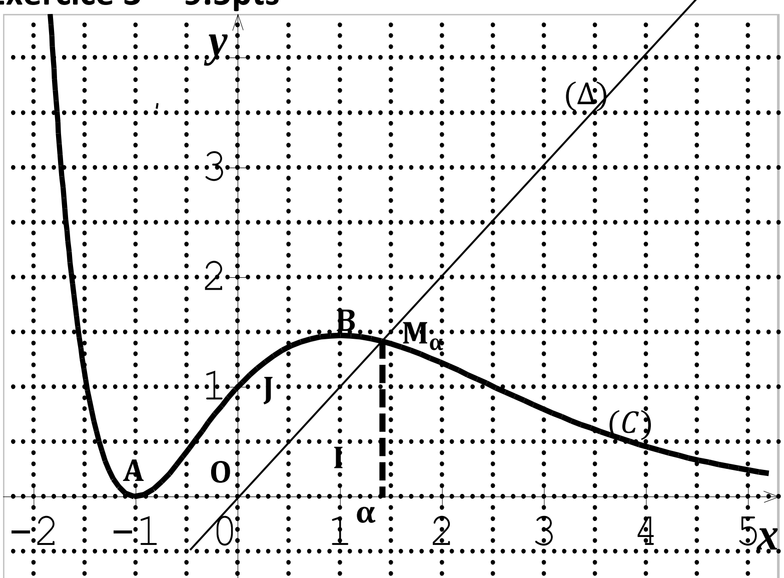
1. Dresser un arbre pondéré représentant la situation. **1.5pt**

2. Quelle est la probabilité que la personne tirée au hasard ait obtenu le Bac ? **1pt**

3. Donner la probabilité de tirer un élève de la série D sachant qu'il n'a pas obtenu le Bac. **1.5pt**

Exercice 3 9.5pts

La courbe (C), reproduite ci-contre, est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
(Δ) est la représentation graphique de la droite d'équation $y = x$.
Le point M_α d'abscisse α étant l'intersection de (C) et (Δ),
On se propose d'en savoir davantage.



1. **Etude graphique de f**
   a- Donner l'équation de la tangente (T) au point $\mathbf{B}$ d'abscisse 1. **0.5pt**
   b- Donner les comportements de la courbe (C)à l'infini en justifiant votre réponse. **1pt**
   c- Donner les variations de f et dresser son tableau de variation. **1pt**
2. **Etude de la fonction réciproque**
   Soit g la restriction de f dans l'intervalle $[1,+\infty[$.
   a- Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers un intervalle que l'on déterminera. **0.5pt**
   b- En déduire que g admet une réciproque g^{-1} . donner son le sens de variation. **0.5pt**
   c- Tracer les courbes $\left(C_g\right)$ et $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans un même repère. **0.5pt**
   d- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \epsilon \left[1, \frac{3}{2}\right]$. **1pt**
   e- Montrer que f est décroissante sur $[1,+\infty[$. **0.5pt**
3. **Détermination de la valeur approchée de α**
   On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   a- Montrer par récurrence que pour tout $n \epsilon \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$. **0.5pt**
   b- Montrer que pour tout $x \epsilon \left[1, \frac{3}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **1pt**
   c- Montrer que pour tout $n \epsilon \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. **0.5pt**
   d- Montrer que pour tout $n \epsilon \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **1pt**
   e- En déduire la limite de (u_n). **0.5pt**
   f- En déduire une approximation décimale de α à 10^{-3} près. **0.5pt**

République Du Cameroun-MINESEC | **Examen:** *Devoir surveillé* $N^{\circ}4$
Lycée Bilingue De Babadjou | **Épreuve:** *Mathématiques*
Année Scolaire: 2021/2022 | **Session de:** *Janvier* 2022
Classe: T^{le} D | **Durée:** 04 *heures* - **Coeff:** 04
Examinateur: *M. TCHOFFO JEAN* | **Évaluation** 3^{me} **Séquence**

La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entrerons pour une part importantes dans l'appréciation des copies.

ÉVALUATION DES RESSOURCES: [15.5 *pts*

EXERCICE 1. [4.5 *points*]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les points A, B et I d'affixe respectives: $z_A = 3 + 2i$; $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

1. *a*) Placer ces points dans le repère. [0.25 *pt*]
   b) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. [0.5 *pt*]
   c) Que peut-on déduire sur la nature du triangle BIA? [0.5 *pt*]
2. Calculer l'affixe du point C image du point I par l'homothétie h, de centre A et de rapport 2. [0.5 *pt*]
3. Soit D le point barycentre du système $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.
   a) Calculer l'affixe z_D du point D. [0.5 *pt*]
   b) Montrer que $ABCD$ est un carré. [0.5 *pt*]
4. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que:
   $\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \|$. [0.5 *pt*]
5. Soit (Γ_1) l'ensemble des points M du plan tels que $\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 4\sqrt{5}$.
   a) Montrer que $B \in (\Gamma_2)$ [0.25 *pt*]
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2). [0.5 *pt*]
   c) Déterminer l'ensemble (L) image de l'ensemble (Γ_2) par l'homothétie h. [0.5 *pt*]

EXERCICE 2. [5.5 *points*]

$I-$ Soit f la fonction numérique définie sur $I = \left]\sqrt{3}; +\infty\right[$ par: $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + x\right)$.

1. *a*) Montrer que f est strictement croissante sur I. [0.5 *pt*]
   b) En déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq \sqrt{3}$. [0.5 *pt*]
2. *a*) Montrer que pour tout $x \in I$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. [0.5 *pt*]
   b) En déduire que pour tout $x \in I$, $0 \leq f(x) - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3}\right)$. [0.5 *pt*]
3. On considère la suite numérique (ν_n) définie par: $\begin{cases} \nu_0 = 4 \\ \nu_{n+1} = f(\nu_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n \geq \sqrt{3}$ [0.5 *pt*]
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \nu_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2}\left(\nu_n - \sqrt{3}\right)$. [0.5 *pt*]
   c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \nu_n - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2^n}\left(4 - \sqrt{3}\right)$. [0.5 *pt*]

d) En déduire que la suite (ν_n) est convergente. [0.5 *pt*]

$II-$ Soit l la fonction définie par $l(x) = x^3 + x^2 + x - 2$.

1. Étudier les variations de la fonction l. [0.5 *pt*]
2. Montrer que l'équation $l(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]0;1[$. [0.5 *pt*]
3. Donner un encadrement de β de longueur 0.25 en utilisant la méthode de DICHOTOMIE. [0.5 *pt*]

EXERCICE 3. [5.5 *points*]

Soit la fonction g définie par: $g(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$. On note $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g et étudier sa parité. [1 *pt*]
2. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction g. [0.5 *pt*]
3. La fonction g admet-elle un prolongement par continuité en 0? Justifier votre réponse. [0.5 *pt*]
4. On désigne par h la restriction de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
   a) Montrer que la droite $(\triangle)$: $y = x$ est une asymptote à la courbe de la fonction h. [0.5 *pt*]
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-1}{x}$ et préciser l'allure de la courbe de la fonction h au voisinage du point $(0;1)$. [1 *pt*]
5. Montrer que la fonction h est définie par: $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ et dresser le tableau de variation de la fonction h. [1 *pt*]
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$. [1 *pt*]

ÉVALUATION DES COMPÉTENCES: [4.5*pts*]

Les experts chinois en énergie solaire qui ont installé les lampadaires solaires dans le chef-lieu départemental d'une des régions du Cameroun ont révélé au Maire de ce chef-lieu que la quantité d'énergie solaire en kWh absorbée par ces lampadaires pendant la journée en fonction du temps t en heure est donnée par la fonction f définie par : $f(t) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq t \leq 6 \\ -54 + 12t - \frac{t^2}{2} & si\ 6 \leq t \leq 18 \\ 0 & si\ 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$

Monsieur le Maire se pose un certain nombre de questions légitimes concernant la capacité de ces plaques solaires à stocker effectivement l'énergie solaire. En répondant aux questions posées ci-après, donne des éléments de réponse à certaines questions que le Maire se pose.

Tâche 1 Déterminer l'heure où l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires est maximale et donner cette quantité.

[1.5 *pt*]

Tâche 2 Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires augmente.

[1.5 *pt*]

Tâche 3 Est-il vrai qu'il existe deux temps distincts dans la journée où la quantité d'énergie solaire absorbée vaut $6kWh$?

[1.5 *pt*]

Présentation [1 *pt*]

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.» ***Euclide d'Alexandrie***

L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: intégration

TD n°3 : Fonctions définies par une intégrale

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_1^{1+x^2} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' sans expliciter f.
b) Calculer la dérivée de l'application $F : \mathbb{R}_+^* \ni t \mapsto t\ln(t) - t$. En déduire une primitive de la fonction logarithme puis l'expression explicite de f.
c) Retrouver l'expression de f' obtenue à la question précédente.

Exercice 2. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est dérivable, et calculer sa dérivée.

Exercice 3. On considère, pour tout x réel, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x(1+t)}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Monter que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

Exercice 4. (Intégrale de Gauss) Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.
On ne cherchera pas à calculer explicitement $G(x)$.
a) Montrer que G est de classe C^1 et exprimer G' en fonction de G.
b) Montrer que F est de classe C^1 et calculer F'.
c) Montrer que $F + G$ est une fonction constante. Que vaut-elle? (On pourra calculer $(F + G)(0)$.)
d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et en déduire l'intégrale I converge et donner sa valeur.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' à l'aide d'une intégrale.
d) A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.

e) En déduire une expression simple de $F(x)$. Indication: on pourra utiliser l'exercice 4 pour déterminer $F(0)$.

Exercice 6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2}$.

a) Justifier que F est bien définie pour tout $x > 0$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que F est continue sur $[a, +\infty[$.

c) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) En raisonnant comme ci-dessus, montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7. **(Fonction Γ)** Pour $x > 0$ on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a) Justifier que Γ est bien définie pour tout $x > 0$.

b) Montrer que, quelque soient $0 < a < b$, Γ est continue sur $[a, b]$.

c) En déduire que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

e) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0. Indication: utiliser d).

g) Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$. Indication: effectuer un changement de variable et utiliser l'exercice 4).

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est bien définie pour tout $x > 0$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

c) En déduire la valeur de $F(x)$.

Exercice 9. **(Transformée de Laplace)** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à la fonction Lf définie par

$$(Lf)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$

a) On suppose uniquement dans cette question que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est absolument convergente. Montrer que Lf est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

On supposera par la suite que f est bornée.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

c) Montrer que Lf est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (Lf)(x) = 0$.

e) Montrer que la transformée de Laplace Lf est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(Lf)^{(n)}(x) = (-1)^n L(t^n f)(x),$$

avec $t^n f$ l'application qui à $t \in \mathbb{R}^+$ associe $t^n f(t)$. Indication: on pourra raisonner par récurrence.

COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	**MINI SESSION**	**Situation Scolaire N°4** **Date : 01 ; 02 et 03 Février 2022**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle D et Tle TI** Durée : **04 heures** Coef: 4

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 31 POINTS

Exercice 1 : 04,5 Points

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, choisir la bonne et l'écrire sur votre feuille de composition. 1,5pt×3 = **4,5pts**

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Pour tout entier naturel n, On pose $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$. Alors :	S_n est un nombre réel pour tout n.	$S_n = 0$ pour tout $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.	$S_n = 1 + ni + 1 - ni = 2$
2	La droite de régression de la série double $(x_i;\ y_i)$ suivante est : $y = 0{,}5x + 1$. Alors : x_i: 1, 2, 3, 4 y_i: 1,8, α, 2,6, 3,3	$\alpha = 2$	$\alpha = 1{,}3$	$\alpha = 1{,}4$
3	Je souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Ne disposant que de deux bidons (non gradués), l'un de 5 litres et l'autre de 3 litres, quel est le nombre minimal d'étapes pour m'en sortir ?	5	6	7

Exercice 2 : 14 Points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3 ont pour produit -8. Leurs arguments respectifs θ_1, θ_2 et θ_3 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{6}$ et leurs modules respectifs r_1, r_2 et r_3 sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

1- Montrer que $r_1.r_2.r_3 = 8$ et $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. **1pt**

2- Déterminer r_1, r_2 et r_3. **2pts**

3- Sachant que $\theta_1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, déterminer θ_1, θ_2 et θ_3. **2pts**

Partie B : On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $u = 1 - i$ et $v = 8\sqrt{2}(-1-i)$.

1- Linéariser $cos^4 x$. **2pts**

2- Déterminer les racines 4-ièmes de v sous forme trigonométrique. **2pts**

3- Donner la forme trigonométrique de z_1 et u. **2pts**

4- On pose $z = \frac{z_1}{u}$.

a) Donner la forme algébrique de z. **1pt**

b) Donner la forme trigonométrique de z. **1pt**

c) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$. **1pt**

Exercice 3 : 12,5 Points

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique : 2cm sur les axes.

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **1pt**

2- Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation. **2pts**

3- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. **1pt**

4- a)Vérifier que $f(x) - x = -(x+1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$. **1pt**

b) Etudier la position de (T) par rapport à $(\mathcal{C})$. **1pt**

5- Tracer (T) et $(\mathcal{C})$. **2,5pts**

6- On définit par (u_n) la suite tel que $-1 < u_0 < 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $-1 < u_n < 0$. **1pt**

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$. **1pt**

c) Prouver que la suite (u_n)est convergente et déterminer sa limite. **2pts**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 09 POINTS

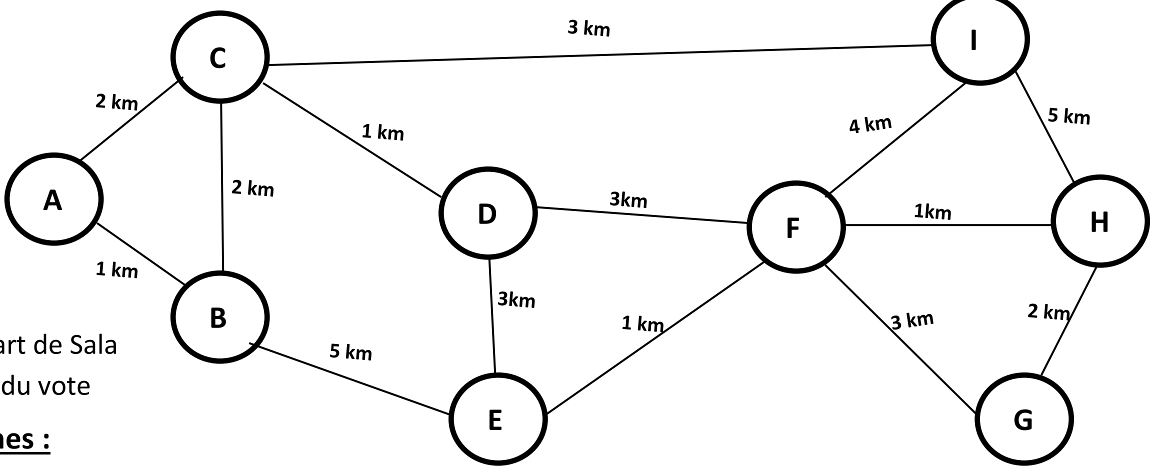
Situation :

En février 2014, la population électorale d'une localité était de 20000 électeurs. Depuis cette période, chaque année cette population augmente de 5% et de plus 1000 nouveaux électeurs supplémentaires viennent s'y établir définitivement.

Pour sa campagne en vue des élections de février 2020, Mbono a fait appel à un artisan pour réaliser une portion de dessin d'art sur le pagne à distribuer à ses militants. Il réalise alors son dessin dans un espace carré à l'aide de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$, de sa réciproque f^{-1}, puis réalise leurs symétriques par rapport aux axes de coordonnées et à l'origine du repère. (Unité graphique : 4cm pour 1)

Le jour des élections, le vieux Sala doit partir de chez lui pour son bureau de vote. Il peut passer par plusieurs quartiers avant d'atteindre ce lieu. Son fils a déterminé le plus court chemin pour lui éviter trop de fatigue. Le graphe ci-dessous nous donne les différentes pistes possibles et les distances en kilomètres séparant deux quartiers.

Aux élections de février 2020 dernier, le taux d'abstention était de 20%. Owono souhaite déterminer le nombre de votants dans cette localité en février 2020.



A : Départ de Sala

H : Lieu du vote

Tâches :

1- Présenter la maquette réalisée par l'artisan à Mbono. **3pts**

2- Aider Owono à retrouver le nombre de votants en 2020. **3pts**

3- A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, retrouver le chemin emprunté par Sala pour aller voter. **3pts**

LYCEE BILINGUE DE BAMYANGA			
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES			
Troisième Évaluation	Classes : T_D	Année scolaire 2020-2021	Date :
Épreuve de mathématiques	Durée : 4h	Coef : 4	10 /02/ 2021

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/15 points

EXERCICE 1 (5points)

le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(A;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique $1cm$.

On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. 0.5pt

2. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$.

Déterminer l'affixe z_E de E. Construire E. 0.75pt

3. Déterminer les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1. 1pt

4. On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ qui transforme A en E et B en F.

a) Exprimer Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par $\mathcal{S}$. 1pt

b) Déterminer le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de la similitude $\mathcal{S}$. 0.75pt

c) Déterminer les images de C et D par $\mathcal{S}$. 0.5pt

d) Calculer l'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle $ABCD$. 0.5pt

EXERCICE 2 (5 points)

Soit la suite(z_n) définie par $z_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 et représenter les points M_0 à M_4. 1pt

2. Démontrer que la suite $r_n = |z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques, le terme général, le sens de variation ainsi que la limite. 1pt

3. a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 4\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$. En déduire la forme exponentielle de z_n. 0.75pt

b) Montrer que les points M_n et M_{n+8} appartiennent à une même demi-droite d'origine O. 0.5pt

4. a) On note $d_n = M_n M_{n+1}$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques, le terme généra et le sens de variation. 1pt

b) Soit $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$ la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_1M_2 \dots M_nM_{n+1}$.

Exprimer L_n en fonction de n et déterminer sa limite. 0.75pt

EXERCICE 3 (3points)

I. Démontrer à l'aide d'inégalités des accroissement finis que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. 1pt

II-Soit la fonction f de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $[1; +\infty[$ définie par : $f(x) = \frac{1}{cosx}$

1) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}. 0.75pt

2) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable. 0.25pt

3) Démontrer que : $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 0.75pt

III- On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 6}$.

1. Étudier les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$de f. 1pt
2. Étudier la fonction f et représenter sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

EXERCICE 4 (2points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

   a) $\ln(x-1) + \ln(x+3) = \ln(2x+1)$; b) $\ln(2-x) \times \ln(3+x) \leq 0$; **1.5pt**

   c) $2e^{2x} + 5e^{x} - 3 < 0$.

2. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]-\infty; 3[$ par : **0.5pt**

   $f(x) = \cos^3 x \times sinx + \frac{1}{2}sin2x + \frac{2}{x-3}$.

PARTIEB : EVALUATION DES COMPETENCES/4.5 points

Situation

M. MOUSSA veut clôturer son champs. Un expert en topographie lui conseil ceci :

il faut prévoir une entrée délimitée par deux poteaux définis par deux points d'affixes respectives a et b, solutions de l'équation $z^2 + (3-3i)z - 2 - 6i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, Construire la clôture suivant l'ensemble des points M du plan complexes d'affixe z tels que :

a) $\arg(\frac{z-a}{z-b}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$; b) $\arg(\frac{z-a}{z-b}) = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi$; avec $k \in \mathbb{Z}$.

AÏCHA est élève en classe de terminale C qui a étudié et représenté la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 1$.

Tâches :

1. Décrire la forme de la clôture de M. MOUSSA dans le cas a). **1.5pt**
2. Décrire la forme de la clôture de M. MOUSSA dans le cas b). **1.5pt**
3. La courbe de la fonction étudiée par AÏCHA peut-elle rencontrer l'axe des abscisses en un point unique dont l'abscisse est comprise entre 1,6 et 1,7 ? **1.5pt**

Présentation : 0.5pt

EXAMINATEUR : H. NOUMSSI

Classe	**Epreuve de Mathématiques**	**Séquence n^0 3**	**Coef**	**Durée**
TD	**Année 2020/2021**		**4**	**3H**

PARTIE A : évaluation des ressources (15,5pts)

Exercice 1 : 3pts

QCM : Choisir la bonne réponse

1. $\lim_{x\to 0}\frac{(cosx)^2-1}{x}$ est égale à : 1pt

   a)2 ; b) -2 ; c) 0 ; d) 1

2. L'argument du nombre complexe $z=-3(\cos\frac{\pi}{6}-isin\frac{\pi}{6})$ est : 1pt

   a) $\frac{\pi}{6}$; b) $-\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$; d) $-\frac{5\pi}{6}$

3. A, B, C et D sont les points d'affixes respectives $=1$; $b=i$; $c=-1\ et\ d=-i$. 1pt

   L'ensemble des points d'affixe z tel que $\frac{z+i}{z+1}$ soit imaginaire pur est :

   a)La droite (CD) privée de C ; b) le segment [CD] privé de C ;
   c)le cercle de diamètre [CD] privé de C ; d) la médiatrice de [AB].

Exercice 2 : 3,5pts

I/On considère le polynôme $p(z)=\ z^4+17z^2-28z\ +260$ où z est un nombre complexe.

1-Déterminer deux nombres réels a et b tels que $p(z)=\ (z^2\ +\ az\ +\ b)\ (z^2\ +\ 4z\ +20)$ 0,5pt

2-Résoudre dans C l'équation $p(z)\ =\ 0$. 1pt

II/1-Ecrire le nombre complexe $8i$ sous la forme exponentielle 0,5pt

2- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ sous la forme algébrique dé l'équation : $z^3=8i$

III/Le plan complexe est muni du repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_B=-\sqrt{3}+i$ et $z_C=-2i$.

1- Trouver le module et un argument de $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. 0,75pt

2- En déduire la nature exacte du triangle ABC. 0,5pt

3- Faire une figure 0,25pt

Exercice 3 : 4,5 pts

On considère la suite (u_n) définie par u_0= 1 et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n\ +n$ -2

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 0,75pt
2. a) Démontrer que pour tout entier $n\geq 4$, $u_n\ \geq 0$ 0,5pt

   b) En déduire que pour tout entier $n\geq 5$, $u_n\ \geq\ n$ - 3 0,75pt

   c)En déduire la limite de la suite (u_n) 0,75pt
3. On définit la suite $(\boldsymbol{v_n})$ par : $\forall\ n\ \in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_n}$ = -2u_n + 3n - $\frac{21}{2}$

   a)Démontrer que la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est suite géométrique de premier terme $-\frac{25}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

   b) Exprimer $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de . 0,25pt

   c)En déduire que $\forall\ n\ \in\mathbb{N}$, $u_n\ =\frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$. 0,5pt

   d) Montrer que (u_n) diverge . 0,25pt

   f) Exprimer la somme $S_n=\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}+\cdots+\boldsymbol{v_{n-1}}$ en fonction de n . 0,5pt

   g) Calculer S_{12} 0,25pt

Exercice 4 : 5,5pts

I/ Soit z_1=1+i et z_2= 1 +i$\sqrt{3}$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 . 0,5pt
2. Ecrire sous formes algébrique et trigonométrique les nombres complexes $z_1 . z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$. 1,5pts
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. 0,5pt

II/On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cosx + cos^2x$

1.Etudier la parité de f. 0,25pt

2.Montrer que f est 2π- périodique. 0,25pt

3.a) Montrer que $f'(x) = -sinx(1 + 2cosx)$ 0,5pt

b)Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,\frac{2\pi}{3}]$. 0,5pt

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[\frac{2\pi}{3} ; \pi]$. 0,5pt

4. Montrer que l' équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $\alpha \in [0,\frac{2\pi}{3}]$. 0,5pt

5.Tracer la courbe de f sur $[0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$. 0,5pt

PARTIE B: évaluation des compétences (4,5pts)

Situation :

Un monsieur 'Y' signe un contrat de dépôt bloqué (aucune possibilité de retrait avant l'échéance) et sans frais avec sa banque pour que son capital de 1 million, déposé le 1er janvier 2021, soit remis avec une majoration à lui-même ou à ses ayant droits le 31 décembre de l'année T où ce capital doublera (c'est la maturité du contrat). M. 'Y', très peu familier des mathématiques, vous présente le contrat où est écrit « le montant des avoirs déposés évoluent suivant la formule suivante donnant au nombre d'année(s) écoulé(s) t, le montant $(1{,}03)^t$ *millions*». Le jour du dépôt initial du capital, le M. 'Y' apprend que son épouse vient d'accoucher sa fille qui restera son unique enfant 35 ans plus tard, à la mort de 'Y'. X, un de vos camarades de classe à qui M. 'Y' a présenté le contrat, dit qu'il aurait été plus profitable pour le monsieur, de placer ce capital d'un million au taux d'intérêt annuel composé de 4% sur 22ans dans une autre banque 'B', tout en payant 50000FCFA de frais annuels de tenue de compte.

Taches

1-Dire quand la fille ou M. 'Y' pourra au plus tôt récupérer les deux millions. 1,5 pt

2-Expliquer si la fille de Monsieur 'Y' sera vivante à la date de maturité T. 1,5pt

3-Conseiller M.'Y' sur le choix le plus avantageux pour lui entre le contrat initial et celui de la banque B. 1,5pt

Epreuve de Mathématiques

Examinateur : **M. TEBAYA AMBROISE**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demande à l'élève de Justifier toutes ses affirmations.

Exercice 1 / ***(06,5 points)***

1. Le polynôme P est tel que: pour tout z de $\mathbb{C}$,
$$P(z) = z^3 + (-9 + 4\sqrt{3})z^2 + (43 - 24\sqrt{3})z - 75 + 36\sqrt{3}$$
   a. Vérifier que $P(3) = 0$. **0,25pt**
   b. Déterminer les nombres réels α et β tels que: pour tout z de $\mathbb{C}$:
   $P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$ **1pt**
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (-6 + 4\sqrt{3})z + 25 - 12\sqrt{3} = 0$
   d. En déduire les solutions de $P(z) = 0$. **0,75pt**
2. On désigne par A, B et C les points du plan complexes d'affixes définies respectivement par: $z_A = 3 - 2\sqrt{3} + 2i$; $z_B = 3 - 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_C = 3$
   a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ **1pt**
   b. En déduire la nature du triangle ABC. **0,5pt**
3. Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que:
$$s : \begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$
   a. Donner l'écriture complexe de s. **1pt**
   b. En déduire la nature et les éléments géométriques de s. **0,25×4pts**
   c. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre D(1;1) et de rayon 5. Déterminer $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par s. **1pt**

Exercice 2 / ***(05 points)***

Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par:
$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

1. Prouver que, pour tout entier n non nul, $0 < u_n \leq 1$. **0,75pt**
2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n). **0,5pt**
3. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... \times u_n$.
   a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}^*$ on a :
   $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ **0,75pt**

b. Calculer la limite de x_n lorsque n tend vers l'infini. **0,25pt**

4. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
   a. Justifier que la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ **0,25pt**
   b. Déduire de la question 1. que la suite v_n est négative. **0,5pt**
   c. Prouver que la suite v_n est croissante. **0,5pt**
   d. Déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers l'infini. **0,25pt**
5. On pose pour tout entier n strictement positif: $y_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$
   a. Exprimer y_n en fonction de x_n. **0,75pt**
   b. Déterminer la limite de y_n lorsque n tend vers l'infini. **0,5pt**

<u>Problème</u> / ***(10 points)***

Les parties A et B sont dépendantes

<u>Partie A</u> / ***(03 points)***

Dans cette première partie, on étudie le signe de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - lnx$$

1. Etudier le sens de variation de g. **0,75pt**
2. Calculer $g(1)$ et $g(2)$. **0,5pt**
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $]0;+\infty[$. **0,75pt**
4. Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}. **0,25pt**
5. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. **0,75pt**

<u>Partie B</u> / ***(07 points)***

L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
orthonormé d'unité 2cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

1. Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites. **0,5pt**
2. Montrer que, pour tout x dans $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}.g(x)$ **0,75pt**
3. En déduire les variations de f. **0,75pt**
4. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variations de f. **1,25pt**
5. Construire (C_f). **0,75pt**
6. Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la (C_g), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. **1pt**
7. On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y' + 2y = x + 1$.
   a. Déterminer une solution générale $h_0(x)$ de l'équation $(E_0) : y' + 2y = 0$ **0,5pt**
   b. Déterminer les réels a, b et c tel que la fonction $h(x) = ax + b + ce^{-2-2x}$ soit une solution particulière de (E) **0,75pt**
   c. En déduire alors les solutions de (E) **0,25pt**
   d. Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 0 est $\frac{1}{4}$. **0,5pt**

MINESEC
Lycée de Rabingha
B.P : 35 Lagdo
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2018-2019
Classe : T^{le} D Durée : 04 Heures
Examen : Séquence N°3
Coefficient : 04

Epreuve de Mathématiques

***Examinateur :* M. TEBAYA AMBROISE**

Exercice 1* / *(04,5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + z^2 - (1+i)z + 2 - 2i$

1. Démontrer que P admet une racine réelle α que l'on déterminera. **0,5pt**
2. Démontrer que P admet une racine imaginaire pure β que l'on déterminera. **0,5pt**
3. Déterminer le réel γ tel que : $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$ **0,5pt**
4. On désigne par P, Q et R les points du plan complexes d'affixes définie respectivement par: $z_P = -2$; $z_Q = -i$ et $z_R = 1+i$
   a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_Q - z_P}{z_Q - z_R}$ **0,75pt**
   b. En déduire la nature du triangle PQR. **0,25pt**
5. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z + 2 - i$ et z_0 est le nombre complexe définit par $z_0 = 1 + 2i$.
   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s. **0,5pt**
   b. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y **0,75pt**
   c. Déterminer une équation de la droite (D') image de la droite (D) d'équation $y = -2x + 3$ par s. **0,75pt**

Exercice 2* / *(05,5 points)

I. On pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1. Calculer I_0 et I_1 **0,5pt**
2. Montrer que pour tout entier naturel *n*, non nul $2I_n + nI_{n-1} = e^2$ **1pt**
3. Calculer I_2 et I_3 **0,5pt**
4. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_1^e x\left(\ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3\right)dx$ **0,5pt**

II. On considère les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\, dx$

1. Calculer $I + J$ **0,75pt**
2. Soit f la fonction numérique de la variation réelle x définie par :
$$f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$$
   a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'(x) **0,75pt**
   b. En déduire $I - J$ **0,5pt**
3. Calculer I et J **1pt**

Problème* / *(10 points)

Les parties A, B et C sont dépendantes

Partie A* / *(03 points)

Dans cette première partie, on considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par:

$g(x) = xlnx - x + 1$. On appelle (C_g) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé d'unité 2cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

1. Etudier les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$ **0,5pt**
2. Etudier le sens de variation de g. **0,75pt**
3. Calculer $g(1)$ puis dresser le tableau de variation de g **0,75pt**
4. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. **0,25pt**
5. Calculer l'aire en cm^2 du domaine $\Delta = \left\{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 1 \leq x \leq e \,; g(x) \leq y \leq lnx\right\}$ **0,75pt**

Partie B* /** ***(07,5 points)

L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln(x)$.On appelle (C_f) sa courbe représentative dans le même plan rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$. **0,5pt**
2. Montrer que, pour tout x dans $]0;+\infty[$ on a $f'(x) = -\frac{g(x)}{x(x-1)^2}$ **0,75pt**
3. En déduire les variations de f puis donner son tableau de variations. **1pt**
4. Construire (C_f). **0,75pt**
5. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]3{,}5 \,;\, 3{,}6[$. **0,75pt**
6. On pose $h(x) = lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
   a. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet aussi α comme solution. **0,5pt**
   b. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + 1$ **0,5pt**
   c. Montrer que pour tout x dans $[3;4]$ on a $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$ **0,5pt**
7. On pose pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$
   a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$ **0,75pt**
   b. En déduire que pour tout entier naturel n $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. **0,75pt**
   c. Montrer que la suite (u_n) converge vers α. **0,25pt**
   d. Déterminer l'entier naturel p tel que le nombre u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **0,5pt**

MINESEC
Lycée de Rabingha
B.P : 35 Lagdo
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2019-2020
Classe : T^{le} D   Durée : 04 Heures
Examen : Contrôle Continu N°3
Coefficient : 04

Epreuve de Mathématiques

***Examinateur :* M. TEBAYA AMBROISE**

***Exercice 1* /   (06,5 points)**

1. Le polynôme P est tel que: pour tout z de $\mathbb{C}$,
$$P(z) = z^3 + \left(-9 + 4\sqrt{3}\right)z^2 + \left(43 - 24\sqrt{3}\right)z - 75 + 36\sqrt{3}$$
   a. Vérifier que $P(3) = 0$. **0,25pt**
   b. Déterminer les nombres réels α et β tels que: pour tout z de $\mathbb{C}$:
   $P(z) = (z-3)(z^2 + \alpha z + \beta)$ **1pt**
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \left(-6 + 4\sqrt{3}\right)z + 25 - 12\sqrt{3} = 0$
   d. En déduire les solutions de $P(z) = 0$. **0,75pt**
2. On désigne par A, B et C les points du plan complexes d'affixes définies respectivement par: $z_A = 3 - 2\sqrt{3} + 2i$; $z_B = 3 - 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_C = 3$
   a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ **1pt**
   b. En déduire la nature du triangle ABC. **0,5pt**
3. Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que: s :$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$
   a. Donner l'écriture complexe de s. **1pt**
   b. En déduire la nature et les éléments géométriques de s. **0,25×4pts**
   c. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre D(1;1) et de rayon 5. Déterminer $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par s. **1pt**

***Exercice 2* /   (05,5 points)**

I. On pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$
1. Calculer I_0 et I_1 **0,5pt**
2. Montrer que pour tout entier naturel *n*, non nul $2I_n + nI_{n-1} = e^2$ **1pt**
3. Calculer I_2 et I_3 **0,5pt**
4. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_1^e x\left(\ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3\right)dx$ **0,5pt**

II. On considère les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} sin^2 x\, dx$
1. Calculer $I + J$ **0,75pt**
2. Soit f la fonction numérique de la variation réelle x définie par :
$$f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(cos2x + sin2x)$$
   a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ **0,75pt**
   b. En déduire $I - J$ **0,5pt**
3. Calculer I et J **1pt**

***Problème* /   (10 points)**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A / **(05 points)**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. C_g est la représentation graphique de g dans un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2cm sur les axes.

1. a. Calculer la dérivée g' de g et montrer que $g'(x)$ est du signe de $1 - x^2$ **0,5pt**
   b. Dresser le tableau de variation de g **0,5pt**
2. Tracer la courbe C_g. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives $-2, -1, 0, 1$ et 3 **0,75pt**
3. a. Par lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel $k \geq 0$, le nombre de solution de l'équation $g(x) = k$. **0,5pt**
   b. Prouver rigoureusement que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique α , puis que $\alpha \in [-2, -1]$ **0,5pt**
   c. Montrer que l'on a $\alpha = -1 - \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$ **0,5pt**
4. Soit f la fonction définie sur $[-2, -1]$ par $f(x) = -1 - \sqrt{2} e^{\frac{x}{2}}$
   a. Etudier les variations de f, puis montrer que pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à I. **1pt**
   b. Montrer que pour tout élément x de I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$ **0,5pt**
   c. Montrer que pour tout x de I, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ **0,5pt**
5. Soit (U_n) la suite d'éléments de I définie par $U_o = -\frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ **0,5pt**
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ **0,5pt**
   c. Prouver que (U_n) converge et préciser sa limite **0,5pt**

Partie B / **(05 points)**

Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1. Prouver que, pour tout entier n non nul, $0 < u_n \leq 1$. **0,75pt**
2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n). **0,5pt**
3. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... \times u_n$.
   a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}^*$ on a :
   $$x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$$ **0,75pt**
   b. Calculer la limite de x_n lorsque n tend vers l'infini. **0,25pt**
4. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
   a. Justifier que la suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ **0,25pt**
   b. Déduire de la question 1. que la suite v_n est négative. **0,5pt**
   c. Prouver que la suite v_n est croissante. **0,5pt**
   d. Déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers l'infini. **0,25pt**
5. On pose pour tout entier n strictement positif: $y_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$
   a. Exprimer y_n en fonction de x_n. **0,75pt**
   b. Déterminer la limite de y_n lorsque n tend vers l'infini. **0,5pt**

MINESEC
Lycée de *Rabingha*
B.P : *35 Lagdo*
Département de *Mathématiques*

Année scolaire : *2020-2021*
Classe : T^{le} *D* **Durée :** *04 Heures*
Examen : *Séquence N°3*
Coefficient : *04*

Epreuve de Mathématiques

Examinateur : **M. TEBAYA Ambroise**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/ ***(15,5 points)***

Exercice 1 / ***(04,5 points)***

On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + z^2 - (1+i)z + 2 - 2i$

1. Démontrer que P admet une racine réelle α que l'on déterminera. **0,5pt**
2. Démontrer que P admet une racine imaginaire pure β que l'on déterminera. **0,5pt**
3. Déterminer le réel γ tel que : $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$ **0,5pt**
4. On désigne par P, Q et R les points du plan complexes d'affixes définie respectivement par: $z_P = -2$; $z_Q = -i$ et $z_R = 1 + i$
   a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_Q - Z_P}{Z_Q - z_R}$ **0,75pt**
   b. En déduire la nature du triangle PQR. **0,25pt**
5. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z + 2 - i$ et z_0 est le nombre complexe définit par $z_0 = 1 + 2i$.
   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s. **0,5pt**
   b. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y **0,75pt**
   c. Déterminer une équation de la droite (D') image de la droite (D) d'équation $y = -2x + 3$ par s. **0,75pt**

Exercice 2 / ***(04,5 points)***

(u_n) et (v_n) désigne les suites numériques définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et

$v_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Calculer V_0 **0,25pt**
2. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **0,75pt**
3. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. **1,25pt**
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ **0,75pt**
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1}$.
   Calculer S_n puis T_n en fonction de n. **1,5pt**

Exercice 3 / ***(06,5 points)***

Les parties I et II sont dépendantes

I. Dans cette première partie, on considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$g(x) = xlnx - x + 1$. On appelle (C_g) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé d'unité 2cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

1. Etudier les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$ **0,5pt**
2. Calculer $g(1)$ puis dresser le tableau de variation de g **0,75pt**
3. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. **0,25pt**
4. Calculer l'aire en cm^2 du domaine $\Delta = \left\{M\binom{x}{y}, 1 \le x \le e\,; g(x) \le y \le lnx\right\}$ **0,75pt**

II. L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln(x)$.On appelle (C_f) sa courbe représentative dans le même plan rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$. **0,5pt**

   b. Montrer que, pour tout x dans $]0;+\infty[$ on a $f'(x) = -\frac{g(x)}{x(x-1)^2}$ **0,75pt**

   c. En déduire le tableau de variations de f. **0,5pt**

   d. Construire (C_f). **0,75pt**

   e. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique $\alpha \in]3{,}5\ ;\ 3{,}6[$. **0,75pt**

2. On pose $h(x) = lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

   a. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet aussi α comme solution. **0,5pt**

   b. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + 1$ **0,5pt**

   c. Montrer que pour tout x dans $[3;4]$ on a $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$ **0,5pt**

3. On pose pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

   a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$ **0,5pt**

   b. En déduire que pour tout entier naturel n $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. **0,75pt**

   c. Montrer que la suite (u_n) converge vers α. **0,25pt**

   d. Déterminer l'entier naturel p tel que le nombre u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/ ***(04,5 points)***

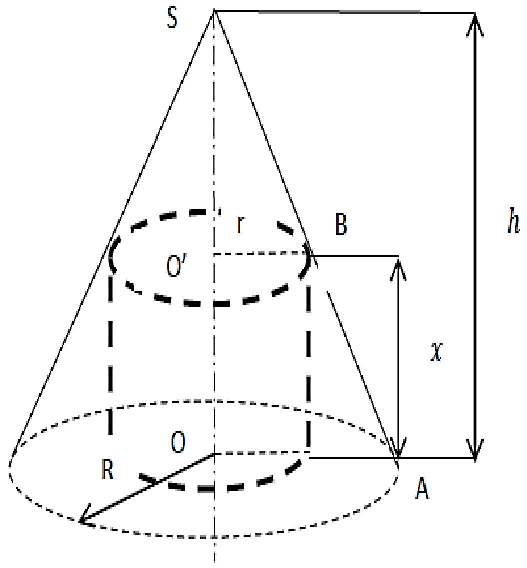
Dans une ville d'architectures futuristes, les réservoirs d'eau potable sont des cylindres « habillés » par des cônes métalliques de hauteur h et de rayon de base R. On en donne une représentation en perspective. Le cylindre droit, qui contient l'eau, est à l'intérieur du cône. Le cône et le cylindre ont même plan de base et même axe. Le cercle qui est le bord de la base supérieure du cylindre droit est inclus dans le bord du cône.

Soit S le sommet du cône, O le centre de la base inférieure du cylindre et O' le centre de base supérieure. Soit A un point du plan de base du cône appartenant au bord du cône. Soit B le point d'intersection du cylindre et du segment $[SA]$.

On effectue une section du réservoir par un plan vertical contenant S, O et A.

On désigne par x la hauteur OO' du cylindre et par r le rayon de base du cylindre.

Ambroise assistant dans un cabinet d'architecture a démontré que $r = \frac{R(h-x)}{h}$ et que le volume V du cylindre exprimer en fonction de x, R et h est $V = \frac{\pi R^2}{h^2}(x^3 - 2hx^2 + h^2x)$



1. Prouver que Ambroise a effectivement bien fait ses démonstrations. **1,5pt**
2. En prenant la hauteur $h = 60$m et le rayon $r = 30$m étudier les variations de V **1,5pt**
3. Déterminer la hauteur x du cylindre en mètres, pour laquelle le volume est maximal puis calculer alors en mètres cubes ce volume maximal. **1,5pt**

LYCEE D'AKWA-NORD
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ANNEE SCOLAIRE: 2021- 2022
Examinateur: *Dr. NGUIMBOUS*

DEVOIR SURVEILLE N°3
CLASSE : T^le^D2
DUREE : 04 HEURES
COEFF: 04

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux parties obligatoires reparties sur deux pages ; le raisonnement et la lisibilité seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat

A- EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 Points

EXERCICE 1 05 Points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u};\vec{v})$.

A) On considère l'équation (E) :$z^3-(6+i)z^2+(13+2i)z-8-i=0$
   1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $(z-1)(z^2-(5+i)z+8+i)=0$ **0,25pt**
   2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ **0,75pt**

B) On considère les points A, B et D d'affixe respectives $1,\ 2-i\ \ et\ 3+2i$. On note C le milieu du segment $[AD]$
   1. Placer ces points dans le plan complexe **0,5pt**
   2. Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en A **0,25pt**
   3. Soit r la rotation de centre A qui transforme B en C et h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On pose $S=h\circ r$
      a) Quel est l'angle de r ? **0,25pt**
      b) Démontre que $h(C)=D$ puis déterminer $S(B)$. **0,5pt**
      c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S **0,75pt**
      d) En déduire que S a pour écriture complexe : $z'=2iz+1-2i$ **0,5pt**
   4. Soit (C) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2+i|=1$et (C') l'image de (C) par S
      a) Donner la nature et les éléments caractéristiques et (C). **0,5pt**
      b) Déterminer une équation cartésienne de (C') **0,75pt**

EXERCICE 2 02,5 Points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$.

1. Démontrer que pour tout réel non nul, $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2x^2}$. **0,5pt**
2. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition. **0.5pt**
3. On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel par : $\begin{cases} U_0=\frac{3}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) Calculer U_1 et U_2 **0,5pt**

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel, $\sqrt{2}<U_n<\frac{3}{2}$. **0,5pt**

c) Démontrer par récurrence sur tout entier naturel n que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d) Conclure. **0,25pt** **0,5pt**

e) On pose $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l$. Calculer alors l. **0,5pt**

EXERCICE 3 03 Points

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$
   a) Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$ **1pt**
   b) En déduire la primitive F de f qui prend la valeur 1 en 0. **1pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :
   a) $\ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x)$ b) $ln^2 x - 2\, lnx - 3 \leq 0$ **1pt**

EXERCICE 4 05 Points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\frac{x-1}{x})\ln(x)$. Et on désigne par (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. **Etude d'une fonction auxiliaire**
   a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + lnx$ **0,5pt**
   b) Vérifier que $g(1) = 0$ **0,25pt**
   c) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$ **0,25pt**
2. **Etude de f**
   a) Démontrer que : pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ **0,5pt**
   b) Déduire de la question**1.** Le signe de f'(x) et les variations de f. **0,5pt**
   c) Déterminer les limites de f aux bornes du D_f. **0,5pt**
   d) Dresser le tableau de variations de f. **0,5pt**
3. **Représentations graphiques**
   a) Etudier suivant les valeurs de x la position relative de (C_f) par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y = lnx$ **0,5pt**
   b) Déterminer la limite à $+\infty$ de $f(x) - lnx$. Interpréter graphiquement ce résultat. **0,5pt**
   c) Construire la courbe (Γ) puis la courbe (C_f). **1pt**

EVALUATION DES COMPETENCES (04,5 points)

Un laboratoire s'intéresse à analyser l'expansion du corona virus au sein d'une population d'un quartier. Le quartier est délimité par un trapèze rectangle EFGH. Les sommets E, F, G et H sont respectivement repérés dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé d'unité 1km par leurs affixes $-1+i$, $4+i$, $2+4i$ et $-1+4i$. La densité de cette population est de 500 habitants au km^2. 70% de la population est jeune et 30% est moins jeune.

Le laboratoire décide de placer des seaux d'eau et savon dans l'enceinte de leur hôpital. Pour cela il place un seau et un savon tous les 5m² de la cours de l'hôpital qui est représenté dans le plan complexe par l'ensemble des points vérifiant $|2iz - 1 - 3i| = 8$.

Le laboratoire modélise par $f(t) = -t^3 + 300t$ le nombre d'individus infectés en fonction du temps (en jours) par le virus.

<u>Taches</u>

1°) Déterminer le nombre d'habitant jeune et moins jeune de ce quartier (1,5pt)
2°) Déterminer le nombre de seaux nécessaire dans pour cet hôpital. (1,5pt)
3°) Déterminer après combien de jours on atteint le maximum de personnes infectés

(1,5pt)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème de trois parties à traités obligatoirement. La clarté du raisonnement et la précision et la lisibilité de la copie seront prises en compte par le correcteur.

Exercice 1(4points)

On considère l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 - (2+3i)z^2 + (4+6i)z - 8 = 0$

1 -a. Démontrer que (E) admet une et une seule solution réelle; **0,5pt**

1 -b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$; **0,75pt**

2 . Soient A, B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe, démontrer que A, B et C sont les points d'un cercle dont on déterminera le centre; **0,75pt**

3 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ L'équation $z^6 - (2+3i)z^4 + (4+6i)z^2 - 8 = 0$; **0,5pt**

4 -a. Soit P un polynome à variable complexe z donné par $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$,
Montrer que si $P(z_0) = 0$, alors $P(\frac{1}{z_0}) = 0$ et $P(\overline{z_0}) = 0$; **0,5pt**

4 -b. Calculer $P(1+i)$; **0,25pt**

4 -c. Résoudre l'équation $P(z) = 0$. **0,75pt**

Exercice 2 (4points)

On considère une suite numérique V_n vérifiant pour tout $n \geqslant 0$ la relation $V_n^2 = V_{n-1} \times V_{n+1}$ de terme initial $V_0 = 2$ et on suppose que $V_2 = \frac{1}{27}$.

1 . Donner la nature et la raison q de V_n; **0,5pt**

2 . Démontrer que V_n est d'écroissante minorée par 0; **0,5pt**

3 . Déduire que V_n converge et donner sa limite; **0,5pt**

4 . On pose $U_n = \prod_{k=0}^{n} V_k$ et on suppose que la raison de V_n cette fois-ci est $q' = q\sqrt{6}$.

4 -a. Calculer U_0, U_1 et U_2; **0,75pt**

4 -b. Montrer que U_n converge; **0,5pt**

5 -a. On pose $W_n = ln(U_n)$; Calculer $\sum_{k=1}^{n+1} k$; **0,5pt**

5 -b. Montrer que $W_n = (n+1)ln(2) - \frac{ln(3)}{2}(n^2 + 3n + 2)$ et qu'elle diverge. **0,75pt**

PROBMÈME (12points)

On considère deux fonction numériques f et g données par :

$$\begin{cases} f(x) = xln(1 + \frac{1}{x^2}) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et $g(x) = ln(1 + \frac{1}{x^2}) - \frac{2}{1+x^2}$.

Partie A (2,5points)

1 . Déterminer le domaine de définition de g et calculer g'; **0,5pt**

2 . Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition; **0,5pt**

3 -a. Dresser le tableau de variation de g; **0,5pt**

3 -b. Déduire qu'il existe un $a > 0$, $g(a) = 0$; **0,5pt**

4 . Étudie le signe de g ; **0,5pt**

Partie B (5points)

1 . Démontrer que f est impaire ; **0,25pt**

2 . Démontrer que $f' = g$ et étudier les variations de f ; **0,75pt**

3 . Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$, puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; **0,5pt**

4 . Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 ; **0,75pt**

5 . Montrer que $f(a) = \dfrac{2a}{1+a^2}$; **0,5pt**

6 . Montrer que $0,5 < a < 0,6$ et encadrer $f(a)$ à 10^{-1} près ; **0,5pt**

7 . Dresser le tableau de variation de f ; **0,75pt**

8 . Tracer la courbe représentative de la fonction f. **1pt**

Partie C (4,5points)

1 . Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ **0,25pt**

2 . Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$ **0,25pt**

3 . Déduire que : $\dfrac{lna + lnb}{2} \leqslant \dfrac{ln(a+b)}{2}$, $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^a + e^b}{2}$; **0,5pt**

4 .On pose pour tout $x > 0, g(x) = ax - \dfrac{x^n}{n}$ avec m, n des réels vérifiant $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = 1$;

4 -a. Montrer que pour tout $x > 0, g(x) \leqslant \dfrac{a^m}{m}$; **0,75pt**

4 -b. Montrer que $ab \leqslant \dfrac{a^m}{m} + \dfrac{b^n}{n}$; **0,75pt**

4 -c. En déduire que $u^{1/m}v^{1/n} \leqslant \dfrac{u}{m} + \dfrac{v}{n}$, $\dfrac{ln(u)}{m} + \dfrac{ln(v)}{n} \leqslant ln(\dfrac{u}{m} + \dfrac{v}{n})$ et $e^{u/m} + e^{v/n} \leqslant \dfrac{e^u}{m} + \dfrac{e^v}{n}$; **1,5pt**

4 -d. Vérifier que la fonction ln est concave et que exp est convexe. **0,5pt**

<u>EXAMINATEUR</u> : M. KAMTILA KARI/P.L.E.G-Mathématiques.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème de trois parties à traités obligatoirement. La clarté du raisonnement et la précision et la lisibilité de la copie seront prises en compte par le correcteur.

Exercice 1(4points)

On considère l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 - (2+3i)z^2 + (4+6i)z - 8 = 0$

1 -a. Démontrer que (E) admet une et une seule solution réelle; **0,5pt**

1 -b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$; **0,75pt**

2 . Soient A, B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe, démontrer que A, B et C sont les points d'un cercle dont on déterminera le centre; **0,75pt**

3 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ L'équation $z^6 - (2+3i)z^4 + (4+6i)z^2 - 8 = 0$; **0,5pt**

4 -a. Soit P un polynome à variable complexe z donné par $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$,
Montrer que si $P(z_0) = 0$, alors $P(\frac{1}{z_0}) = 0$ et $P(\overline{z_0}) = 0$; **0,5pt**

4 -b. Calculer $P(1+i)$; **0,25pt**

4 -c. Résoudre l'équation $P(z) = 0$. **0,75pt**

Exercice 2 (4points)

On considère une suite numérique V_n vérifiant pour tout $n \geqslant 0$ la relation $V_n^2 = V_{n-1} \times V_{n+1}$ de terme initial $V_0 = 2$ et on suppose que $V_2 = \frac{1}{27}$.

1 . Donner la nature et la raison q de V_n; **0,5pt**

2 . Démontrer que V_n est d'écroissante minorée par 0; **0,5pt**

3 . Déduire que V_n converge et donner sa limite; **0,5pt**

4 . On pose $U_n = \prod_{k=0}^{n} V_k$ et on suppose que la raison de V_n cette fois-ci est $q' = q\sqrt{6}$.

4 -a. Calculer U_0, U_1 et U_2; **0,75pt**

4 -b. Montrer que U_n converge; **0,5pt**

5 -a. On pose $W_n = ln(U_n)$; Calculer $\sum_{k=1}^{n+1} k$; **0,5pt**

5 -b. Montrer que $W_n = (n+1)ln(2) - \frac{ln(3)}{2}(n^2 + 3n + 2)$ et qu'elle diverge. **0,75pt**

PROBMÈME (12points)

On considère deux fonction numériques f et g données par :

$$\begin{cases} f(x) = xln(1 + \frac{1}{x^2}) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et $g(x) = ln(1 + \frac{1}{x^2}) - \frac{2}{1+x^2}$.

Partie A (2,5points)

1 . Déterminer le domaine de définition de g et calculer g'; **0,5pt**

2 . Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition; **0,5pt**

3 -a. Dresser le tableau de variation de g; **0,5pt**

3 -b. Déduire qu'il existe un $a > 0$, $g(a) = 0$; **0,5pt**

4 . Étudie le signe de g ; **0,5pt**

Partie B (5points)

1 . Démontrer que f est impaire ; **0,25pt**

2 . Démontrer que $f' = g$ et étudier les variations de f ; **0,75pt**

3 . Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x)$, puis déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; **0,5pt**

4 . Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 ; **0,75pt**

5 . Montrer que $f(a) = \dfrac{2a}{1+a^2}$; **0,5pt**

6 . Montrer que $0,5 < a < 0,6$ et encadrer $f(a)$ à 10^{-1} près ; **0,5pt**

7 . Dresser le tableau de variation de f ; **0,75pt**

8 . Tracer la courbe représentative de la fonction f. **1pt**

Partie C (4,5points)

1 . Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ **0,25pt**

2 . Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$ **0,25pt**

3 . Déduire que : $\dfrac{lna + lnb}{2} \leqslant \dfrac{ln(a+b)}{2}$, $e^{\dfrac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^a + e^b}{2}$; **0,5pt**

4 .On pose pour tout $x > 0, g(x) = ax - \dfrac{x^n}{n}$ avec m, n des réels vérifiant $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = 1$;

4 -a. Montrer que pour tout $x > 0, g(x) \leqslant \dfrac{a^m}{m}$; **0,75pt**

4 -b. Montrer que $ab \leqslant \dfrac{a^m}{m} + \dfrac{b^n}{n}$; **0,75pt**

4 -c. En déduire que $u^{1/m}v^{1/n} \leqslant \dfrac{u}{m} + \dfrac{v}{n}$, $\dfrac{ln(u)}{m} + \dfrac{ln(v)}{n} \leqslant ln(\dfrac{u}{m} + \dfrac{v}{n})$ et $e^{u/m} + e^{v/n} \leqslant \dfrac{e^u}{m} + \dfrac{e^v}{n}$; **1,5pt**

4 -d. Vérifier que la fonction ln est concave et que exp est convexe. **0,5pt**

EXAMINATEUR : M. KAMTILA KARI/P.L.E.G-Mathématiques.

Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée Bilingue de Bocklé
Matr : 1CL1GSBD100603111
Département de **Mathématiques**
M. NGNAZOKE W. Armand, PLEG-Maths

Année Scolaire : 2021-2022
Epreuve : Mathématiques
Classe : T^le^D ; Durée : 4h
Evaluation : 1 **Trimestre :** 2
Date : 31/01/2022 ; **Coef :** 4.

L'épreuve comporte deux parties sur deux pages.

Partie A : Evaluation des Ressources (15points)

Exercice 1. (5.5points)

1 *On considère le polynôme p défini pour tout z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par : $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.*

(a) *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $p(z_0) = 0$, alors $p(\bar{z_0}) = 0$ où $\bar{z_0}$ est le conjugué de z_0.* **[0.5pt]**

(b) *Calculer $p(1+i\sqrt{3})$, puis factoriser $p(z)$.* **[0.5pt]**

(c) *Déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$.* **[0.25pt]**

2 *Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (unité grahique 2cm) Soit A, B et C les points d'abscisses $a = 4, b = 1+i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$ où $\bar{b}$ est le conjugué de b.*

(a) *Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complétera au fur et à mesure.* **[0.75pt]**

(b) *Déterminer la nature exacte du triangle ABC.* **[0.75pt]**

3 *Soit K le point d'affixe $z_k = -\sqrt{3}+i$, F le point d'affixe $z_F = e^{i\frac{\pi}{3}} z_k$ et G le point d'affixe $z_G = z_k + z_{\overrightarrow{OB}}$*

(a) *Ecrire sous forme algébrique z_F et z_G.* **[0.5pt]**

(b) *Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.* **[0.75pt]**

4 *Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$*

(a) *Calculer z_H l'affixe de H puis montrer que le parallélogramme $COFH$ est un carré.* **[0.75pt]**

(b) *Déterminer la nature du triangle AGH.* **[0.75pt]**

Exercice 2. *(4.25points)*

1 *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x-4}{2+x}\right)$.* **[0.75pt]**

2 *Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$; sur $]-3; +\infty[$.* **[0.75pt]**

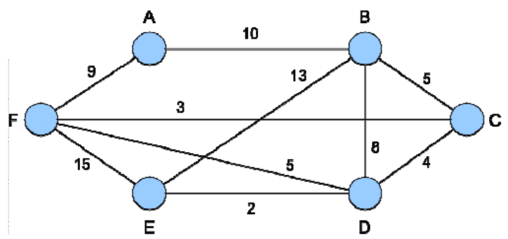
3 *Pendant six semaines, on a relevé dans un marché périodique de la ville de Garoua : le prix moyen (X) du kilogramme de tomate et le prix moyen (Y) du kilogramme d'oignon pratiqués par semaine. On a obtenu le tableau suivant :*

X(en francs)	800	950	830	1000	870
Y(en francs)	1960	2150	1990	2200	2030

(a) *Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage des points associé à cette série statistique double.* **[0.5pt]**

(b) *Déterminer une équation de la droite de regréssion de y en x.* **[1pt]**

4 *Déterminer le Plus Court Chemin du sommet F à tous les autres sommets du graphe.* **[1.25pt]**



Exercice 3. **_(5.75points)_**

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 (a) *Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.* **[1pt]**

(b) *Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.* **[0.5pt]**

(c) *Dresser le tableau de variation de f et vérifier que $f([2;3]) \subset [2;3]$.* **[0.5pt]**

(d) *Montrer que pour tout $x \in [2;3]$; $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.* **[0.5pt]**

2 *Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [2;3]$.* **[0.5pt]**

(a) *Montrer que f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J dont on déterminera.* **[0.5pt]**

(b) *Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.* **[0.5pt]**

3 *Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

4 *Montrer par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}; 2 \leq U_n \leq 3$.* **[0.5pt]**

5 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}|U_n - \alpha|$.* **[0.5pt]**

6 *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |U_0 - \alpha|$.* **[0.5pt]**

7 *Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.* **[0.25pt]**

Partie B : Evaluation des Compétences (5points)

Alain possède trois terrain $1, 2$ et 3.

Le terrain 1 a une forme telle que la représentation dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (Unité graphique des axes 6 cm) est un polygône dont les sommets A, B et C ont pour affixes respectives $e^{-i\frac{\pi}{2}}, 2$ et $-3+i$.

Le terrain 2 a une forme telle que dans le plan complexe rapproté à un repère orthonormé (Unité graphique des axes 6 cm) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est tel que $|i\bar{z} + 1 - 3i| = 4$.

Le terrain 3 a une forme telle que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (Unité graphique des axes 6 cm) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est tel que $\arg\left(\dfrac{z-3+i}{z+2i}\right) = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Alain veut clôturer chacun des trois terrains à l'aide d'un grillage vendu à 5000 Frs les $3m$.

1 Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 1 ? ***[1.5pt]***

2 Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 2 ? ***[1.5pt]***

3 Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 3 ? ***[1.5pt]***

<u>Présentation</u> : Lisibilité, absence de fautes, résultats bien encadrés **0.5pt**

André WEIL : *La logique est l'hygiène des Mathématiques.*

Collège Jean Tabi d'Etoudi
Département de Mathématiques
B.P. 4174 Yaoundé
Tel/fax : 222 21 60 53

SESSION INTENSIVE
DE FEVRIER 2019

Année scolaire 2018-2019
Classe : TD
Durée : 4h
Coef : 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice I : 2,5pts

Soit z un nombre complexe différent de 1.

a) Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$. 0,5pt

b) On pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$. Déterminer $|z'|$. 0,5pt

On appelle A , B , M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives : 1; -1 ; z et z'.

c) Calculer en fonction de z et $\bar{z}$ le nombre $r = \frac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que r est réel. 0,75pt

d) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires. 0,75pt

Exercice II : 3,75pts

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) a) Montrer que (u_n) est majorée par 4.0,75pt
   b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.0,75pt
   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.0,75pt

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

(On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis) 1pt

b) Retrouver le résultat de la question 1)c) 0,5pt

Problème : 13,75pts

Dans tout le problème, (C) désigne la courbe d'équation $y = lnx$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4cm.

En annexe est représentée le tracé de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

Partie A : 2,75pts

1)a) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (C) au point I d'abscisse 1. 0,25pt

b) Etudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$f(x) = x - 1 - lnx$ 0,75pt

c) En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ). 0,75pt

2)a) Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - lnx$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.0,5pt

b) M et N sont les points de même abscisse x des courbes (C) et (D) respectivement. Déterminer la plus petite valeur (Exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. 0,5pt

Partie B : 6pts

1) Soit M le point d'abscisse x de la courbe(C). Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x. 0,5pt

2) **Etude de la fonction auxiliaire définie sur $]0\,;\,+\infty[$, par $u(x) = x^2 + lnx$**

   a) Justifier les limites de $u(x)$ $en\ 0$ $et\ en + \infty$ ainsi que le sens de variation de u. 1pt

   b) Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$. 0,25pt

   c) Montrer que α est comprise entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}. 0,5pt

   d) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.0,25pt

3) **Etude de la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + (lnx)^2$**

   a) Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x}u(x)$ 0,75pt

   b) En déduire le tableau de variation de g. 1pt

4) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe (C) et en donner une valeur approchée exprimée en cm en utilisant pour α la valeur centrale de l'encadrement trouvée à la question 2)c). 1pt

5) A étant le point d'abscisse α de (C) , démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA). 0,75pt

Partie C : 5ptsEtude d'une suite

1) Montrer que le réel α définie dans la partie B est solution de l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + lnx)$. 0,5pt

2) a) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$. 0,5pt

b) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2};1\right]$ 0,25pt

c) Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$. 0,5pt

d) En déduire que , pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$, on a $0 \leq h'(x) \leq 0,3$. 0,5pt

3) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et que la suite (u_n) est décroissante 1pt

b) En utilisant l'inégalité des accroissements, montrer que l'on a pour tout entier naturel n ,

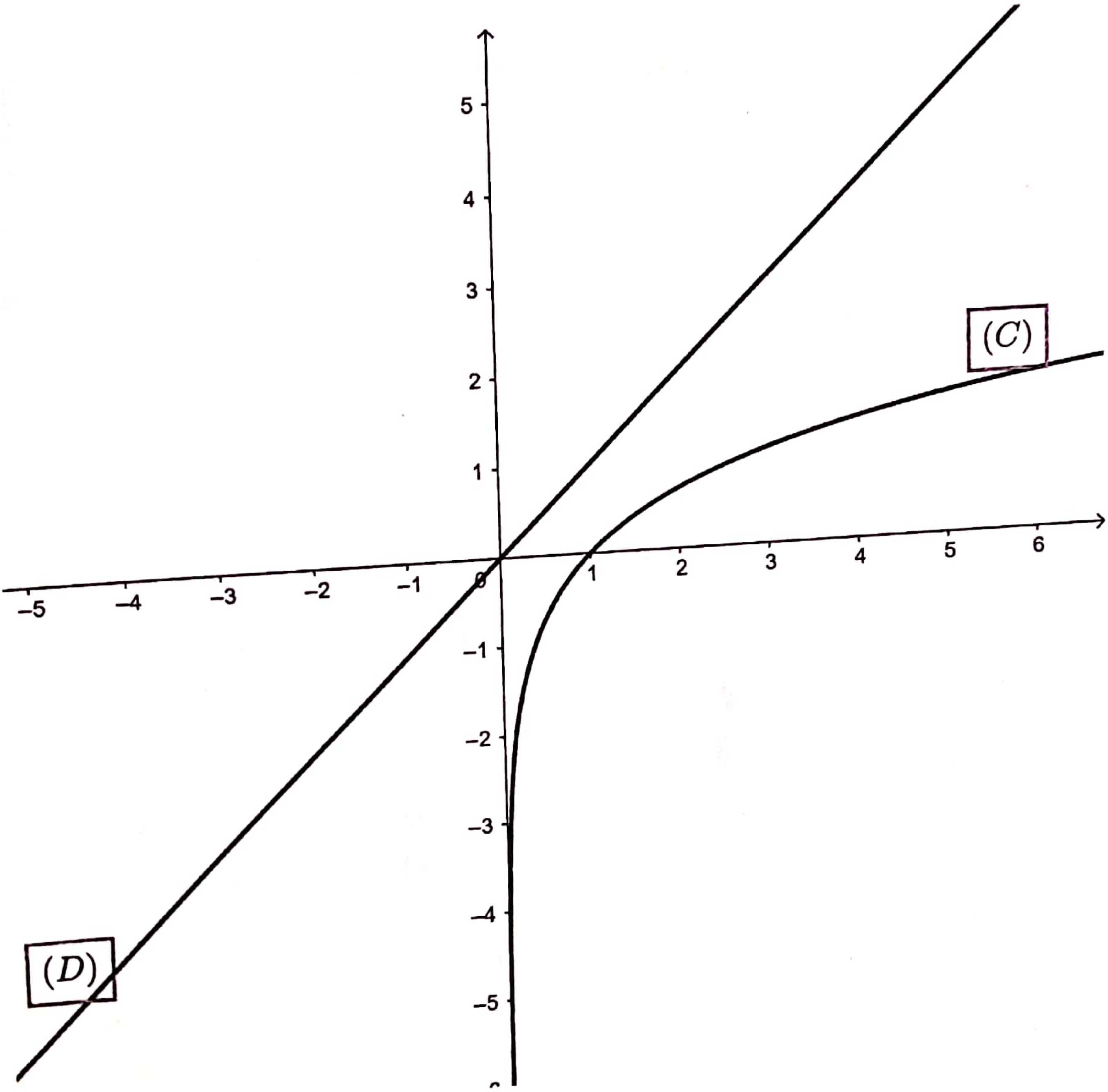
$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n$. 1pt

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α. 0,25pt

d) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5}près et indiquer la valeur u_{n_0} donnée par la calculatrice (avec 5 décimales) 0,5pt

ANONYMAT

ANNEXE



MINESEC 2020/2021 **NIVEAU : Tle C**

LYCEE BILINGUE DE NJOMBE **COEF : 7**

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES **DUREE : 4 H**

EVALUATION DE MATHEMATIQUES COMPTANT POUR LA 3ème SEQUENCE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

EXERCICE I : 04,5 points

I- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) :$z^2 - 2zcos\alpha + 1 = 0$ où α est un paramètre réel 0,5pt

2) Donner la formule trigonométrique des solutions de l'équation (E_n) :$z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^\star$ 1pt

II- Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1$

1) Montrer que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}[z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1]$ 0,75pt

2) a- Calculer $P_\alpha(1)$ 0,25pt

b- En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{sin^2(\frac{\alpha}{2})}{4^{n-1}}$ 0,75pt

3) pour tout $\alpha \in]0;\pi[$ et pour tout entier naturel n ≥ 2, on pose :

$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n})$

a- Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2n})}$ 0,75pt

b- Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ? 0,5pt

EXERCICE II : 05,5 points

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \mid xlnx \mid si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

A- 1) Etudier f et construire sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ unité 3cm 2pts

2) Construire la droite $(D): y = x$ et déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) 0,5p

3) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \frac{1}{e}$ avec $\alpha \in]1;e[$ 0,75pt

B- on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Quels sont les valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est constante ? 0,5pt
2) Soit $u_0 \in]0;\frac{1}{e}[$; Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{e}$ 1pt
3) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite 0,75pt

EXERCICE III : Des nombres étranges ! 0,5 points

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres appelés **rep-units** (répétition de l'unité) : ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1.

Soit k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres. Ainsi N_2 =11 ;

1) Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition en facteurs premiers d'un rep-unit. Justifier votre réponse. 0,5pt
2) Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3 , N_4 et N_5. 0,75pt
3) Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n² se termine par le chiffre 1.
   a- Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9. 0,5pt
   b- Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme 10m+1 ou 10m-1. 0,5pt
   c- En déduire que $n^2 \equiv 1[20]$. 0,5pt
4) a- Soit k>2. Quel est le reste de la division de N_k par 20? 0,25pt
   b- En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré. 0,25pt
5) Montrer que $N_k = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 10^0$ 0,25pt

6) Prouver que $N_k = \frac{10^k-1}{9}$. Peut-on etre certain que 10^k est divisible par 9 ? 0,5pt

7) On se propose de démontrer que si k n'est pas premier, alors N_k n'est pas premier.

Rappel : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$

a- On suppose que k est pair et on pose k=2q, où q est un entier plus grand que 1.
Montrer que N_k est divisible par N_2=11 0,5pt

b- On suppose que k est multiple de 3 et on pose k=3q, où q est un entier plus grand que 1.
Montrer que N_k est divisible par N_3=111 0,5pt

c- On suppose k non premier et on pose k=pq , où p et q sont des entiers plus grand que 1.
En déduire que N_k est divisible par N_p. 0,5pt

8) Donner une condition nécessaire pour que N_k soit premier. Cette condition est telle suffisante ? 0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Cet exercice concerne le cryptage de données dans le système RSA

Une personne A choisit deux nombres p et q, puis calcule les produits N= pq et n= (p-1)(q-1). Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.

La personne A publie le couple (N ;c), qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et N-1. Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b de la division euclidienne de par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

Pour décrypter les messages recu, la personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant la condition $0 \leq d < n \; et \; cd \equiv 1[n]$. Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, à elle et elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair (c'est-à-dire avant le cryptage) est le nombre a.

ici, nous prendrons **p=5, q=11 et c=23.**

1) Un émetteur envoie à A le nombre a= 8. Quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ? 1,5pt

2) La personne A reçoit le message crypté b= 6. Quel est le nombre a envoyé ? 1,5pt

3) Un émetteur envoie à A le nombre a= 1. Quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ? 1,5pt

$Que\ peut - on\ faire\ quand\ on\ ne\ sait\ rien?$ ... $RIEN$!!!

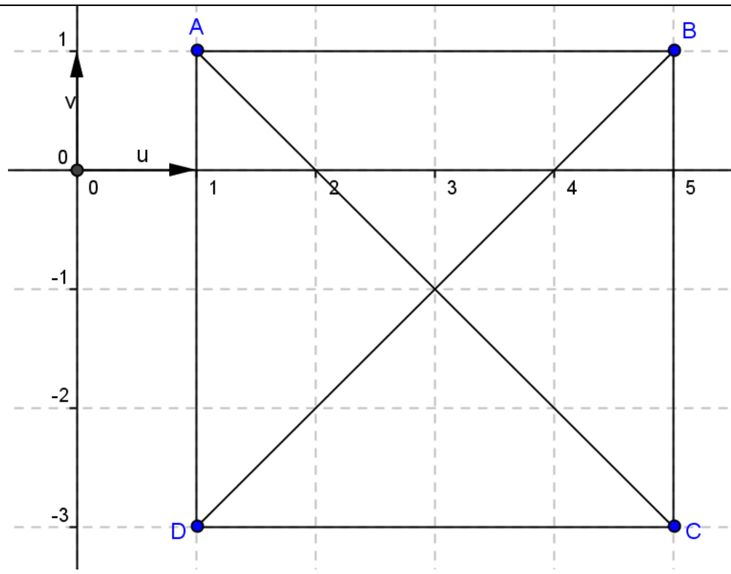
Conçu et proposé par PAA OUM

LYCEE BILINGUE DU NLONAKO		
Département de Mathématiques	**TRAVAUX DIRIGES DE FIN DU 1er TRIMESTRE**	**Année scolaire 2021/2022**
Coefficient : 04	**Durée 4 HEURES**	**Classe de Terminale D JJJ**

Partie 1 NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

1) Ecrire l'affixe z_A du point A sous forme exponentielle.
0,5pt
2) Soit s la similitude directe du plan qui transforme B en D et A en C.
Déterminer le rapport et l'angle de S puis donner la nature exacte de s.
1,5pt
3) Déterminer l'écriture complexe de s en déduire l'affixe du centre Ω de s.
0,75pt
4) Soit u l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que $\begin{cases} x' = -y+2 \\ y' = x-4 \end{cases}$..
a)Déterminer l'écriture complexe de u puis donner la nature exacte et les éléments caractéristiques de u.
1,25pt



b) Soit (D): $y = -x+1$ déterminer une équation de (D') image de (D) par u .
0,5pt

EXERCICE 2

Choisir la bonne réponse. Réponse juste = 1,25pt ; réponse fausse = -0,25pt ; pas de réponse = 0pt.

1. Parmi les complexes suivants, celui qui est un imaginaire pur est:

a) $\frac{2\sqrt{7}+i}{\sqrt{3}-2i}+\frac{2\sqrt{7}-i}{\sqrt{3}+2i}$; b) $\frac{2\sqrt{7}+i}{\sqrt{3}-2i}+\frac{-2\sqrt{7}-i}{\sqrt{3}+2i}$; c) $\frac{2\sqrt{7}+i}{\sqrt{3}-2i}-\frac{-2\sqrt{7}-i}{\sqrt{3}+2i}$; d) $\frac{2\sqrt{7}+i}{\sqrt{3}-2i}-\frac{2\sqrt{7}-i}{\sqrt{3}+2i}$

2. Le module de $\frac{(3-4i)(\sqrt{3}-i)}{(1+i)^2}$ vaut : a) 5 ; b) $5\sqrt{2}$; c) $5\sqrt{6}$; d) 20

3. Si $(a) = -\frac{\pi}{3}$, $arg(b) = \frac{\pi}{4}$ et $arg(c) = \frac{\pi}{5}$, alors $arg\left(\frac{\bar{a}\times b}{c}\right)$ vaut :

a) $\frac{23\pi}{60}$; b) $-\frac{17\pi}{60}$; c) $\frac{7\pi}{60}$; d) $-\frac{7\pi}{60}$

4. Si les nombres complexes a , b et c ont respectivement pour modules 4, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ alors le nombre complexe $\frac{\bar{a}\times b}{c}$ a pour module :

a) $2\sqrt{6}$; b) $6\sqrt{2}$; c) $12\sqrt{2}$; d) $12\sqrt{6}$

5) Le nombre de diviseurs positifs de 700 est (a) 16 (b)18 (c)20 (d) 22

EXERCICE 3

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$

1) Montrer que P admet une racine imaginaire pure.

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $\mathrm{P}(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$

4) Soient trois points du plan A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3 + i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 2 - 2i$.

4-a) Placer les points A, B et C sachant que le plan est rapporté au repère orthonormé $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

4-b) Calculer : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et les distances AB et AC

4-c) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

5) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme et placer D sur la figure précédente.

6) On note R la rotation de centre A telle que $R(B) = C$. Déterminer l'angle de R et donner l'écriture complexe de R

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité sur les axes 1cm). On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(E): z^2 + (-7+i)z + 12 - 16i = 0$.

1-a) Calculer $(5+5i)^2$.

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

2) Soient les points A et B d'affixes respectives $1-3i$ et $6+2i$

a) Calculer $\frac{z_0 - z_B}{z_0 - z_A}$; où z_0, z_A et z_B désignent respectivement les affixes des points O, A et B.

b) En déduire la nature du triangle OAB.

3) Que représente le point I d'affixe $\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$ pour le segment $[AB]$?.

4) Soient (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

a) Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. $\alpha)$ $O \in (\Gamma)$; $\beta)$ $A \in (\Gamma)$; $\gamma)$ $B \in (\Gamma)$.

b) Donner une équation cartésienne de (Γ) et construire (Γ).

EXERCICE 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4cm).

Soit A le point d'affixe $z_A = 1$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

a) Déterminer une écriture complexe de r.

b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c) Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d) Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $2, -1$ et 2.

a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D.
b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.
3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
a) Déterminer une écriture complexe de h.
b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.
4-a) Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
b) En déduire la nature du triangle CDE

EXERCICE6
1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe.
a) $z' = iz + 1$; b) $z' = (1 - i)z + 1$; c) $z' = z + 1 + i$
2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω, de rapport K et d'angle α :
a) $\Omega(1 + i)$: $K = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\Omega(i)$: $K = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE7
Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm)
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4. l'application f associe à tout point M d'affixe z de P, distinct de A, le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z-4}{z-1}$.
1) Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$. Déterminer l'affixe de $C' = f(C)$.
2) Démontrer que f admet deux points invariants I et J. (On notera I celui d'ordonnée positive). Placer les points I, J, C et C'.
3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x'y'$ sont des réels.
a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que Z soit réel.
c) Déterminer et construire l'ensemble F des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur.
4) Donner une interprétation géométrique de $|Z|$, $|z - 4|, |z - 1|$. En déduire l'ensemble D des point M d'affixe z tels que $|Z| = 1$. Construire D.
b) En déduire les expressions plus simples de A et B.

EXERCICE 8
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. On donne $z_A = 1$, $z_B = -3i$, $z_C = 1 + i$ et $z_D = 2 - 3i$.
s est la similitude directe plane qui transforme A en B et C en D.
1) Donner l'écriture complexe de s.
2) On considère l'application f qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que
$z' = u^2 z - i$ où u est un nombre complexe.
a) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une translation.
b) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une homothétie de rapport 2.
c) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

d) Déterminer les valeurs de u pour les quelles f est une similitude de rapport 4 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

EXERCICE 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\,)$.
1) Soit h la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1=2z+i$. Donner la nature et les éléments caractéristique de h.
2) Soit r la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_2 d'affixe z_2 tel que $z_2 = (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z$. Donner la nature et les éléments caractéristique de r.
3) Soit la transformation $s = hor$ du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z_1=2z+i$. Donner l'expression complexe, la nature et les éléments caractéristique de s.
4) Soit la similitude directe plane s' qui au point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}z - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
a) Déterminer l'affixe de l'image O' du point O par s'.
b) Déterminer l'expression analytique de s'.
c) En déduire :
i) l'équation cartésienne de l'image (D') de la droite (D) : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$ par s'.
ii) l'équation cartésienne de l'image (C') du cercle (C) de centre O et de rayon 3cm par s'.

EXERCICE 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

Soit r la transformation du plan qui a tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} 2x' = x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} \\ 2y' = \sqrt{3}x + y + 1 \end{cases}$

1. a) Donner l'écriture complexe de r.
   b) En déduire la nature et les éléments géométriques de r.
2. Soit h l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par z' tel que : $z' = -2z + 3i$.
   Montrer que h est une homothétie de centre $\Omega(0;1)$.
3. On considère $s = h \circ r$
   Déterminer l'écriture complexe, la nature et les éléments géométriques de s. 1,5pts

EXERCICE 11

On note $M_1,\ M_2,\ et\ M_3$ les points du plan complexe d'affixes respectives :

$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

1- Déterminer les modules et arguments de $z_1\ et\ z_2, puis\ \ z_3$.
Ecrire z_3 sous la forme algébrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}\ \ et\ de\ \sin\frac{\pi}{12}$.

2- En notant O L'origine du plan complexe et A le point d'affixe 1, préciser la nature du triangle OAM_2.

3- Quelle est l'image du triangle OAM_2 dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$? En déduire la nature du triangle OM_1M_3.

EXERCICE 12

PARTIE A : 4pts

On considère l'application f de $\mathbb{C}\ dans\ \mathbb{C}$ définie par: $z' = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i$

1- Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

2- On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante : $Z_0 = 1\ et$, pour n entier supérieur ou égal à 1, $Z_{n+1} = f(Z_n)$ et pour tout entier n on pose : $U_n = Z_n - i$.

a- Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.

b- Montrer par récurrence que, pour tout entier n : $U_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3- a) Exprimer en fonction de n la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de U_n. Calculer les limites des suites $(x_n)\ et\ (y_n)$. On note A_n le point du plan complexe d'affixe U_n.

b) Calculer le module et l'argument de U_n. Montrer que les points A_n sont alignés. ***1pt***

PARTIE 2 SUITES

EXERCICE 1

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{3V_n + 1}{4} \end{cases}$$

1 - Calculer $U_1;U_2;U_3$ d'une part et $V_1;V_2;V_3$ d'autre part

2 - On considère la suite (S_n) définie par $\forall n \in IN; S_n = U_n + V_n$

a. Calculer $S_0;S_1;S_2$ et S_3. A partir de ces résultats que peut-on conjecturer pour la suite (S_n) ? **0.75pt**

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (S_n) est une suite constante. **0.75pt**

3 - On considère (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n = V_n - U_n$

a. Montrer que (d_n) est une suite géométrique

b. Donner l'expression de (d_n) en fonction de n

4 - En utilisant des questions 2.b et 3.b, donner l'expression de (U_n) et (V_n) en fonction de n **0.5pt**

5 - Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent et préciser leurs limites

EXERCICE 2

Démontrer par récurrence que :

1a) $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$b)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *est divisible par* 7
3. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11

PARTIE 3 FONCTIONS

EXERCICE 1

1.Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} + 2x)$

2.Soit la fonction t définie par $t(x) = \frac{2x + sinx}{x}$

a/Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\frac{2x-1}{x} \leq t(x) \leq \frac{2x+1}{x}$

b/ En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} t(x)$

3. On considère la fonction numérique g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{ax+b}{x-2} \quad si \quad x \succ 1 \\ g(x) = 2x^2 - ax + b \quad si \quad x \prec 1 \\ g(1) = 0 \end{cases}$

a)Préciser l'ensemble de définition de g.

b) Déterminer en fonction de a et b, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$. 1pt

c)En déduire les valeurs de $a\ et b$ pour que la fonction g soit continue en 1.

EXERCICE 2

On considère la fonction f deux fois dérivables sur$]-\infty; 1[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$

1. Démontrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, $1 + \frac{x}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$.

   (On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[x; 0]$)

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (unité graphique : 1cm).

I. Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.

3. Etudier pour tout x de , le signe de $g(x)$.

II. 1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.

2) Montrer que, pour tour x de $R-\{-1;1\}$, $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau des variations de f.

3) a) Montrer que, pour tour x de $R-\{-1;1\}$, $f(x)=x+1+\frac{x+2}{x^2-1}$.

b) En déduire que la droite $(D){:}\,y=x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$, Préciser les autres asymptotes à (C).

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4) Tracer (D) et (C).

1,5p 5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;-1[$.

a) Vérifier que h est une bijection de $]-\infty;-1[$ vers un intervalle que l'on précisera.
0,5pt

b) On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') la courbe représentative de h^{-1}.

Construire en pointillés la courbe (C') dans le repère (O,I,J).
0.75pt

EXERCICE 4

On considère la fonction h définie par : $h(x)=x+\sqrt{x}$.

1) Montrer que h est dérivable sur l'intervalle $[1\,;4]$ et pour tout $t\in[1\,;4]$, $\frac{5}{4}\leq h'(t)\leq\frac{3}{2}$.

2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}\leq h(x)\leq\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.

EXERCICE 5

1-a) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty;\ 1]$ par la fonction g définie par : $g(x)=x^3+2x+5$

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α tel que $-\frac{3}{2}\leq\alpha\leq-1$.

2) Soit f une fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera, puis déterminer sa réciproque f^{-1}

EXERCICE 6

1) Soit p le polynôme défini par $p(x)=x^3-x^2+3x+1$.

a) Dresser le tableau de variation de p .

b) Démontrer que l'équation $p(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\,]-1\,;0[$, puis donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.

c) En déduire le signe de p sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\frac{2}{x^2+1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

b) Déterminer la dérivée f' de f et montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{(x+1)p(x)}{(x^2+1)^2}$.

c) A l'aide de la question 1-c), déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation .

d) Représenter la courbe de f.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.
1) Soit g le polynôme défini par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
a) Dresser le tableau de variation de g.
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-2\,;0[$, puis donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.
c) Préciser le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2) Etude de la fonction f
a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
b) Calculons la dérivée de f et montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.
c) A l'aide du tableau de signe de g, donner le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$, puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$
e) Existe-t-il les tangentes à (C) parallèles à la droite $(D){:}\, y = x$? Si oui déterminer les.

EXERCICE 8

1) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^3 + x - 1$.
a) Dresser le tableau de variation de g.
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0\,;1[$, puis donner un encadrement de $\propto$ à 10^{-2} près.
c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.
a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Démontrer que les droites $(D){:}\, y = x + 1$et $(D'){:}\, y = x - 1$ et sont des asymptotes à (C) respectivement en $-\infty\ et + \infty$
d) Construire la courbe (C).
3) Soit h la restriction de f à $]1\,; +\infty[$.
a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1}.
b) Construire en interrompu la courbe de h^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 9

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$

I. a) Etudier les variations de la fonction g.
b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

II. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Etudier les branches infinies de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$
d) En déduire le tableau de variation de f.

e) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que les branches infinies. **1pt**

EXERCICE 10

I- 1) Rappeler le « Théorème des valeurs intermédiaires » pour une fonction numérique d'une variable réelle et continue.

2) Donner l'un des énoncés de l'«Inégalité des accroissements finis » pour une fonction numérique d'une variable réelle et dérivable.

3) Déduire de cette inégalité des accroissements finis, que pour tout réel x non nul, $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$. (0,5pt)

II- On admet que la recette $R(x)$ (en millions de francs CFA) d'un délégué médical, résultant de la vente de x centaines de litres de gel hydro-alcoolique, est définie sur [1; 5] par $R(x) = 17x$. Le fournisseur « D » livre ce gel au délégué médical pour ses clients, au cout $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$ (en millions). Le délégué requiert votre expertise pour signer le contrat de représentation avec « D » qui est réputé être honnête. Le bénéfice du délégué pour x centaines litres vendus est $\text{B}(x) = R(x) - C(x)$ défini sur [1; 5].

1- Etudier les variations de $\text{B}(x)$ sur [1; 5].
2- Montrer que $\text{B}(x) \geq 0$ sur [1; 5].
3- Montrer qu'il existe au moins un x_0 dans [1; 5] tel que $\text{B}(x_0)$ =81.
4- Montrer que pour $b \in [1;\ 5]$, le problème $\text{B}(x) = b$ admet deux solutions dont l'une est inférieure à 2.

EXERCICE 11

1.a) Etudier les variations et les branches infinies de la fonction $\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \end{array}$.

1.b) En déduire l'allure de la courbe de la fonction f ci-dessus.

2.- Calculer $\text{A} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(7x)}{\sin(4x)}$ et $\text{B} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x}$

IV). Déterminer l'expression de la bijection réciproque de $g : x \mapsto -x^2 + 4x - 4$ définie de [2;5] vers [-9;-4].

EXERCICE 12

Considérons la fonction définie sur [1 ;2] par $f(x) = 4x^3 - 4{,}5x^2 + 4x - 4{,}5$

1- Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle [1 ;2] tel que $f(\alpha) = 0$. (1pt)
2- Donner un encadrement au centième près de α.
3- En utilisant la notation α, donner le signe de f dans $\mathbb{R}$.
4- Montrer que si $x \in \mathbb{C}$, alors ($f(x) = 0$ entraine $f(\bar{x}) = 0$).
5- Démontrer que $f(i) = 0$ et en déduire de la **question 4),** l'autre solution imaginaire pure dans $\mathbb{C}$ de $f(x) = 0$.
6- En utilisant la notation α, résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(x) = 0$.

PARTIE 4 COMPETENCES

COMPETENCE 1

Un expert en marketing, après étude du marché a établi que la recette $R(x)$ (en millions de francs) d'un délégué médical, résultant de la vente de x centaines de litres de gel hydro-alcoolique, est définie sur [1; 5] par $R(x) = 17x$. Le fournisseur « D » livre ce gel au délégué médical pour ses clients, au coût $c(x) = x(-x^2 + 29) - 16$ (en millions de francs). Le délégué requiert votre expertise pour signer le contrat de représentation avec « D » qui est réputé être honnête.

Tâches :

1- Expliquer au délégué médical qu'on ne perd jamais dans ce commerce de gel.
1,5pt

2- Ce délégué médical peut-il réaliser un bénéfice de de 81 millions de Francs ? si oui pour quelle quantité de gel vendue ?
1,5pt

3- Expliquer au délégué médical que tout bénéfice de 4 millions de francs correspond à deux volumes de gel vendus dont l'un est inférieur à 200 litres.

COMPETENCE 2

Sur le plan d'un village et grâce au GPS, les coordonnées locales d'un point sont repérées dans un repère orthonormé dont l'origine est placée au centre administratif et dont les axes des abscisses traversent la place du marché de ce village.

Ce village a bénéficié de 3 forages d'un projet gouvernemental et d'un centre de santé.

Ces forages ne peuvent être construits qu'en des points M(x, y) tel que $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$. Le service de construction de ces forages désire s'installer en C tel que ABCD soit un parallélogramme.

Tâches :

1) Dans le village, déterminer par leurs coordonnées, les positions où doivent être construits chacun des 3 forages.

2) Déterminer la position où le service de construction doit s'implanter.

3) Déterminer à quel point peut être construit le centre de santé tel que

$|z + 1 + i| = |z + 1 - i|$

COMPETENCE 3

Monsieur Ahmadou est le gestionnaire de l'entreprise où vous avez postulé pour un emploi. M. Ahmadou vous explique, lors de l'interview, que le bénéfice b en fonction du nombre x(en milliers) de chaussures est défini par :

$$b(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5, \text{ avec } 1 < x < 3 .$$

M. Ahmadou vous propose de l'aider pour ces trois tâches :

1. Quel est, à l'unité près, le nombre de chaussures dont le bénéfice est nul ?
2. Quel est un l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à une perte ? **(1,5pt)**
3. Quel est un l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à un gain positif ? **(1,5pt)**

COMPETENCE 4

Une entreprise spécialisée dans la culture de maïs ravitaille une localité. Pour une livraison d'une commande dont le nombre de sacs est compris entre 175 et 240 sacs, l'entreprise fait recours au service d'un conducteur de tricycle pour transporter les sacs de l'entrepôt pour la route question de charger le camion qui ira effectuer la livraison. Le conducteur a été informé qu'en transportant 11 sacs de riz par tour, il en restera deux sacs dans le magasin et s'il transporte 6 sacs par tour, il faudra deux sacs en plus au dernier tour.

Le directeur de l'entreprise constate que les travailleurs d'une plantation limitrophe empiètent sur sa parcelle et décide alors d'ériger une clôture pour marquer la limite avec cette plantation. Il faudra prévoir une entrée délimitée par deux poteaux placés aux points A et B (dans un repère lié à la plantation) d'affixes respectifs a et b solutions de l'équation $z^2+(3-3i)z-2-6i=0$ puis construire la clôture qui est matérialisée sur le plan complexe par l'ensemble des points M d'affixe z tel que $Arg\left(\frac{z+3-i}{z+3+i}\right)=-\frac{\pi}{5}$.

Tâche1 : Déterminer le nombre de sacs de maïs que le conducteur devra transporter.

Tâche2 : Représenter sur un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la matérialisation de l'entrée de la plantation. **1,5pts**

Tâche3 : Représenter sur le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la matérialisation de la clôture.

MINESEC	Thèmes	Janvier 2019
CITY BILINGUAL ACADEMY	nombres complexes	$T^{le}D$
Département de mathématiques	suites numé.	**Séquence n°3**
examinateur :Ulrich TCHEUKO	fonction expo.	**Durée : 04h00 Coef :4**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

La qualité de la rédaction sera pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE I **5 pts**

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.

1. a. α désigne un complexe quelconque. Montrer que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. **0,75 pt**

   b. Déduisez que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = 0$. **0,5 pt**
2. Calculer $P(1-i)$ et déduire l'autre racine. **0,5 pt**
3. Déterminer les réels a et b tel que : $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + az + b)$ **0,5 pt**
4. Résoudre $P(z) = 0$. **0,75 pt**
5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives $Z_A = 2 + 3i$; $Z_B = 1 + i$; $Z_C = 2 - 3i$ et $Z_D = 1 - i$.

   a. Placer ces points images dans le repère. **1 pt**

   b. Montrer que tous ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon (points cocycliques). **1 pt**

EXERCICE II **4 pts**

L'étude de la production intérieure brute, au Cameroun (en milliard de francs) a donné le résultat suivant :

Si $P(n)$ désigne la production intérieure de l'année numerotée n, $(n \in \mathbb{N})$,

le rapport : $\dfrac{P(n+1) - P(n)}{P(n)} = 0,11$ constant. On suppose $P(0) = 140$.

1. a. Calculer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$. **1 pt**

   b. Calculer $P(1)$ et $P(2)$ **1 pt**

   c. Calculer $P(n)$ en fonction de $P(0)$ et n. En déduire $P(10)$. **1 pt**
   (On arrondira au milliard supérieur)
2. A partir de quelle année de la production sera-t-elle supérieure ou égale à $3 \times P(0)$? **1 pt**

PROBLEME **11 pts**

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{2x-2}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité : 5 cm).

1. a. Déterminer la limite de f à $-\infty$. **0,5 pt**

   b. Vérifier que pour tout réel x non-nul : $f(x) = x\left(1 - 2e^{-2}(\dfrac{e^{2x}}{2x})\right)$ **0,25 pt**

   Déterminer la limite de f en $-\infty$ **0,5 pt**

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **1,5 pt**

3. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. **0,5 pt**

   b. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D). **0,5 pt**

4. On note A le point de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1.
   Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C). **0,5 pt**

5. a. On note I l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution qu'on notera α. **0,75 pt**

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-2}. **0,5 pt**

   c. Construire la courbe $(\mathcal{C})$, l'asymptote (D) et la tangente (T). **1,5 pt**

Partie B :

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x-2}$

   a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si $g(x) = x$. En déduire $g(n)$. **0,5 pt**

   b. Démontrer que, pour tout réel $x \in I$; on a : $| g'(x) | \leq \frac{2}{e}$. **0,5 pt**

   c. Démontrer que pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à I. **0,5 pt**

   d. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer, pour tout entier naturel n : $| U_{n+1} - \alpha | \leq \frac{2}{e} | U_n - \alpha |$. **0,75 pt**

2. Démonter, par récurrence que $| U_n - \alpha | \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$. **0,75 pt**

3. En déduire que la suite U_n converge et donner sa limite. **0,5 pt**

4. Déterminer un entier naturel p tel que $| U_p - \alpha | \leq 10^{-5}$. **0,5 pt**

"PRIÈRE ET TRAVAIL, TRAVAIL ET PRIÈRE"

Ministère des Enseignements Secondaires
Délégation Régionale du Centre
Lycée Bilingue de BOKITO
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2020/2021
Durée : 4H Coef : 4
Classe :T^le^ D
Examinateur : TCHIO Serge

EVALUATION HARMONISEE N°3 DE MATHEMATIQUES

Evaluation des ressources 15.5pts

Exercice 1 : 5pts

I. Soit h la fonction définie sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ par $h(x) = x\sqrt{1-2x}$. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction H définie sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ par $H(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-2x}$ soit une primitive de h. **1pt**

II. Déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe $Z = 16\sqrt{2}(-1+i)$ sous forme trigonométrique **1pt**

III. On considère le polynôme de la variable$z$ défini par $P(z) = z^3 - (2-i)z^2 + (5-3i)z - 2 + 6i$

1. Calculer $P(1-i)$ **0.5pt**
2. Mettre P sous la forme $P(z) = (z-1+i)(z^2+az+b)$ où a et b sont deux nombres complexes à déterminer. **0.5pt**
3. Déterminer toutes les racines de P. **0.75pt**
4. On munit le plan complexe d'un repère orthonormé et on considère les points $A(1)$, $B(-2i)$, $C(1-i)$ et $D(1+2i)$. s désigne la similitude directe plane telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$
   - **a.** Donner une écriture complexe de s. **0.75pt**
   - **b.** En déduire les éléments caractéristiques de s. **0.5pt**

Exercice 2 : 5pts

I. Soit g la fonction de la variable réelle défini sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x + 2$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **1pt**
2. Calculer $g(-2)$ et en déduire le signe de g suivant les valeurs de x. **1pt**

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$ (C_f) sa courbe représentative.

1. **a.** Montrer que $f(x) = x - 3 + \frac{3x-1}{x^2}$ puis justifier que la droite (d) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C_f). **0.75pt**
   b. Etudier la position relative de (C_f) et de la droite (d). **0.5pt**
2. Montrer que pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ et en déduire les variations de g

1pt

3. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1. **0.75pt**

Exercice 3 : 5.5pts

I. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 4 + \ln x$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1pt**
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1 < \alpha < 2$ **1pt**

II. Soit g la fonction définie sur $I = [0, 2]$ par $g(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$ pour tout $x \in I$. **0.5pt**
2. En déduire que α est solution de l'équation $g(x) = x$
3. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$. **0.5pt**

4. Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ puis que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}\ |x - \alpha|$ **0.75pt**

III. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. **0.5pt**
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ **0.25pt**
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **0.5pt**
4. Déduire que la suite (u_n) converge vers α **0.25pt**
5. Déterminer l'entier n_0 tel que $n \geq n_0$ et $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ **0.25pt**

EVALUATION DES COMPETENCES 4.5pts

M. MOUAFFO possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui set rapporté que des personnes mal intentionnées utilisent ces espaces non occupés à des mauvais fins. **M. MOUAFFO** décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer ses trois terrains. Le rouleau de 5m de fil barbelé est vendu à 3500 frs.

Le premier terrain : est formé de l'ensemble de tous les points $M(x, y)$ du plan complexe vérifiant $|2iz - 1 - 3i| = 8$.

Le second terrain quant à lui est de forme rectangulaire et dont les dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire solution de l'équation $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

Le troisième terrain est formé de l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Re(Z) = 0$ avec $Z = \frac{z}{z+2i}$

NB : Les distances dans tous ces terrains sont exprimés en décamètre.

1. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le premier terrain ? **1.5pt**
2. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le deuxième terrain ? **1.5pt**
3. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le troisième terrain ? **1.5pt**

Épreuve de Mathématiques

Coefficient : 4 Durée : 4 heures

Exercice 1 (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+5z=8 \\ 2x+4y-z=-1 \end{cases}$ 1,5 pt

2. En déduire dans $\mathbb{R}^3$ les solutions du système : $\begin{cases} 3\ln x+2\ln y-\ln z=3 \\ \ln x-\ln y+5\ln z=8 \\ 2\ln x+4\ln y-\ln z=-1 \end{cases}$ 1 pt

3. Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous sur leur ensemble de définition.
a) $f(x)=\sin^5 x$ b) $g(x)=\dfrac{4x^3+2x^2+5x-1}{2x+3}$ c) $h(x)=\dfrac{2}{e^{2x+1}}$ (1+1+0,5)pts

Exercice 2 (5 points)

1. a) Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ 0,5 pt

b) En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation : $z^2-i=0$ 0,5 pt

2. On pose $P(z)=z^3+z^2-iz-i$ où z est un nombre complexe.

a) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une racine réelle α que l'on déterminera. 0,5 pt

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$ dans l'ensemble des nombres complexes. 0,5 pt

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_C=-1$.

a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et z_B. 1 pt

b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe. 0,5 pt

4. Soit D le symétrique de A par rapport à l'axe des réels.

a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique. 0,5 pt

b) Démontrer que : $\dfrac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD. 1 pt

PROBLÈME (10 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

1. Étudier les variations de g. 1,5 pt
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α. 0,5 pt

   b) Vérifier que $0,86 < \alpha < 0,87$. 0,5 pt
3. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. 0,75 pt

Partie B : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{\ln x}{x^2}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. 1 pt
2. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ puis étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et (Δ). 1,25 pt
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$. 1 pt
4. En déduire le tableau de variation de f. 0,75 pt
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite (Δ) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On prendra comme unités : 2cm sur l'axe des abscisses, 1cm sur l'axe des ordonnées. 1,5 pt
6. a) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}$ 0,5 pt

   b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 1. 0,75 pt

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE

LYCEE BILINGUE DE KYE-OSSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES **EXAMINATEUR : Mr CEDRIC NGAH NKOLO**

Classe : Tle D **DUREE: 540000 tierces**

Contrôle continu numéro 1.

15 octobre 2021

EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 PTS

EXERCICE I /5PTS

Démontrer par récurrence que :

1a) $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

1pt

$b)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

1p

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *est divisible par* 7 **1,5pt**
3. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11 **1,5pt**

EXERCICE II 5/pts

Soit le polynôme $P(Z) = Z^3 + 9iZ^2 + 2(6i - 11)Z - 3(4i + 12)$ ou $Z \in \mathbb{C}$

1) Montrer que p admet une racine réelle à déterminer **1pt**
2) Trouver les nombres complexes a, b *et* c *tels que* $p(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$ **1pt**
3) Déterminer les racines carrées de -5-12i **1,5pt**
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l equation $z^2 + (9i - 2)z - 6(i + 3) = 0$ **1pt**
5) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation p(z)= 0 **0,5pt**

EXERCICE III 5,5/pts

I- Soient $P(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$ et $z_0 \neq 0$

1. Montrer que si Z_0 est une racine de P(Z) alors $\overline{Z_0}$ l'est aussi **1pt**

2. Montrer que si Z_0 est une racine de P(Z) alors $\frac{1}{Z_0}$ l'est aussi **1pt**
3. Calculer P(1+i) et en déduire les autres racines de P(Z) **1,5pt**

II- Soient A,B et M trois points d affixes 1-i, i et z. pour $z \neq 1$, on pose z=$\frac{z-1+i}{z-1}$

1. Déterminer l'ensemble des points M tel que :
   a) z soit réel **1pt**
   b) z soit imaginaire pur **1pt**

PARTIE B: évaluation des compétences (4,5pts)

Situation :

Emmanuel possède trois terrains dont il veut absolument clôturer pour leur sécurité. Emmanuel décide d'utiliser du fil barbelé vendu à 3500FCFA le rouleau de 5 m.

- Le premier terrain est formé de tous les points M(x ;y) du plan solutions de l'équation
  $$Re(z') = 0 \text{ où } z' = \frac{z-4-6i}{z-2i}.\ z = x + iy$$
- Le deuxième terrain est formé de tous les points M(x ;y) du plan vérifiant $|z-3-i| = 5$,
- $z = x + iy$
- Le troisième terrain a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont la partie réelle et imaginaire de l'équation $(1+4i)+(3-4i)\overline{z} = 4-8i$, $z = x + iy$

Tâches :

1)Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le premier terrain. 1,5pt

2)Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le deuxième terrain. 1 ,5pt

3)Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le troisième terrain. 1 ,5pt

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

<u>PARTIE A</u> : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15 points

<u>Exercice 1</u> : 5pts

1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **0,5pt**
2) Déterminer l'entier n tel que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = 100$. **0,5pt**
3) En utilisant la première question, déduire le calcul de la somme $T = 9^3 + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 17^3$. **0,5pt**
4) La fonction h est définie sur $I = [1; 2]$ par $h(x) = \frac{3x+2}{x+2}$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **0,5pt**
   b) Montrer que $\forall x \in I,\ |h'(x)| \leq \frac{4}{9}$. **0,5pt**
5) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$. **0,5pt**
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$. **0,5pt**
   c) Quel conjecture pouvez-vous faire sur la convergence de la suite (U_n)? **0,25pt**
   d) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9}\ |U_n - 2|$. **0,5pt**
   e) En déduire que $|U_n - 2| \leq (\frac{4}{9})^n$. **0,5pt**
   f) Déterminer la limite de la suite (U_n). **0,25pt**

<u>EXERCICE</u> 2 : 3,25pts

I. On considère le polynôme P de degré 3 défini par : $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i$.
1. Montrer que $P(2i) = 0$. **0,5pt**
2. a- Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$. **0,5pt**
   b- Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **0,5pt**

II. Dans le plan complexe $(0, I, J)$ *direct*, on donne les points : $Z_A = 3$, $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$, $Z_C = -1$, $Z_E = 7$ et $Z_G = 11 + 4i\sqrt{3}$.
1. On pose : $X = \frac{Z_B - Z_I}{Z_A - Z_I}$. Calculer $|X|$ et déterminer un argument de X. **0,5pt**
2. En déduire la nature exacte du triangle $A\ I\ B$. **0,25pt**
3. On pose : $\varphi = \frac{Z_G - Z_C}{Z_B - Z_C}$. Mettez φ sous forme algébrique puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. **0,5pt**
4. Déterminer l'affixe du point F de l'axe des abscisses pour lequel le triangle EFG est équilatéral. **0,5pt**

<u>EXERCICE</u> 3 : 2,25pts

Sur huit exploitations agricoles d'une même région ,on a mesuré la taille de l'exploitation en hectare (ha) et le bénéfice annuel en Francs . Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous .

Taille X	1	2	4	1	3	4	3	2
Bénéfice Y	2	5	7	-1	8	9	7	3

1) Déterminer les coordonnées du point moyen G . **0,5pt**
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire . **0,5pt**
3) Un ajustement linéaire est-il approprié ? justifier votre réponse. **0,5pt**
4) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x. **0,5pt**
5) Quel serait le bénéfice d'une exploitation de $2{,}5ha$? **0,25pt**

EXERCICE 4 : 4,75pts

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J) .

$\boldsymbol{I}$ –On donne $g(x) = \boldsymbol{x^3 + 3x + 8}$.

a) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation . **0,5pt**

b) Montrer que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique β. **0,5pt**

c) Calculer $g(-2) et\ g(-1)$. **0,25pt**

d) Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} par la méthode de votre choix. **0,5pt**

e) Préciser le signe de $g(x)$ suivants les valeurs de x. **0,25pt**

$\boldsymbol{II}$ –**a)** Écrire $f'(x)$ en fonction de $g(x)$. **0,5pt**

b) Étudier les variations de f, puis Dresser son tableau de variation ·

c) En étudiant les branches infinies, montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique que (Δ) dont on précisera une équation cartésienne . **0,5pt**

d) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport (Δ) . **0,5pt**

e) Vérifier que $(\mathcal{C}_f)$ rencontre (Δ) en un point M dont on précisera les coordonnées · **0,25pt**

f) Montrer clairement que $f(\beta) = \frac{3}{2}\beta$. **0,5pt**

g) Représenter soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ). **0,5pt**

B. Évaluation des compétences / 4,5pts

Monsieur POUGA est un agriculteur qui possède une plantation de cacao. Il a relevé que sa production (en Kg), après chaque saison de récolte depuis 2014 (année de rang 1), forme une série statistique à deux variables comme l'indique le tableau ci-contre :

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Production y_i $(en\ Kg)$	94	219	751	2252	4573	6714	8157

Il voudrait avoir une estimation de sa production en 2021 en supposant que la tendance des récoltes reste la même au cours du temps. Pour cela il fait appel à son fils de la classe de terminale afin de l'aider. Dans sa démarche, son fils constate que le nuage de points associé à cette série ne laisse pas entrevoir un ajustement linéaire et après plusieurs calculs, il décide donc de poser $y_i' = \sqrt{y_i}$ et constate que le nuage de points de la nouvelle série $(x_i; y_i')$ laisse entrevoir un ajustement linéaire.

Pour le suivi des recettes de sa ferme, monsieur POUGA ai fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette $R(x)$ (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de x centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur [1; 5] par $R(x) = 17x$. Monsieur POUGA vend son cacao à son client principal, au cout $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$ (en millions). Le bénéfice de son client principal pour x centaines de kilogrammes de cacao vendus est B$(x) = R(x) - C(x)$ défini sur [1; 5]. Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un x_0 dans [1; 5] tel que le bénéfice soit égale à 81 millions de francs CFA.

Votre travail consiste à résoudre les tâches suivantes en justifiant votre démarche par des calculs bien détaillés :

Tâche 1 : Déterminer lorsque des x_0 existent, leur(s) encadrement(s) à 10^{-1}près. **1.5 pt**

Tâche 2 : Déterminer, à l'unité près, une estimation de sa production en 2021. **1.5 pt**

Tâche 3 : Déterminer, à l'unité près, le nombre de litres de gel à produire donnant un bénéfice est positif. **1.5 pt**

Présentation 0,5pt

Ministère des Enseignements Secondaires **Année scolaire 2019-2020**
LYCÉE DE MOFOLE : TleD **$5^{\text{ième}}$test ; $3^{\text{ième}}$ séquence**
Département de mathématiques **Durée : 4h, Coefficient :4**

Épreuve De Mathématiques

L'épreuve comporte sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

Exercice 1 [6,5 points]

1. On donne l'expression analytique de la transformation **S** suivante : $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}. \end{cases}$
.
   (a) Déterminer l'écriture complexe de la transformation **S** . **0,75pt**
   (b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de **S** . **0,75pt**
   (c) Déterminer l'image par **S** du cercle de centre $A(-1;2)$ et de rayon $r = 3cm$. **0,5pt**
2. Soit f l'application , qui à tout nombre complexe $z \neq -2i$, associe $f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$.
   (a) Sachant que $z = x + iy$, déterminer $X, Y \in \mathbb{R}$ tels que : $f(z) = X + iY$. **0,75pt**
   (b) Déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
      i. $f(z)$ soit un imaginaire pur . **0,5pt**
      ii. $f(z)$ soit un réel . **0,5pt**
      iii. $\mid f(z) \mid = 1$. **0,5pt**
3. Sachant que $sinx = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, linéariser $f(x) = sin^4 x$ et déduire la primitive de f qui s'annule en 0 . **0,75pt**
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $(\sum)$: $\begin{cases} 2x + 4y + z = 14 \\ x + y + z = 12 \\ 3x + y + 2z = 14. \end{cases}$. **0,75pt**
   (b) Déduire les réels positifs x , y et z tels que : $\begin{cases} ln(x^2y^4z) = 14 \\ ln(xyz) = 12 \\ ln(x^3yz^2) = 14. \end{cases}$. **0,75pt**

Exercice 2 [4,5 points]

1. On considère la fonction f_{ab} définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = asinx + bsin^3x$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$. **0,75pt**
   (b) Vérifier que $f_{a,b}(x) = \frac{1}{9}[(8a+6b)sinx - f''_{a,b}(x)]$ . . **0,5pt**
   (c) En déduire une expression générale des primitives de la fonction $f_{a,b}$. **0,5pt**
2. (a) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{(U_n)^2}{2U_n - 1}$. Calculer U_1 et U_2 .

(b) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = ln(\frac{U_n - 1}{U_n})$.

i. Calculer V_0 , V_1 et V_2 . **0,75pt**

ii. Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2 . **0,75pt**

iii. Exprimer (V_n) en fonction de n . **0,25pt**

iv. Montrer que $U_n = \frac{1}{1 - e^{V_n}}$; déduire l'expression de (U_n) en fonction de n . **0,5pt**

v. Soit la somme $S_n = e^{V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}}$ .Montrer que $S_n = 2^{1-2^n}$. **0,5pt**

Problème [9 points]

Partie A [6 points]

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(lnx - 2)$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé .

1. On considère la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = lnx + x - 3$.
   (a) Étudier les variations de u et dresser son tableau de variation . **0,75pt**
   (b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$. **0,5pt**
   (c) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près et montrer que $ln\alpha = -\alpha + 3$. **1pt**
   (d) Déduire le signe de u suivant les valeurs de x . **0,5pt**
2. **Étude et tracé de la fonction f**
   (a) déterminer les limites de f quand x tend vers 0 et $+\infty$. **0,5pt**
   (b) Calculer la dérivée f' de f et montrer que de f' et u ont le même signe . **0,75pt**
   (c) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$ et dresser le tableau de variation de f . **0,5pt**
   (d) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près . **0,5pt**
   (e) Étudier les branches infinies à la courbe représentative de f . **0,25pt**
   (f) Représenter $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f . **0,75pt**

Partie B [3 points]

On considère dans $\mathbb{R}$, la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - ln(u_n). \end{cases}$.

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3 - lnx$.
   (a) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$. **0,25pt**
   (b) On considère l'intervalle $I = [2; 3]$.
      i. Calculer $g'(x)$ et montrer que $\forall x \in I$, $| g'(x) | \leq \frac{1}{2}$. **0,5pt**
      ii. Démontrer que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$. **0,5pt**
   (c) Utiliser l'inégalité des accroissement finies pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | u_n - \alpha |$. **0,5pt**
   (d) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $| u_n - \alpha | \leq (\frac{1}{2})^n$. **0,5pt**
   (e) En déduire la limite de la suite (u_n) . **0,25pt**
   (f) Déterminer , le plus petit entier naturel p tel que $| u_p - \alpha | \leq 10^{-5}$. **0,5pt**

Classe	Epreuve de Mathématiques	Séquence n^0 3	Coef	Durée
TD	Année 2020/2021		4	3H

PARTIE A : évaluation des ressources (15,5pts)

Exercice 1 : 3pts

QCM : Choisir la bonne réponse

1. $\lim_{x\to 0}\frac{(cosx)^2-1}{x}$ est égale à : 1pt

a)2 ; b) -2 ; c) 0 ; d) 1

2. L'argument du nombre complexe $z=-3(\cos\frac{\pi}{6}-isin\frac{\pi}{6})$ est : 1pt

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $-\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$; d) $-\frac{5\pi}{6}$

3. A, B, C et D sont les points d'affixes respectives $=1$; $b=i$; $c=-1$ *et* $d=-i$. 1pt

L'ensemble des points d'affixe z tel que $\frac{z+i}{z+1}$ soit imaginaire pur est :

a)La droite (CD) privée de C ; b) le segment [CD] privé de C ;
c)le cercle de diamètre [CD] privé de C ; d) la médiatrice de [AB].

Exercice 2 : 3,5pts

I/On considère le polynôme $p(z)=z^4+17z^2-28z+260$ où z est un nombre complexe.

1-Déterminer deux nombres réels a et b tels que $p(z)=(z^2+az+b)(z^2+4z+20)$ 0,5pt

2-Résoudre dans C l'équation $p(z)=0$. 1pt

II/1-Ecrire le nombre complexe $8i$ sous la forme exponentielle 0,5pt

2- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ sous la forme algébrique dé l'équation : $z^3=8i$

III/Le plan complexe est muni du repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_B=-\sqrt{3}+i$ et $z_C=-2i$.

1- Trouver le module et un argument de $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. 0,75pt

2- En déduire la nature exacte du triangle ABC. 0,5pt

3- Faire une figure 0,25pt

Exercice 3 : 4,5 pts

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 0,75pt
2. a) Démontrer que pour tout entier $n\geq 4$, $u_n\geq 0$ 0,5pt

b) En déduire que pour tout entier $n\geq 5$, $u_n\geq n-3$ 0,75pt

c)En déduire la limite de la suite (u_n) 0,75pt

3. On définit la suite $(\boldsymbol{v_n})$ par : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_n}=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$

a)Démontrer que la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est suite géométrique de premier terme $-\frac{25}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

b) Exprimer $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de . 0,25pt

c)En déduire que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$. 0,5pt

d) Montrer que (u_n) diverge . 0,25pt

f) Exprimer la somme $S_n=\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}+\cdots+\boldsymbol{v_{n-1}}$ en fonction de n . 0,5pt

g) Calculer S_{12} 0,25pt

Exercice 4 : 5,5pts

I/ Soit z_1=1+i et z_2= 1 +i$\sqrt{3}$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 . 0,5pt
2. Ecrire sous formes algébrique et trigonométrique les nombres complexes $z_1.z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$. 1,5pts
3. En déduire les valeurs de cos$\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$. 0,5pt

II/On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cosx + cos^2x$

1.Etudier la parité de f. 0,25pt

2.Montrer que f est 2π- périodique. 0,25pt

3.a) Montrer que $f'(x) = -sinx(1 + 2cosx)$ 0,5pt

b)Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,\frac{2\pi}{3}]$. 0,5pt

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[\frac{2\pi}{3}; \pi]$. 0,5pt

4. Montrer que l' équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $\alpha \in[0,\frac{2\pi}{3}]$. 0,5pt

5.Tracer la courbe de f sur $[0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$. 0,5pt

PARTIE B: évaluation des compétences (4,5pts)

Situation :

Un monsieur 'Y' signe un contrat de dépôt bloqué (aucune possibilité de retrait avant l'échéance) et sans frais avec sa banque pour que son capital de 1 million, déposé le 1er janvier 2021, soit remis avec une majoration à lui-même ou à ses ayant droits le 31 décembre de l'année T où ce capital doublera (c'est la maturité du contrat). M. 'Y', très peu familier des mathématiques, vous présente le contrat où est écrit « le montant des avoirs déposés évoluent suivant la formule suivante donnant au nombre d'année(s) écoulé(s) t, le montant $(1,03)^t$ *millions*». Le jour du dépôt initial du capital, le M. 'Y' apprend que son épouse vient d'accoucher sa fille qui restera son unique enfant 35 ans plus tard, à la mort de 'Y'. X, un de vos camarades de classe à qui M. 'Y' a présenté le contrat, dit qu'il aurait été plus profitable pour le monsieur, de placer ce capital d'un million au taux d'intérêt annuel composé de 4% sur 22ans dans une autre banque 'B', tout en payant 50000FCFA de frais annuels de tenue de compte.

Taches

1-Dire quand la fille ou M. 'Y' pourra au plus tôt récupérer les deux millions. 1,5 pt

2-Expliquer si la fille de Monsieur 'Y' sera vivante à la date de maturité T. 1,5pt

3-Conseiller M.'Y' sur le choix le plus avantageux pour lui entre le contrat initial et celui de la banque B. 1,5pt

MINESEC
DELEGATION REGIONALE DE L'OUEST
INSPECTION REGIONALE CHARGEE DE L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES
SOUS SECTION MATHEMATIQUES
EVALUATION N°1 TRIMESTRE II

Année scolaire 2019-2020
Classe : $T^{le}D$
Epreuve de Mathématiques
Coefficient : 04 Durée : 3h

EXERCICE 1 /4points

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} 5\ln x - 2\ln y + 3\ln z = 6 \\ -4\ln x + 3\ln y + \ln z = 0 \\ \ln x + 3\ln y - 2\ln z = 2 \end{cases}$$ **/1,5 pt**

2) On donne les intégrales $A = \int_0^{\pi} e^x cos^2 x dx$ $B = \int_0^{\pi} e^x sin^2 x dx$

a. Calculer $A + B$ puis $A - B$ **/1,5 pt**

b. En déduire les valeurs exactes de A et B **/1 pt**

EXERCICE 2 /5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 centimètres.

I/ On considère le polynôme complexe P définie par $p(z) = z^3 - 8$

1) a- Montrer que si z est racine de P alors $\bar{z}$ l'est aussi **/ 0,5 pt**

b- Déduire que P admet un entier comme racine. **/ 0,5 pt**

2) a- Déterminer les nombres α, β et δ tels que $p(z) = (z-2)(\alpha z^2 + \beta z + \delta)$ **/ 0,5 pt**

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$ **/ 1 pt**

II/ On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives

$a = -1 + i\sqrt{3}$; $b = 2$; $c = -1 - i\sqrt{3}$

1) Écrire a sous la forme trigonométrique, puis placer les points A, B, et C dans le plan. **/ 1pt**

2) f est l'application du plan dans le plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})z$.

a- Donner la nature et les éléments caractéristiques de f. **/ 0,5 pt**

b- Déterminer les images des points A et C par f. **/ 0,5 pt**

c- Donner alors une équation cartésienne de l'image de la droite (AC) par f **/ 0,5 pt**

PROBLEME /11 points

Les parties B et C sont dépendantes

Partie A :

1) (E_0) désigne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

Déterminer les solutions générales de (E_0) **/0,75 pt**

2) (E) est l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

a- Vérifier que la fonction h définie sur IR par : $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E) **/ 0,5 pt**

b- Démontrer que la fonction φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est une solution de (E_0) **/ 0,75 pt**

c- Déterminer les solutions de (E) **/ 0,5 pt**

d- Déterminer la solution particulière de (E) f_0 telle que $f_0(0) = 4$ et $f'_0(0) = 0$ **/ 1 pt**

Partie B :

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=(x+2)^2e^{-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 centimètre.

1) Étudier les variations de f et construire son tableau de variation. **/1,5 pt**

2) Construire avec soin la courbe (C) de f. **/ 1 pt**

3) En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E) et en calculant

$\int_0^x \left(f''(t)+2f'(t)+f(t)\right)dt$. Déterminer une primitive F de f sur IR. **/ 1 pt**

4) Pour tout entier naturel n on pose : $I_n=\int_0^n f(t)dt$

a- Calculer la dérivée de la fonction u définie par $u(x)=(-x^2-6x-10)e^{-x}$ **/ 0,5 pt**

b- Exprimer I_n en fonction de n et en donner une interprétation graphique. **/ 1 pt**

c- Etudier la convergence de la suite (I_n) **/ 0,5 pt**

Partie C :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+2n)^2e^{-\frac{k}{n}}\right)$$

1) Vérifier pour tout entier naturel non nul que :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=u_n+\frac{4e-9}{ne}$$ **/ 1,25 pt**

2) On suppose que pour tout entier naturel k tel que $0\le k\le n-1$ on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que l'on a :

$$u_n\le\int_0^1 f(t)dt\le u_n+\frac{4e-9}{ne}$$ **/ 0,75 pt**

« Tricher c'est renoncer à son intelligence, à ses valeurs morales, à sa capacité de surmonter les obstacles »
(M. René A. Dongmo)

COLLÈGE PRIVÉ LAÏC DU SAVOIR

B.P: 30201 - Yaoundé
Tél: 243 81 73 81

ÉVALUATION N° 3

Département: Mathématiques

Année Scolaire : 2019/2020
Classe : Tle D
Durée : 04 Heures
Coef : 4

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : 3,5points

1. Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivant :
   (1) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad K = \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$. **0,5pt**
   (2) $f(x) = 5(3x-1)^7$ $\quad K = \mathbb{R}$. **0,5pt**
2. On considère la fonction h: $\left]0; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0; 1]$ par $h(x) = \frac{1}{sinx}$
   a) Montrer que h est une bijection. **0,75pt**
   b) Calculer le nombre dérivée de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de la fonction réciproque f^{-1}. **0,75pt**
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout x élément de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq sinx \leq x$. **1pt**

Exercice 2 : 6,75points

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne trois points A, B et C d'affixes respectifs $Z_A = -1 - i\ , Z_B = 2 - i\ \ et\ \ Z_C = -1 + 2i$.
   a) Placer les points dans le repère. **0,5pt**
   b) Déterminer l'ensemble (L) des points M d'affixe z tel que :
   $|z - 2 + i| = |z + 1 - 2i|$. **0,5pt**
   c) Déterminer le module et un argument du complexe $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$. **0,75pt**
   d) En déduire la nature exacte du triangle ABC. **0,5pt**
   e) Déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right)$. **0,25pt**
   f) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. **0,5pt**
   g) Déterminer l'affixe du point $G = bar\{(A, -1)(B, 2)(C, 3)\}$. **0,5pt**

2. On désigne par S l'application qui a tout point $M(x, y)$ du plan associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$.
   a) Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M. **0,75pt**
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S. **0,75pt**
3. On considère la transformation du plan H dont l'écriture complexe est :
   $z' = -iz - 1 - i$.
   a) Déterminer la nature est les éléments caractéristiques de H. **0,75pt**
   b) On pose : $z' = x' + iy' et\ z = x + iy$. Exprimer $x' et\ y'$ en fonction de $x\ et\ y$. **0,5pt**
   c) Déterminer l'image (D') de la droite d'équation (D): $y = 2x + 1$ par H. **0,5pt**

PROBLEME : 9,75 points

Partie A : 3 points

On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{U_n}{2} \end{cases}$. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	0		$\sqrt{2}$		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \geq \sqrt{2}$. **0,75pt**
2. a) Exprimer la différence $U_{n+1} - U_n$ en fonction de U_n. **0,5pt**
   b) En déduire la suite (U_n) est décroissante. **0,75pt**
3. Justifier que la suite (U_n) est convergente puis calculer la limite. **1pt**

Partie B : 6,75points

1. Soit g la fonction définie sur IR par :$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$
   a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **0,75pt**
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$. **0,75pt**
   c) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$. **0,75pt**
   d) Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5pt**
2. On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$.
   a) Montrer que pour $x \neq 0$, $h'(x) = \frac{1}{3}\frac{g(x)}{x^2}$. **0,5pt**
   b) Dresser le tableau de variation de h. **1pt**
3. On note (C_h) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 3cm. I et B sont les points de (C_h) d'abscisses respectifs 1 et -1.
   a) Vérifier que la droite (BI) est la tangente en B à (C_h). **0,5pt**
   b) Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C_h). **0,5pt**
   c) Etudier la position de (C_h) par rapport à (T). **0,5pt**
   d) Construire (C_h) et (T). **1pt**

COLLÈGE PRIVÉ LAÏC DU SAVOIR

B.P: 30201 - Yaoundé
Tél: 243 81 73 81

ÉVALUATION N° 3

Département: Mathématiques

Année Scolaire : 2019/2020
Classe : Tle D
Durée : 04 Heures
Coef : 4

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : 3,5points

1. Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivant :
   (1) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad K = \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$. **0,5pt**
   (2) $f(x) = 5(3x-1)^7$ $\quad K = \mathbb{R}$. **0,5pt**
2. On considère la fonction h: $\left]0;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0;1]$ par $h(x) = \frac{1}{sinx}$
   a) Montrer que h est une bijection. **0,75pt**
   b) Calculer le nombre dérivée de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de la fonction réciproque f^{-1}. **0,75pt**
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout x élément de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq sinx \leq x$. **1pt**

Exercice 2 : 6,75points

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne trois points A, B et C d'affixes respectifs $Z_A = -1-i$, $Z_B = 2-i$ $\;et\;$ $Z_C = -1+2i$.
   a) Placer les points dans le repère. **0,5pt**
   b) Déterminer l'ensemble (L) des points M d'affixe z tel que :
   $|z-2+i| = |z+1-2i|$. **0,5pt**
   c) Déterminer le module et un argument du complexe $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$. **0,75pt**
   d) En déduire la nature exacte du triangle ABC. **0,5pt**
   e) Déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$. **0,25pt**
   f) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. **0,5pt**
   g) Déterminer l'affixe du point $G = bar\{(A,-1)(B,2)(C,3)\}$. **0,5pt**

2. On désigne par S l'application qui a tout point $M(x,y)$ du plan associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x-y+2 \\ y' = x+y-1 \end{cases}$.
   a) Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M. **0,75pt**
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S. **0,75pt**
3. On considère la transformation du plan H dont l'écriture complexe est :
   $z' = -iz-1-i$.
   a) Déterminer la nature est les éléments caractéristiques de H. **0,75pt**
   b) On pose : $z' = x'+iy' et\; z = x+iy$. Exprimer $x' et\; y'$ en fonction de $x\; et\; y$. **0,5pt**
   c) Déterminer l'image (D') de la droite d'équation (D): $y = 2x+1$ par H. **0,5pt**

PROBLEME : 9,75 points

Partie A : 3 points

On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{U_n}{2} \end{cases}$. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \geq \sqrt{2}$. **0,75pt**
2. a) Exprimer la différence $U_{n+1} - U_n$ en fonction de U_n. **0,5pt**
   b) En déduire la suite (U_n) est décroissante. **0,75pt**
3. Justifier que la suite (U_n) est convergente puis calculer la limite. **1pt**

Partie B : 6,75points

1. Soit g la fonction définie sur IR par :$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$
   a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **0,75pt**
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$. **0,75pt**
   c) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1. **0,75pt**
   d) Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5pt**
2. On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$.
   a) Montrer que pour $x \neq 0$, $h'(x) = \frac{1}{3}\frac{g(x)}{x^2}$. **0,5pt**
   b) Dresser le tableau de variation de h. **1pt**
3. On note (C_h) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 3cm. I et B sont les points de (C_h) d'abscisses respectifs $1 \ et -1$.
   a) Vérifier que la droite (BI) est la tangente en B à (C_h). **0,5pt**
   b) Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C_h). **0,5pt**
   c) Etudier la position de (C_h) par rapport à (T). **0,5pt**
   d) Construire $(C_h) \ et \ (T)$. **1pt**

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LYCÉE DE GUIDER
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Année scolaire 2020-2021
évaluation N^o : 3 ; Classe :$T^{le}D$
Durée : 3h ; Cof : 4

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES 15.5 points

EXERCICE 1. *3 points*

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisir Aucune justification n'est demandée.
Réponse juste un point ; réponse inexacte -0.5 point ; absence de réponse compte 0 point.

1. *Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ le système d'équations* $\begin{cases} \ln x + \ln y + \ln z = 6 \\ -2\ln x + \ln y + 4\ln z = 12 \\ 6\ln x + 3\ln y - 4\ln z = 0 \end{cases}$ *a pour ensemble solution dans $\mathbb{R}^3$ est :*

   a) $\{(-e, e^2, e^3)\}$; *b)* $\{(e, e^2, e^3)\}$; *c)* $\{(e^2, e, e^3)\}$ *d) pas de solution* 0.5 pt

2. *L'ensemble solution de l'inéquation $\ln(\ln x) > 0$ dans $*\mathbb{R}$ est :*

   a) $]0; +\infty[$; *b)* $[1; +\infty[$; *c)* $\left]e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$; *d)* $]e; +\infty[$ 0.5 pt

3. *L'ensemble des réels x pour lesquels $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ est un réel est :*

   a) $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$; *b)* $]1; +\infty[$; *c)* $\mathbb{R} - \{-1\}$; *d)* $\mathbb{R}$ 0.5 pt

4. *La dérivée de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(-x)}{\ln x}$ est :*

   a) 0 ; *b)* $\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2}$; *c)* $-\dfrac{\ln x + \ln(-x)}{x(\ln x)^2}$; *d) n'admet pas de fonction dérivée.* 0.5pt

5. *Une primitive sur $]2, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{3}{2-x}$ est :*

   a) $-3\ln(2-x)$; *b)* $3\ln(2-x)$; *c)* $\dfrac{1}{3}\ln(2-x) + C$; *d)* $1 - 3\ln(x-2)$ 0.5 pt

6. *Si* $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ *alors : a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$; *c) On ne peut rien dire sur la* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; *d)* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ 0.5 pt

EXERCICE 2. *3 points*

1. *Soit (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère l'application F qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = u^2 z + u - 1$, $u \in \mathbb{C}$.*

   (a) *Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation. Caractériser F pour chacune des valeurs de u trouvées.* 1 pt

   (b) *Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Caractériser F pour chacune des valeurs de u trouvées.* 1 pt

   (c) *Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport $k = -2$. Caractériser F pour chacune des valeurs de u trouvées.* 1 pt

EXERCICE 3. *9.5 points*

I- On considère la fonction définir sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

   (a) *Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$* 0.5pt

(b) *Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α tel que* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ 0.5pt

II- *On considère la fonction g définir sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).*

(a) *Calculer les limites de g au bornes de son ensemble de définition.* 0.5pt

(b) *Étudier les branches infinies à $(\mathcal{C})$* 0.5pt

(c) *Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0; +\infty[$.* 1pt

(d) *En déduire que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; $\frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{3}{5}$ et que $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$ dans cet intervalle.* 1pt

(e) *Construire $\mathcal{C}$* 1.5pt

(f) *Démontrer qu'un nombre réel $x > 0$ est solution de l'équation $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$.* 0.25pt

III- *On considère la suite (u_n) définir par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = g(u_n)$.*

(a) *En utilisant le sens de variation de la fonction g , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.* 1.25pt

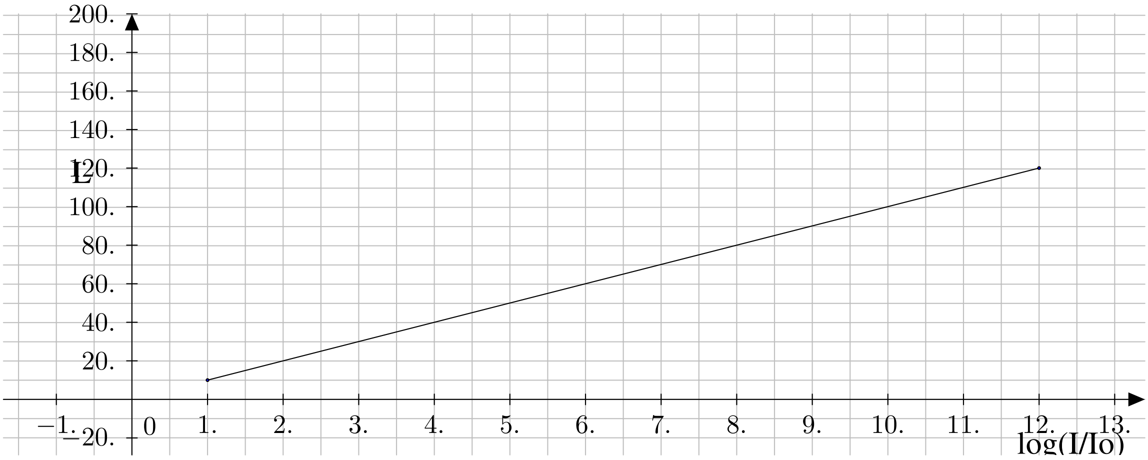
(b) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|$.* 1pt

(c) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et en déduire que la suite (u_n) converge vers α.* 1pt

(d) *Déterminer une valeur approchée de α à 5×10^{-4} près* 0.5pt

<u>PARTIE B</u> : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES 4,5 points

Lors de l'animation d'une soirée dansante de votre classe, votre camarade utilise un dispositif constitué de dix haut-parleurs identiques , de quinze plaques d'isolation phonique permettant d'absorber l'intensité acoustique du son qui lui parvient et d'un PC dont sur l'écran on peut visualiser la courbe représentative sur papier semi-logarithmique de la fonction niveau sonore L (en dB), en fonction du rapport $\frac{I}{I_0}$ où I est l'intensité acoustique du son étudier et I_0 l'intensité acoustique du seuil d'audibilité de l'oreille humaine $(I\ et\ I_0\ en\ W/m^2)$. Il est sans ignorer que le seuil de danger pour l'oreille humaine est à $90dB$. On donne $I_0 = 10^{-12}W.m^{-2}$ et pour un haut-parleur $I = 10^{-2}W.m^{-2}$, de plus I est proportionnelle au nombre de haut-parleurs connectés au PC et une plaques d'isolation phonique permet d'absorber 8% de l'intensité du son qui lui parvient. Sur l'écran du PC on observe la courbe si-dessous :



Tâche 1 Exprimer L en fonction du rapport $\frac{I}{I_0}$ 1,5 pt

Tâche 2 Les dix haut-parleurs sont-ils dangereux pour l'audibilité de vos camarades ? 1,5 pt

Tâche 3 Dispose t'il assez de plaques pour réduire le niveau sonore émis par les dix haut-parleur au $\frac{3}{4}$. 1,5 pt