

COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P.: 765 Ydé - Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES	CONTROLE	Situation n°2 Date: 26 Octobre 2024
Niveau: Tle D et Tle TI	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 3H45 Coefficient: 4

PARTIE A : Evaluation des ressources (15points)

EXERCICE 1 : 4,5 points

- I. On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - (3 + 7i)z^2 + (-12 + 15i)z + 18 + 4i$
- Montrer que P admet une racine réelle z_0 et une racine imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. 1,5pt
 - En déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$. 1pt
- II. Linéarisation
- Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$. 1pt
 - Linéariser $\cos^3 x \sin^4 x$. 1pt

EXERCICE 2 : 6,5 points

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 2i$; $b = -3$; $c = 2 - i$; $d = -3i$

- Calculer les quotients $\frac{a-b}{a-c}$ et $\frac{d-b}{d-c}$ et donner les résultats sous forme algébrique. 0,5pt
- En déduire la nature exacte de chacun des triangles ABC et DBC. 0,75pt
- Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. 0,75pt
- On considère la transformation du plan S de centre A qui transforme B en C.
 - Montrer que S a pour écriture complexe : $z' = iz + 2 + 2i$ 0,5pt
 - En déduire l'expression analytique de S . 0,5pt
 - En déduire l'image par S de la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$. 0,5pt
 - Déterminer l'image par S du cercle de centre C et de rayon 2 cm. 0,5pt
 - On considère la transformation du plan g d'écriture complexe $z' = (1 - i)z - 2$
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques de g
 - Déterminer l'écriture complexe de la transformation goS . 0,75pt
 - Soit f la similitude de centre B qui transforme A en C.
Placer les points A, B et C dans le repère et déterminer l'angle et le rapport de f . 1pt
- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\left| \frac{z+3}{z-2+i} \right| = 1$ 0,75pt

EXERCICE 3 : 4 points

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) et donner les solutions sous forme exponentielle 1pt
2. On pose $z_0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$; $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$; $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$
 - a- On pose $S = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$, montrer que $S = 0$. 0,75pt
 - b- En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$ 0,5pt
 - c- Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation (E') : $4x^2 + 2x - 1 = 0$ 0,75pt
 - d- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E') et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$. 1pt

Partie B : Evaluation des compétences (5 points)**Situation**

Alain est un jeune garçon de 16 ans. Il reçoit comme cadeau de son père un téléphone Android pour avoir brillamment obtenu son probatoire. Constatant que le téléphone est verrouillé, son papa en bon farceur lui dit que le code de déverrouillage est le nombre obtenu en multipliant son âge par le carré du module du nombre complexe solution dans \mathbb{C} de l'équation : $z^2 - (8 - 6i)z + 7 - 24i = 0$.

Pendant le premier trimestre en terminale, Alain a résolu deux problèmes proposés par son père et qui consistait à déterminer les aires des terrains 1 et 2 de son père, dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé d'unité graphique est le décimètre.

- Le terrain 1 est constitué des points M d'affixes z tels que $2 \leq |z + 3 - 5i| \leq 4$
- Le terrain 2 est un quadrilatère dont les quatre sommets sont les images des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$, où P est un polynôme complexe définie par :
 $P(z) = z^4 + 6z^3 + 7z^2 - 6z + 442$ et qui vérifie les propriétés suivantes :
 - Si α est une racine de P alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P
 - $P(2 - 3i) = 0$ et $P(-5 + 3i) = 0$

On donne $\pi = 3,14$

Tâches :

- 1) Déterminer le code de déverrouillage du téléphone d'Alain. 1,5pt
- 2) Déterminer l'aire du terrain 1 du père d'Alain. 1,5pt
- 3) Déterminer l'aire du terrain 2 du père d'Alain. 1,5pt

Présentation : 0,5pt