COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2024-2025
Département de Mathématiques	MINI SESSION-Novembre 2024	Situation 2
ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES		
Niveau : TC-TCE	Durée : 3H45min	coefficient : 7

L'épreuve comporte deux grandes parties indépendantes réparties sur deux pages

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : (03,75 points)

1) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur si et seulement si $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0$. **0,5pt**

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3 - (3+2i)z^2 + 3(1+i)z - 4i = 0$.
   a) Montrer que $1 - i$ est une solution de (E). **0,25pt**
   b) En déduire que (E) est équivalente à : $(z - 1 + i)(z^2 - (2+3i)z - 2 + 2i) = 0$. **0,5pt**
   c) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$. **0,75pt**
   d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1pt**

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = i$; $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 + 2i$. Soit f une transformation du plan de centre A telle que $f(B) = C$. Déterminer l'écriture complexe de f et préciser sa nature. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (05,50 points)

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$. **1pt**

2) On rappelle que le petit théorème de Fermat est l'énoncé suivant : ≪ Si p est un nombre premier et a un entier naturel non nul, alors on a : $a^p \equiv a[p]$. De plus, si $PGCD(a;p) = 1$, alors on a : $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ≫.

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q.
   a) Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$. **0,5pt**
   b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$. **0,5pt**
   c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$. **0,5pt**
   d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3[221]$. **0,75pt**

3) On se propose de déterminer les entiers relatifs N vérifiant le système : $(S): \begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$.
   a) Vérifier que 239 est solution de ce système. **0,5pt**
   b) Soit N un entier relatif solution du système (S). Justifier qu'il existe $(x:y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $N = 1 + 17x$ et $= 5 + 13y$. **0,5pt**
   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $17x - 13y = 4$. (on remarquera que $(1;1)$ est une solution particulière). **0,75pt**
   d) En déduire que $N \equiv 18[221]$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (05,75 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u};\,\vec{v})$, on considère les points A et C d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $z_C = z_A + \overline{z_A}$. On désigne par (Γ_1) le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ et K le point d'affixe $z_k = -2i\sqrt{2}$.

1) a) Montrer que $z_A = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et construire le point A. **0,5pt**
   b) Vérifier que z_C est un nombre réel puis construire le point C. **0,75pt**

c) Montrer que A est le milieu du segment $[CK]$. **0,25pt**

2) Soit θ un reel de l'intervalle $[0; 2\pi[$ et M le point d'affixe $z = z_A + 2\sqrt{2}e^{i\theta}$.
Montrer que lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$, l'ensemble (Γ_2) des points M d'affixe z du plan est le cercle de diamètre $[CK]$. **0,5pt**

3) Soit B le point d'affixe $Z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$.
a) Montrer que la droite $(0B)$ est tangente est tangente au cercle (Γ_2). **0,5pt**
b) Justifier que B est un point de (Γ_1). **0,25pt**

4) On suppose dans la suite que le point M appartient à l'arc orienté $\widehat{CK}$ privé des points C et K.
On désigne par $S(\theta)$ l'aire du triangle CKM.
a) Vérifier que $mes(\widehat{\vec{u}.\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et que $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right[$. **0,5pt**
b) Montrer que $MK = 2\sqrt{2}\left|e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{6}}\right|$ et $MC = 2\sqrt{2}\left|e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right|$. **1pt**
c) Vérifier que $e^{i2\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} = 2i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}$. **0,5pt**
d) Montrer que $S(\theta) = 8\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$. **0,5pt**
e) Déterminer la valeur de $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right[$ pour laquelle $S(\theta)$ est maximale. **0,5pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (05 points)

Situation :

Après son admission à la retraite, monsieur Eyebe, précédemment professeur de mathématiques, a été désigné pour être le nouveau chef de sa collectivité. Comme il est de coutume, le nouveau chef doit se faire confectionner une tenue spéciale pour l'intronisation. C'est ainsi que Eyebe a décidé de se confectionner une tenue qui reflète sa profession. Afin de garder secrète les spécificités de la tenue, il confie à son fils John, élève en terminale C, des informations codées à décrypter au couturier chargé de la confection de la tenue. C'est ainsi qu'il a été retenu que le couturier devra disposer de deux types de perles T_1 et T_2. Les perles du type T_1 seront réparties seront répartis sur le pantalon et celles du type T_2 sur la chemise. John a été informé que le nombre de perles de type T_1 est $b = \overline{38x6}$ où x est le plus grand entier naturel tel que b soit divisible par 3 ; et le nombre a de perle de type T_2 est la plus petite valeur de l'entier n tel que le nombre complexe $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n$ soit imaginaire pur.

L'intronisation de monsieur Eyebe se fera sur un terrain ayant la forme d'un triangle ABC rectangle en A. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé directe $(0\,;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique : 2 mètres) le point B a pour affixe $z_B = -1$ et les affixes des sommets B et C sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (2+8i)z - 15 + 10i = 0$ avec $z_B \in i\mathbb{R}$. Une bande traditionnelle sera utilisée pour recouvrir toute la surface de ce terrain. Cette bande est vendu à 10 000 FCFA le mètre carré. Plusieurs enfants ont été chargés de la préparation du lieu d'intronisation. 79 chaises ont été déplacées de la grande cage traditionnelle vers la cour où aura lieu la cérémonie par un groupe d'enfants constitués de garçons et filles. Les garçons ont chacun pris 11 chaises et les filles ont pris chacune 8 chaises. Il y a plus de garçons que de filles dans le groupe.

Tâches :

1) Déterminer le nombre de perles de type T_1 et le nombre de perle de type T_2. **1,5pt**
2) Déterminer le budget à prévoir pour couvrir toute la surface du terrain avec la bande traditionnelle. **1,5pt**
3) Déterminer le nombre de garçons et de filles ayant procédé au déplacement des chaises. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt