COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2024-2025
Département de Mathématiques	CONTROLE	Situation Scolaire N°1 Date : 05 Octobre 2024

	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	
Niveau : Tle C	Durée : 03 heures 30 minutes	Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES — 15,5 POINTS

Exercice 1 : 03,50 Points

Soit n un entier naturel, on pose $S=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ et $k=E\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ où E désigne la partie entière d'un nombre réel. L'objectif de cet exercice est de déterminer la parité de k.

1- Soient a et b deux nombres réels. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k b^{n-k}$. **1pt**

2- Montrer que l'on a : $S-1\leq(2+\sqrt{3})^n<S$. **0,5pt**

3- Montrer que $S=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^{n-k}(1+(-1)^k)(\sqrt{3})^k$. **0,75pt**

4- Montrer alors que S est un entier pair. **0,75pt**

5- En déduire la parité de k. **0,5pt**

Exercice 2 : 05 Points

A- Soit p un nombre premier et n un entier naturel. On désigne par A la somme des diviseurs positifs de p^n.

1- Donner l'expression de A_n en fonction de n et p. **0,5pt**

2- On suppose pour la suite que $p=7$.

a) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 10. **0,5pt**

b) Vérifier que l'on a : $6A_n+1=7^{n+1}$. **0,5pt**

c) Déterminer suivant les valeurs de n le chiffre des unités de A_n. **1pt**

B- Soit n un entier naturel. On pose $B_n=2^n+3^n+4^n+5^n$ et $C_n=100^n+101^n+102^n+103^n$.

1- Déterminer le reste dans la division euclidienne par 7 de chacun des nombres suivants : 2^6 ; 3^6 ; 4^6 et 5^6. **0,5pt**

2- Montrer que $B_{n+6}-B_n$ est divisible par 7. **0,5pt**

3- On désigne par r le reste dans la division euclidienne de n par 6. Montrer que $B_n\equiv B_r[7]$. **0,5pt**

4- En déduire les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7. **0,5pt**

5- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles C_n est divisible par 7. **0,5pt**

Exercice 3 : 07 Points

A. Soient (x_n) et (y_n) des suites d'entiers relatifs, définies par : $\begin{cases} x_0=3;\ y_0=1 \\ x_{n+1}=\frac{6}{5}x_n+\frac{2}{5}y_n+1 \\ y_{n+1}=\frac{2}{5}x_n+\frac{9}{5}y_n+2 \end{cases}$.

1- Démontrer que pour tout entier naturel n les points $M_n(x_n;\ y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation $2x-y-5=0$. Puis Vérifier que l'on a : $x_{n+1}=2x_n-1$. **1pt**

2- Soit n un entier naturel.

a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5. **0,5pt**

b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux. **0,5pt**

3- a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n=2^{n+1}+1$. **0,5pt**

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}. ***0,5pt***

c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5. ***0,5pt***

B. Dans cette partie, nous allons chercher le reste de x_n dans la division euclidienne par 3.

1- Calculer x_1, x_2, x_3 et x_4. Puis faire une conjecture. ***1pt***

2- Montrer que pour tout entier naturel n, on a $x_{n+2} \equiv x_n[3]$. ***0,5pt***

3- En déduire que pour tout entier naturel k, on a $x_{2k} \equiv 0[3]$ et $x_{2k+1} \equiv 2[3]$. ***1,5pt***

4- Valider la conjecture émise à la question B.1. ***0,5pt***

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES — 04,5 POINTS

Situation :

Pour faire voyager sa fille Séréna, qui vient d'avoir son baccalauréat C, Monsieur Onana décide de vendre à 2000 francs le mètre carré, la moitié de son terrain ayant la forme d'un triangle rectangle. Monsieur Onana a un acheteur mais il a oublié la superficie exacte de son terrain, il remet donc un bout de papier à sa fille où tous les renseignements pouvant aider s'y trouve.

Mon terrain a la forme d'un triangle rectangle tel que tous les côtés soient des entiers multiples de 12. J'ai planté sur toute la bordure 24 arbustes régulièrement espacés de 12 mètres et tel sur chaque sommet un arbre soit planté.

Dans le pays où va Séréna, le gouvernement avait commencé un peu avant 2015 à construire une première cité universitaire contenant un certain nombre de chambres pour étudiants dans une ville. L'année suivante, on construit dans une autre ville universitaire une deuxième cité ayant une chambre de plus que la première. Chaque année voit ainsi la construction d'une nouvelle cité universitaire (dans une nouvelle ville) possédant une chambre supplémentaire que la précédente. En fin 2023 Séréna se rend compte que le gouvernement a fait construire au total 2024 chambres pour les étudiants.

Le concierge de la cité a glissé sous la porte de Séréna sa facture pour la consommation des 85 kilo watt d'électricité durant le mois. Malheureusement une souris est passée par là et certains chiffres ont disparus sur le montant total. On lit maintenant ● **9** ● **0** francs. Elle sait quand même que le prix d'un kW est un multiple de 10 et qu'il est inférieur à 100 francs. Les ● désignent les taches faites par la souris.

Tâches :

1- Déterminer le montant de la facture de Séréna. ***1,5pt***

2- Déterminer le nombre de chambres de la plus grande cité dans ce pays. ***1,5pt***

3- Déterminer la somme reçue par M. Onana pour la vente de sa parcelle. ***(Aide : en désignant par a, b et c le nombre d'arbres sur chaque côté avec $c > a > b$, on pourra vérifier que $c < 12$ et aussi utiliser le faite que a et b sont solutions d'une équation du second degré).*** ***1,5pt***