EXERCICES RÉSOLUS

1^{re} S

Mathématiques

Des rappels de cours

Plus de 150 exercices

classés par thèmes,
avec indication :
- du niveau de difficulté
- du temps moyen de résolution

Des corrigés détaillés

assortis de conseils

5 interros corrigées

TOME 1 :
Analyse

RELIURE QUI MAINTIENT LE LIVRE À PLAT PRATIQUE

HACHETTE Éducation

EXERCICES RÉSOLUS

1re S

Mathématiques

CLAUDINE RENARD
GENEVIÈVE ROCHE

TOME 1 :
Analyse

HACHETTE
Éducation

CONCEPTION GRAPHIQUE

Couverture : Alain Vambacas
Intérieur : Jehanne Marie Husson

COMPOSITION ET MISE EN PAGE

NDL Communication

DESSINS TECHNIQUES

NDL Communication

I.S.B.N. 2.01.168357.2
www.hachette-education.com

Préface

Ce volume d'exercices mathématiques traite les thèmes de la partie *Analyse* du **nouveau programme de Première S**, l'autre volume traite ceux des parties *Géométrie*, *Statistiques* et *Probabilités*. En début d'ouvrage, un sommaire détaillé vous permet d'accéder rapidement au thème recherché.

Le livre est organisé en 10 chapitres (et deux annexes). Dans chacun d'eux vous trouverez un bref rappel du cours, des exercices et leurs corrigés.

■ **Le résumé du cours** rappelle les notions et résultats essentiels.

■ Pour les assimiler progressivement, des exercices groupés par thèmes et, à l'intérieur de chaque thème, par ordre de difficulté croissante, vous familiariseront avec les notions et techniques exigibles en Première S.

La difficulté des exercices est signalée par des pictogrammes ★ placés en regard des énoncés de façon que chacun puisse évaluer son niveau.

Le barème retenu est le suivant :

★ Exercice de base.

★★ Exercice nécessitant davantage de méthode et de réflexion.

★★★ Exercice difficile destiné à ceux qui souhaitent approfondir la notion du chapitre.

Une durée indicative de résolution du problème figure également avant chaque exercice. Ce temps a été estimé pour un bon élève et doit donc vous permettre de situer votre niveau d'entraînement.

■ Tous les **exercices** sont **corrigés intégralement**, dans un langage simple et rigoureux. Les différentes étapes de raisonnement et de calcul sont exposées avec précision et de nombreuses représentations graphiques visualisent les situations traitées.

De larges explications sur **l'utilisation de la calculatrice** vous sont apportées dans les deux annexes figurant en fin d'ouvrage. Au fil des corrigés, **des copies d'écran** de la calculatrice viennent illustrer les explications.

Le coin des interros vous propose **cinq devoirs**, qui couvrent tous les thèmes du programme. Vous pourrez les résoudre en temps limité, en vous plaçant ainsi dans les conditions d'un devoir en classe.
Ces interros, **corrigées**, vous permettent de faire un bilan de vos connaissances.

Nous sommes persuadées que cet ouvrage vous apportera une aide précieuse dans votre travail durant cette année scolaire et vous préparera efficacement à la classe de terminale.

Il nous reste à vous souhaiter bon courage !

Les auteurs

SOMMAIRE

Analyse

Le coin des interros

Index des mots clés

Les pages indiquées en gras sont des pages de rappels de cours.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Rappels de cours

I- Ensemble de définition

Définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels qui admettent une image par f ; on note usuellement $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.

Exemples

• L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$ (car tout nombre réel admet un cube).

• L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$ (car les seuls réels qui admettent une racine carrée sont les réels positifs ou nuls).

II- Courbe représentative

Définition

Le plan étant rapporté à un repère, **la courbe représentative** d'une fonction f est la courbe d'équation : $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x\,,f(x))$, x décrivant l'ensemble de définition de f.

Propriété

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction, alors toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe $\mathscr{C}$ en au plus un point.

III- Parité, imparité

Définitions

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

• f est **paire** si, et seulement si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = f(x)$$

• f est **impaire** si, et seulement si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

Propriétés

• Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

IV- Périodicité

Définition

• Soit T un réel non nul ; une fonction f est **périodique de période** T (ou T-périodique) si, et seulement si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$x + T \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

• Une fonction f est périodique si, et seulement s'il existe un réel T non nul tel que f soit T-périodique.

Propriété

Le plan étant rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction T-périodique est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

V- Sens de variation

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• f est **croissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\text{si } x \leqslant x', \text{ alors } f(x) \leqslant f(x')$$

(f conserve les inégalités larges).

• f est **décroissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\text{si } x \leqslant x', \text{ alors } f(x) \geqslant f(x')$$

(f renverse les inégalités larges).

• f est **strictement croissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\text{si } x < x', \text{ alors } f(x) < f(x')$$

(f conserve les inégalités strictes).

• f est **strictement décroissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\textbf{si } x < x', \quad \textbf{alors } f(x) > f(x')$$

(f renverse les inégalités strictes).

VI- Minorant, majorant, extrema d'une fonction

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

Définitions

• Un réel m est **un minorant** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$m \leqslant f(x)$$

• Un réel M est **un majorant** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$f(x) \leqslant M$$

• $f(x_0)$ est **le minimum** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

• $f(x_0)$ est **le maximum** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

Propriétés

• Le minimum de f sur I, s'il existe, est un minorant m de f sur I tel que l'on puisse trouver au moins un élément x_0 de I qui vérifie :

$$f(x_0) = m.$$

• Le maximum de f sur I, s'il existe, est un majorant M de f sur I tel que l'on puisse trouver au moins un élément x_0 de I qui vérifie :

$$f(x_0) = M.$$

VII- Opérations sur les fonctions

Définitions

Soient u, v des fonctions et λ un nombre réel.

• $u + \lambda$ est la fonction $x \mapsto u(x) + \lambda$.

• $u + v$ est la fonction $x \mapsto u(x) + v(x)$.

• $u \times v$ est la fonction $x \mapsto u(x) \times v(x)$. On note souvent uv pour $u \times v$.

Propriétés

Soient u, v des fonctions et λ un nombre réel.

- u et $u + \lambda$ ont le même sens de variation.

- Si u et v sont croissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est croissante sur I.

Si u et v sont décroissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est décroissante sur I.

Si u et v sont strictement croissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est strictement croissante sur I.

Si u et v sont strictement décroissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est strictement décroissante sur I.

- Si $\lambda > 0$, alors λu a le même sens de variation que u ;
  si $\lambda < 0$, alors λu et u ont des sens de variation contraires.

VIII- Composition de fonctions

Définition

Si u est une fonction définie sur un intervalle I, si v est une fonction définie sur un intervalle J, et si, pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J, alors la composée de u par v est la fonction, notée $v \circ u$, et définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v[u(x)]$$

Propriétés

Avec les mêmes notations que précédemment :

- si u et v sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, alors $v \circ u$ est croissante ;

- si l'une des fonctions u, v est croissante et l'autre décroissante, alors $v \circ u$ est décroissante ;

- si u et v sont toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes, alors $v \circ u$ est strictement croissante ;

- si l'une des fonctions u, v est strictement croissante et l'autre strictement décroissante, alors $v \circ u$ est strictement décroissante.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 23)

Sachant que f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$:

1° que vaut $f(0)$?

2° que peut-on dire de la fonction $x \mapsto f(x) + f(-x)$?

2

(Corrigé p. 23)

Sachant que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est périodique de période 6, que peut-on en déduire concernant la fonction :

1° $f_1 : x \mapsto 3f(x) - 4$? **2°** $f_2 : x \mapsto f(x+1)$? **3°** $f_3 : x \mapsto f(2x)$?

3

(Corrigé p. 23)

Sachant que la fonction f admet 2 pour maximum sur $\mathbb{R}$, que peut-on en déduire concernant :

1° la fonction $3f - 5$? **2°** la fonction $-f$?

4 Vrai ou faux ?

(Corrigé p. 24)

1° $x \mapsto \sqrt{x^2+1} + 2$ est la composée de $x \mapsto x^2 + 1$ par $x \mapsto \sqrt{x} + 2$.

2° $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ s'obtient en composant successivement, dans cet ordre :

$$x \mapsto x+4\,,\ x \mapsto x^2\,,\ x \mapsto \frac{1}{x}.$$

3° $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$ est la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ par $x \mapsto 5x+2$.

5

(Corrigé p. 25)

Soit f une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Donner le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

$$-3f\,,\ f+2\,,\ 2f+1\,,\ f \circ f.$$

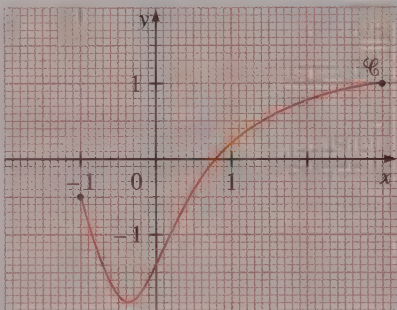
6

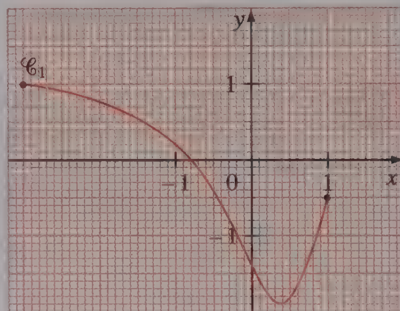
(Corrigé p. 25)

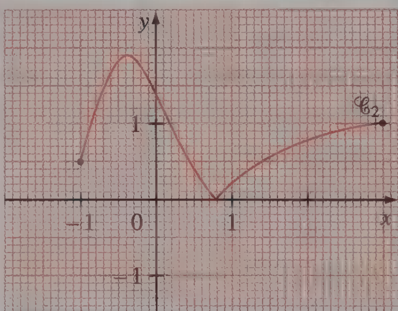
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
Associer chacune des fonctions :

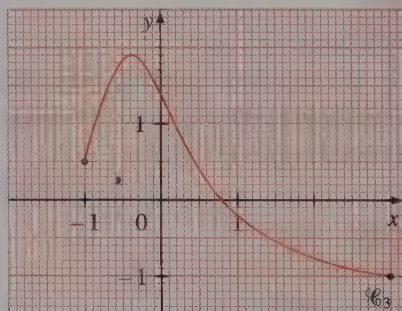
$$x \mapsto -f(x)\ ,\ \ x \mapsto |f(x)|\ ,$$
$$x \mapsto f(|x|)\ ,\ \ x \mapsto f(-x)$$

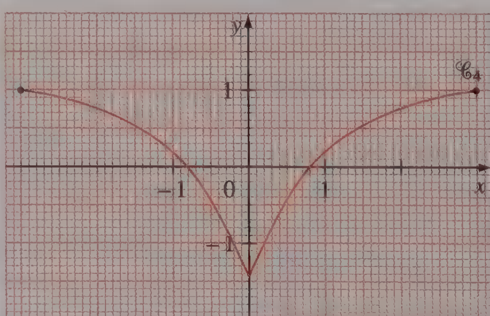
à sa courbe représentative à choisir parmi $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$.











EXERCICES d'entraînement

Ensemble de définition

7 ★ 15 min (Corrigé p. 25)

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto \dfrac{2x-5}{x^2+1}$; **2°** $x \mapsto \dfrac{3x-7}{x^2-9}$;

3° $x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-1)(x+5)}$; **4°** $x \mapsto \sqrt{x+\pi}$;

5° $x \mapsto \sqrt{(x+1)(3x-1)}$; **6°** $x \mapsto \sqrt{x^2+2x+1}$.

8 ★ 5 min (Corrigé p. 26)

1° Les fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^3}$ et $f_2 : x \mapsto (\sqrt{x})^3$ sont-elles égales ?

2° Les fonctions $g_1 : x \mapsto \sqrt{x^4}$ et $g_2 : x \mapsto (\sqrt{x})^4$ sont-elles égales ?

Parité, périodicité

9 ★ 10 min (Corrigé p. 27)

Étudier la parité de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto \dfrac{2x^2-5}{x^2+2}$; **2°** $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$; **3°** $x \mapsto x^2-4x+5$.

10 ★★ 10 min (Corrigé p. 28)

Que peut-on dire :

1° de la composée d'une fonction impaire par une fonction paire (supposées toutes deux définies sur $\mathbb{R}$) ?

2° de la composée de deux fonctions impaires (supposées définies sur $\mathbb{R}$) ?

11 ★★ 10 min

(Corrigé p. 28)

On considère la fonction f, paire et périodique de période 4, telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0\,;2]\,,\ f(x) = \frac{3}{2}x - 1\,.$$

1° Tracer la courbe représentative de f sur $[-2\,;6]$.

2° Calculer $f(x)$ en fonction de x lorsque $x \in [-2\,;0]$, puis $x \in [2\,;4]$; vérifier les résultats graphiquement.

12 ★ 5 min

(Corrigé p. 29)

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin x \cos x$ est périodique de période π.

13 ★★ 10 min

(Corrigé p. 30)

1° Soient a et b des réels, a étant non nul.

a. Démontrer que $\dfrac{2\pi}{|a|}$ est une période de la fonction $g : x \mapsto \sin(ax + b)$.

b. Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \cos(ax + b)$ concernant sa périodicité ?

2° Préciser une période de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto 4 \sin\left(\dfrac{\pi - x}{3}\right)$; **b.** $g : x \mapsto \cos\left(\pi\left(x - \sqrt{2}\right)\right)$.

14 ★★ 10 min

(Corrigé p. 31)

1° Démontrer que 4π est une période de la fonction : $x \mapsto \cos \dfrac{x}{2}$.

Que dire de 8π ? de 12π ?

2° Déterminer une période de la fonction $f : x \mapsto \cos \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{x}{3}$.

15 ★★ 10 min

(Corrigé p. 32)

1° Démontrer que, si un réel a vérifie :

pour tout réel x, $a + \sin(x + a) = \sin x$, alors $a = 0$.

(On pourra s'intéresser aux égalités obtenues en prenant $x = 0$, $x = \pi$).

2° En déduire que la fonction $f : x \mapsto x + \sin x$ n'est pas périodique.

Sens de variation

16 ★★ 10 min (Corrigé p. 32)

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction :

$$f : x \mapsto 2x^2 + 3x$$

sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

17 ★★ 10 min (Corrigé p. 33)

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

sur l'intervalle $]-\infty\ ;1[$.

18 ★★ 10 min (Corrigé p. 33)

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Tableau de variation, maximum, minimum

19 ★ 5 min (Corrigé p. 34)

Soit f une fonction.
Dire pourquoi le tableau de variation de f proposé est faux dans chacun des deux cas suivants :

1°

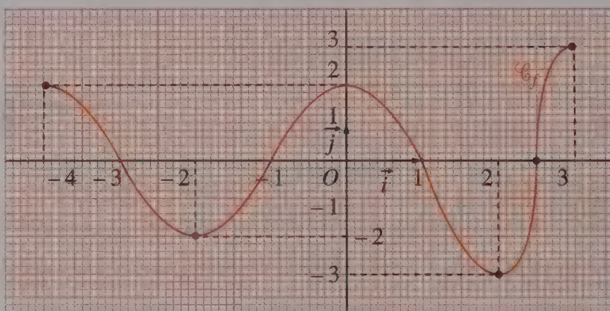
x	0	5
f	$\sqrt{3}$ ↘	2

2° f est paire et :

x	$+\infty$		-2		0		3		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

20 ★ 10 min (Corrigé p. 34)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;4]$ et ayant, dans un repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$, la représentation graphique suivante :



1° Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$.
Résumer les résultats obtenus dans un tableau.

2° Dresser le tableau de variation de f.

21 ★ 5 min (Corrigé p. 35)

Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f :

$$x \mapsto 5 + \sqrt{x^2 + 1}\ .$$

22 ★ 10 min (Corrigé p. 35)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto x^2 + 4x + 5\ .$$

1° Pour tout réel x, factoriser $f(x) - 1$.

2° En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

23 ★ — 10 min

(Corrigé p. 35)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto -x^2 - 2x + 3\,.$$

1° Pour tout réel x, factoriser $f(x) - 4$.

2° En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

24 ★★ — 10 min

(Corrigé p. 36)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto 3 - 2x^2\,(x-1)^2\,.$$

Justifier que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ce maximum ainsi que les réels en lesquels il est atteint.

25 ★★ — 5 min

(Corrigé p. 36)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}\,.$$

Justifier que 0 est un minorant de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$; est-ce le minimum de f sur $]1\,;+\infty[$?

26 ★★ — 10 min

(Corrigé p. 37)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto (x+1)^2 + (x-1)^4\,.$$

1° Justifier : pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $1 \leqslant (x+1)^2$.

2° En déduire que 1 est un minorant de f sur $[0\,;+\infty[$.
1 est-il le minimum de f sur $[0\,;+\infty[$?

27 ★★ — 10 min

(Corrigé p. 37)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto x^2 - 2x\sin x + 3\sin^2 x.$$

1° Pour tout réel x, développer $(x - \sin x)^2$.

2° En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICES

28 ★★ 15 min (Corrigé p. 38)

On considère une fonction f, définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		0		4
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

1° Préciser le maximum de f sur chacun des intervalles $[-3\,;0]$, $[-3\,;4]$, $[0\,;1]$, $[-2\,;1]$.

2° Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions $f+2$, $-3f$.

3° Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10-3f(x)}}$ est définie sur $[-3\,;4]$.

Composition de fonctions

29 ★★★ 15 min (Corrigé p. 38)

On pose :

$$k : x \mapsto x^3, \quad h : x \mapsto 2x^2+1, \quad g : x \mapsto \frac{1}{x}, \quad t : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Écrire la fonction f proposée sous la forme d'une composée de fonctions choisies parmi k, h, g et t.

1° $x \mapsto x^9$.

2° $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+1}$.

3° $x \mapsto x\sqrt{x}$.

4° $x \mapsto \sqrt{(2x^2+1)^3}$.

5° $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$.

6° $x \mapsto \dfrac{2+x^2}{x^2}$.

7° $x \mapsto \mapsto 2x^6+1$.

8° $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x+1$.

CORRIGÉS
des exercices

1 f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(-x) = -f(x) \quad (1).$$

1° En particulier, en prenant $x = 0$ dans (1), on obtient : $f(0) = -f(0)$, autrement dit : $2f(0) = 0$, ce qui prouve : $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

2° La relation (1) peut aussi écrire :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) + f(-x) = 0,$$

donc **la fonction $\boldsymbol{x \mapsto f(x) + f(-x)}$ est la fonction constante : $\boldsymbol{x \mapsto 0}$**.

2 Par hypothèse, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 6, donc :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x+6) = f(x).$$

1° La fonction $f_1 : x \mapsto 3f(x) - 4$ est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 6 ; en effet :

$$\text{pour tout réel } x,\ f_1(x+6) = 3f(x+6) - 4 = 3f(x) - 4 = f_1(x).$$

2° De même, la fonction :

$$f_2 : x \mapsto f(x+1)$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 6 ; en effet, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f_2(x+6) &= f\big((x+6)+1\big) \\ &= f\big((x+1)+6\big) \\ &= f(x+1) \\ &= f_2(x). \end{aligned}$$

3° La fonction $f_3 : x \mapsto f(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 3 ; en effet, pour tout réel x :

$$f_3(x+3) = f\big(2(x+3)\big) = f(2x+6)$$

donc $f_3(x+3) = f(2x) = f_3(x)$.

Comme f, la fonction f_3 est périodique de période 6 ; il est cependant préférable de connaître une période positive la plus petite possible en prévision de l'étude de la fonction : f_3 étant périodique de période 3, il suffit de l'étudier sur un segment de longueur 3.

3 La fonction f admet 2 pour maximum sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) \leqslant 2 \quad (1),$$

et il existe un réel x_0 tel que : $f(x_0) = 2$ (2).

1° D'après (1) : pour tout réel x, $3f(x) - 5 \leqslant 3 \times 2 - 5$, autrement dit : pour tout réel x, $(3f-5)(x) \leqslant 1$, donc 1 est un majorant de la fonction $3f-5$ sur $\mathbb{R}$; de plus, d'après (2) : $(3f-5)(x_0) = 3f(x_0) - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$, donc la fonction **$\boldsymbol{3f-5}$ admet 1 pour maximum sur $\mathbb{R}$**.

2° D'après (1) : pour tout réel x, $-f(x) \geqslant -2$,
donc -2 est un minorant de la fonction $-f$;
de plus, d'après (2) : $-f(x_0) = -2$,
donc la fonction **$-f$ admet -2 pour minimum sur $\mathbb{R}$**.

4 Vrai ou faux ?

1° Vrai.

Notons u la fonction : $x \mapsto x^2 + 1$ et v la fonction : $x \mapsto \sqrt{x} + 2$.

- u est définie sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x : $u(x) > 0$;
- v est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc la composée $v \circ u$ de u par v est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$v \circ u(x) = v[u(x)] = v(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} + 2.$$

2° Faux.

Notons f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 4}$

et g la fonction obtenue en composant successivement, dans cet ordre :

$$x \mapsto x + 4, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

- f est définie sur $\mathbb{R}$;
- g n'est pas définie en -4 ; en effet l'image de -4 par $x \mapsto x + 4$ est 0, celle de 0 par $x \mapsto x^2$ reste 0, et 0 n'a pas d'image par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Il est clair que g est la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{(x+4)^2}.$$

Il s'agissait donc de justifier que les fonctions f et g ne sont pas égales, ce qui se « voit » facilement ; pour prouver $f \neq g$, on aurait également pu donner un réel qui n'a pas la même image par f et par g ; par exemple, 0 convient :

$f(0) = \dfrac{1}{4}$, $g(0) = \dfrac{1}{16}$, donc : $f(0) \neq g(0)$.

N'ayant pas le même ensemble de définition, les fonctions f et g ne sont pas égales.

3° Vrai.

Notons f la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ par $x \mapsto 5x + 2$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$f(x) = 5 \times \frac{1}{x-1} + 2 = \frac{5}{x-1} + 2 = \frac{5 + 2(x-1)}{x-1} = \frac{2x+3}{x-1},$$

ce qui prouve que la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ par $x \mapsto 5x + 2$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$.

5 La fonction f étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on obtient en application directe du cours :

- $-3f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($-3 < 0$, donc $-3f$ et f ont des sens de variation contraires) ;
- $f+2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, car f et $f+2$ ont le même sens de variation ;
- $2f+1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, car $2f+1$ a le même sens de variation que $2f$, qui a le même sens de variation que f ;
- $f \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme composée de deux fonctions strictement monotones de même sens de variation).

On aurait également pu remarquer que $2f+1$ est la composée de f, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto 2x+1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6 • Les courbes représentatives de f et $x \mapsto -f(x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc :

$$\mathscr{C}_3 \text{ est la courbe représentative de } x \mapsto -f(x).$$

• La courbe représentative de $x \mapsto |f(x)|$ est la partie de la réunion des courbes représentatives de f et $-f$ dont les points ont une ordonnée positive, donc :

$$\mathscr{C}_2 \text{ est la courbe représentative de } x \mapsto |f(x)|.$$

• Les courbes représentatives de f et $x \mapsto f(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc :

$$\mathscr{C}_1 \text{ est la courbe représentative de } x \mapsto f(-x).$$

• La fonction $x \mapsto f(|x|)$ est paire, et les points de sa courbe représentative qui ont une abscisse positive sont ceux de $\mathscr{C}$, donc :

$$\mathscr{C}_4 \text{ est la courbe représentative de } x \mapsto f(|x|).$$

7 **1°** $f : x \mapsto \dfrac{2x-5}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$, autrement dit :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}.$$

2° $f : x \mapsto \dfrac{3x-7}{x^2-9}$.

$\mathscr{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$x^2 - 9 \neq 0 ;$$

or $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$,

donc :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}.$$

Pour tous réels a et b : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

CORRIGÉS

3° $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-1)(x+5)}$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $(x^2-1)(x+5) \neq 0$;
or : $(x^2-1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x+5) = 0$
$\Leftrightarrow x^2-1=0$ ou $x+5=0$
$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$ ou $x=-5$,
donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\,;-1\,;1\}$.

4° $f : x \mapsto \sqrt{x+\pi}$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $x+\pi \geqslant 0$,
donc : $\mathcal{D}_f = [-\pi\,;+\infty[$.

5° $f : x \mapsto \sqrt{(x+1)(3x-1)}$;

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $(x+1)(3x-1) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit du tableau de signes ci-dessus :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-1] \cup \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[.$$

6° $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+1}$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $x^2+2x+1 \geqslant 0$,
or, pour tout réel x, $x^2+2x+1 = (x+1)^2$,
donc, pour tout réel x, $x^2+2x+1 \geqslant 0$,
ce qui implique que f est définie sur $\mathbb{R}$:
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

1° $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^3}$ et $f_2 : x \mapsto (\sqrt{x})^3$.
Les fonctions f_1 et f_2 ont pour ensemble de définition $\mathbb{R}_+$; de plus, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:
$f_1(x) = \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \times x} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{x} = x\sqrt{x}$.
$f_2(x) = (\sqrt{x})^3 = (\sqrt{x})^2 \times \sqrt{x} = x\sqrt{x}$.

L'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$.
Un réel et son cube ont le même signe.

Il vient $\mathcal{D}_{f_1} = \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}_+$ et, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $f_1(x) = f_2(x)$, ce qui prouve que **les fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^3}$ et $f_2 : x \mapsto (\sqrt{x})^3$ sont égales.**

2° $g_1 : x \mapsto \sqrt{x^4}$ et $g_2 : x \mapsto (\sqrt{x})^4$.

La fonction g_1 est définie sur $\mathbb{R}$, alors que l'ensemble de définition de la fonction g_2 est $\mathbb{R}_+$; **les fonctions $g_1 : x \mapsto \sqrt{x^4}$ et $g_2 : x \mapsto (\sqrt{x})^4$ ne sont donc pas égales.**

Pour tout réel x, x^4 est positif ou nul.

En revanche, elles coïncident sur $\mathbb{R}_+$, car, pour tout réel x positif ou nul :

$g_1(x) = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$,

$g_2(x) = (\sqrt{x})^4 = ((\sqrt{x})^2)^2 = x^2$.

Attention : $\sqrt{X^2} = |X|$;
si $X \geqslant 0$, alors $\sqrt{X^2} = X$.

9 1° $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-5}{x^2+2}$.

Pour tout réel x, $x^2 + 2 \neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ est bien évidemment symétrique par rapport à 0, et, pour tout réel x :

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2-5}{(-x)^2+2} = \frac{2x^2-5}{x^2+2} = f(x),$$

ce qui prouve que f **est paire.**

2° $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $x^2 - 4 \neq 0$,

or : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$,

donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$ et :

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} = -f(x) ;$$

par conséquent, f **est impaire.**

3° $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.
f est définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(1) = 2$, $f(-1) = 10$, ce qui implique :

- $f(-1) \neq f(1)$, donc f n'est pas paire,
- $f(-1) \neq -f(1)$, donc f n'est pas impaire.

Finalement, f **n'est ni paire, ni impaire.**

Pour prouver qu'une fonction f n'est pas paire, il suffit de trouver un réel x_0 tel que :
$f(-x_0) \neq f(x_0)$.

10 1° Soient f une fonction impaire, g une fonction paire, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.
Alors la composée $g \circ f$ de f par g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g \circ f(-x) &= g[f(-x)] \\ &= g[-f(x)] \quad \text{(car } f \text{ est impaire)} \\ &= g[f(x)] \quad \text{(car } g \text{ est paire)} \\ &= g \circ f(x) \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est paire.
On a ainsi démontré que **la composée d'une fonction impaire par une fonction paire (supposées toutes deux définies sur $\mathbb{R}$) est une fonction paire**.

2° Soient f et g des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$.
Alors la composée $g \circ f$ de f par g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g \circ f(-x) &= g[f(-x)] \\ &= g[-f(x)] \quad \text{(car } f \text{ est impaire)} \\ &= -g[f(x)] \quad \text{(car } g \text{ est impaire)} \\ &= -g \circ f(x) \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est impaire.
On a ainsi démontré que **la composée de deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire**.

11 La fonction f est paire, périodique de période 4, et vérifie :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0\,;2],\ f(x) = \frac{3}{2}x - 1.$$

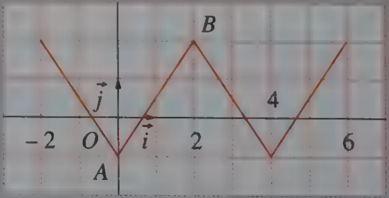
1° • L'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $[0\,;2]$ est le segment de droite $[AB]$ où :

$$A(0\,;-1) \ \left(\text{car} : f(0) = \frac{3}{2} \times 0 - 1 = -1\right),$$

$$B(2\,;2) \ \left(\text{car} : f(2) = \frac{3}{2} \times 2 - 1 = 2\right).$$

• La fonction f étant paire, l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $[-2\,;2]$ est la réunion de $\mathscr{C}_1$ et de la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des ordonnées.

• Enfin, la fonction f étant périodique de période 4, l'ensemble $\mathscr{C}_3$ des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $[2\,;6]$ est l'image de $\mathscr{C}_2$ par la translation de vecteur $4\vec{i}$.



La partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont les points ont une abscisse comprise au sens large entre – 2 et 6 est la réunion de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

2° • Soit x un réel appartenant à $[-2\,;0]$;
la fonction f étant paire :

$$f(x) = f(-x)\,;$$

de plus, $-x$ appartenant à $[0\,;2]$:

$$f(x) = \frac{3}{2} \times (-x) - 1 = -\frac{3}{2}x - 1\,.$$

Finalement :

si $x \in [-2\,;0]$ alors $f(x) = -\dfrac{3}{2}x - 1$.

$\mathscr{C}_2$ est un segment de la droite d'équation :

$$y = -\frac{3}{2}x - 1$$

$\left(\text{pente } -\dfrac{3}{2}, \text{ ordonnée à l'origine } -1\right)$.

• Soit x un réel appartenant à $[2\,;4]$;
la fonction f étant périodique de période 4 :

$$f(x) = f(x-4)\,;$$

de plus, $x-4$ appartenant à $[-2\,;0]$:

$$f(x) = -\frac{3}{2} \times (x-4) - 1\,,$$

donc $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + 6 - 1 = -\dfrac{3}{2}x + 5$.

L'ensemble des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $[2\,;4]$ est un segment de la droite d'équation :

$$y = -\frac{3}{2}x + 5$$

$\left(\text{pente } -\dfrac{3}{2}, \text{ ordonnée à l'origine } 5\right)$.

12 $f : x \mapsto \sin x \cos x$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \sin(x+\pi)\cos(x+\pi) \\ &= (-\sin x)(-\cos x) = \sin x \cos x \\ &= f(x)\,, \end{aligned}$$

donc **la fonction $f : x \mapsto \sin x \cos x$ est périodique de période π.**

Avec les formules de duplication :
pour tout réel x,

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\,.$$

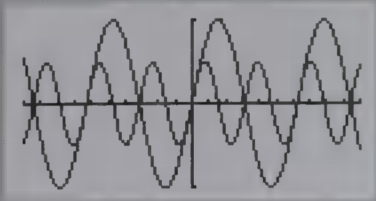
Copie d'écran de calculatrice obtenue :

• en entrant :

Y1=sinX
Y2=sinXcosX

• avec le cadrage :

$-10 \leqslant x \leqslant 10$
$-1 \leqslant y \leqslant 1$.



CHAPITRE 1

11 1° Soient a et b des réels, a étant non nul.

a. $g : x \mapsto \sin(ax+b)$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$g\left(x+\frac{2\pi}{|a|}\right)=\sin\left[a\times\left(x+\frac{2\pi}{|a|}\right)+b\right]=\sin\left((ax+b)+\frac{a}{|a|}\times 2\pi\right);$$

or la fonction sinus est périodique de période 2π, et $\frac{a}{|a|}\times 2\pi$ est égal à 2π ou -2π, suivant que $a>0$ ou $a<0$ donc, pour tout réel x :

$$g\left(x+\frac{2\pi}{|a|}\right)=\sin(ax+b)=g(x),$$

Si $a>0$, alors $|a|=a$, donc $\frac{a}{|a|}=1$;
si $a<0$, alors $|a|=-a$, donc $\frac{a}{|a|}=-1$,

ce qui prouve que $\frac{2\pi}{|a|}$ **est une période de la fonction** $g : x \mapsto \sin(ax+b)$.

b. On démontre par une démarche en tout point semblable à la précédente que $\frac{2\pi}{|a|}$ **est une période de la fonction** $x \mapsto \cos(ax+b)$.

2° a. $f : x \mapsto 4\sin\left(\frac{\pi-x}{3}\right)$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f(x)=4\sin\left(\frac{\pi-x}{3}\right)=4\sin\left(-\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{3}\right).$$

D'après la question 1°, la fonction $u : x \mapsto \sin\left(-\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|}$, c'est-à-dire de période 6π ;

Si une fonction f est périodique de période T, alors, pour tout réel λ, la fonction λf est aussi périodique de période T.

il est clair qu'il en est de même pour la fonction $4u$, autrement dit :

$$f : x \mapsto 4\sin\left(\frac{\pi-x}{3}\right) \text{ est périodique de période } 6\pi.$$

b. $g : x \mapsto \cos(\pi(x-\sqrt{2}))$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$g(x)=\cos(\pi(x-\sqrt{2}))=\cos(\pi x-\pi\sqrt{2}),$$

donc, d'après la question **1°**, la fonction g est périodique de période $\dfrac{2\pi}{|\pi|}$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{g : x \mapsto \cos\left(\pi\left(x - \sqrt{2}\right)\right)} \textbf{ est périodique de période 2.}$$

14 **1°** Notons u la fonction : $x \mapsto \cos\dfrac{x}{2}$.

• u est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$u(x+4\pi) = \cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = \cos\frac{x}{2} = u(x)$$

(car la fonction cos est 2π-périodique),
donc la fonction $\boldsymbol{u : x \mapsto \cos\dfrac{x}{2}}$ **est périodique de période** $\boldsymbol{4\pi}$.

• 8π et 12π sont également des périodes de u ; en effet, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} u(x+8\pi) &= u((x+4\pi)+4\pi) \\ &= u(x+4\pi) \quad (\text{car } u \text{ est } 4\pi\text{-périodique}) \\ &= u(x) \quad (\text{car } u \text{ est } 4\pi\text{-périodique}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x+12\pi) &= u((x+4\pi)+8\pi) \\ &= u(x+4\pi) \quad (\text{car } u \text{ est } 8\pi\text{-périodique}) \\ &= u(x) \quad (\text{car } u \text{ est } 4\pi\text{-périodique}). \end{aligned}$$

Si un réel T est une période d'une fonction v, alors, pour tout entier k, kT est aussi une période de v.

2° $f : x \mapsto \cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{3}$.

Il est facile de vérifier que 6π est une période de la fonction $x \mapsto \sin\dfrac{x}{3}$ (qui est définie sur $\mathbb{R}$) :

pour tout réel x, $\sin\left(\dfrac{x+6\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{3}+2\pi\right) = \sin\dfrac{x}{3}$,

donc $2\times 2\pi$, $3\times 2\pi$, … sont également des périodes de $x \mapsto \sin\dfrac{x}{3}$.

Voir aussi l'exercice 13.

$\boldsymbol{12\pi}$ est donc une période de chacune des deux fonctions $x \mapsto \cos\dfrac{x}{2}$, $x \mapsto \sin\dfrac{x}{3}$, et donc aussi **une période de** leur somme f, ce que l'on vérifie aisément par le calcul :

$$\begin{aligned} \text{pour tout réel } x,\ f(x+12\pi) &= \cos\left(\frac{x+12\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+12\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{2}+6\pi\right) + \sin\left(\frac{x}{3}+4\pi\right) \\ &= \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

CHAPITRE 1

15 1° Supposons qu'un réel a vérifie :
pour tout réel x, $a + \sin(x + a) = \sin x$.

Pour tout réel x
$\sin(x + \pi) = -\sin x$

En prenant $x = 0$, on obtient :
$$a + \sin(0 + a) = \sin 0,$$
c'est-à-dire : $a + \sin(a) = 0 \quad (1)$;
en prenant $x = \pi$, on obtient :
$$a + \sin(\pi + a) = \sin \pi,$$
c'est-à-dire : $a - \sin(a) = 0 \quad (2)$.
En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient : $2a = 0$, c'est-à-dire : $a = 0$.

On a ainsi démontré que, si un réel a vérifie :
pour tout réel x, $a + \sin(x + a) = \sin x$,
alors : $a = 0$.

2° $f : x \mapsto x + \sin x$.
Soit T un réel tel que : pour tout réel x, $f(x + T) = f(x) \quad (3)$.
Notons qu'il existe au moins un tel réel T : 0 ;
prouver que f n'est pas périodique revient à démontrer que le seul réel T qui satisfait à la relation (3) est 0.

La relation (3) peut s'écrire :
pour tout réel x, $x + T + \sin(x + T) = x + \sin x$,
ou encore : pour tout réel x, $T + \sin(x + T) = \sin x$,
donc, d'après **1°** : $T = 0$, ce qui permet de conclure :
la fonction **$f : x \mapsto x + \sin x$ n'est pas périodique**.

16 $f : x \mapsto 2x^2 + 3x$.
Soient x et x' des réels tels que : $0 \leqslant x < x'$;
on a :

Pour comparer deux nombres, penser à étudier le signe de leur différence.

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= (2x'^2 + 3x') - (2x^2 + 3x) \\ &= 2(x'^2 - x^2) + 3(x' - x) \\ &= 2(x' - x)(x' + x) + 3(x' - x) \\ &= (x' - x)\big(2(x' + x) + 3\big) \\ &= (x' - x)(2x + 2x' + 3) ; \end{aligned}$$

or $2x + 2x' + 3 > 0$ (car x et x' sont positifs) et $x' - x > 0$ (car $x < x'$), donc :
$$f(x') - f(x) > 0, \text{ c'est-à-dire : } f(x) < f(x').$$
On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:
si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$,
autrement dit que la fonction **$f : x \mapsto 2x^2 + 3x$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$**.

17 $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Soient x et x' des réels tels que : $x < x' < 1$; on a :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{2x'+1}{x'-1} - \frac{2x+1}{x-1} \\ &= \frac{(2x'+1)(x-1) - (2x+1)(x'-1)}{(x'-1)(x-1)} \\ &= \frac{(2x'x + x - 2x' - 1) - (2xx' + x' - 2x - 1)}{(x'-1)(x-1)} \\ &= \frac{3(x-x')}{(x'-1)(x-1)} \,; \end{aligned}$$

or $(x'-1)(x-1) > 0$, (car $x'-1 < 0$ et $x-1 < 0$) et $x - x' < 0$ (car $x' < x'$), donc : $f(x') - f(x) < 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) > f(x').$$

On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;1[$:

$$\text{si } x < x', \text{ alors } f(x) > f(x'),$$

autrement dit que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ **est strictement décroissante sur l'intervalle** $]-\infty\,;1[$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

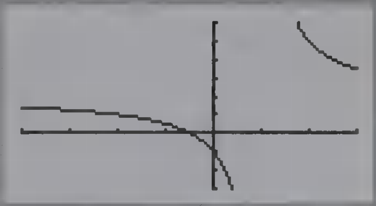
- en entrant :

  Y1=(2X+1)÷(X – 1)

- avec le cadrage :

  $-4 \leqslant x \leqslant 3$

  $-3 \leqslant y \leqslant 6$.



18 $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Soient x et x' des réels tels que : $0 < x < x'$; on a :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x'}}{\sqrt{x'}\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x'}}{\sqrt{x'}\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x'})(\sqrt{x} + \sqrt{x'})}{\sqrt{x}\sqrt{x'}(\sqrt{x} + \sqrt{x'})} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x'})^2}{\sqrt{x}\sqrt{x'}(\sqrt{x} + \sqrt{x'})} = \frac{x - x'}{\sqrt{x}\sqrt{x'}(\sqrt{x} + \sqrt{x'})}, \end{aligned}$$

Pour tous réels a et b strictement positifs :
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

CORRIGÉS

or $\sqrt{x}\sqrt{x'}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x'}\right)>0$ et $x-x'<0$,
donc :

$$f(x')-f(x)<0,$$
$$\text{c'est-à-dire } f(x)>f(x').$$

On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$\text{si } x<x',$$
$$\text{alors } f(x)>f(x'),$$

autrement dit que la fonction $f: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

19 **1°** $\sqrt{3}<2$, donc la fonction f ne peut décroître de $\sqrt{3}$ à 2, ce qui prouve que le tableau de variation de f proposé est faux.

2° Si la fonction f est paire et si de plus elle est décroissante sur $[0\,;3]$, alors f doit être croissante sur $[-3\,;0]$, ce qui est en contradiction avec le tableau de variation de f proposé.

20 **1°** D'après le graphique, on a :

$$f(-3)=f(-1)=f(1)=f(2{,}5)=0\,;$$

si $x \in [-4\,;-3[$, alors $f(x)>0$;

si $x \in\,]-3\,;-1[$, alors $f(x)<0$;

si $x \in\,]-1\,;1[$, alors $f(x)>0$;

si $x \in\,]1\,;2{,}5[$, alors $f(x)<0$;

si $x \in\,]2{,}5\,;3]$, alors $f(x)>0$.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x	-4		-3		-1		1		$2{,}5$		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2° Le tableau de variation de f est :

x	-4		-2		0		2		3
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

21 $f : x \mapsto 5 + \sqrt{x^2 + 1}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$x^2 \geqslant 0$,

donc : $x^2 + 1 \geqslant 1$,

donc : $\sqrt{x^2 + 1} \geqslant \sqrt{1}$,

donc : $\sqrt{x^2 + 1} \geqslant 1$,

donc : $5 + \sqrt{x^2 + 1} \geqslant 5 + 1$,

donc, pour tout réel x , $f(x) \geqslant 6$, autrement dit, 6 est un minorant de f .

> Deux réels positifs ou nuls sont rangés comme leurs racines carrées.

De plus, 6 est clairement une valeur prise par f :

$$f(0) = 5 + \sqrt{0^2 + 1} = 5 + 1 = 6 .$$

En résumé : $\begin{cases} \text{pour tout réel } x , f(x) \geqslant 6 , \\ f(0) = 6 , \end{cases}$ ce qui prouve que :

6 est le minimum sur $\mathbb{R}$ sur de la fonction $f : x \mapsto 5 + \sqrt{x^2 + 1}$.

22 $f : x \mapsto x^2 + 4x + 5$.

1° Pour tout réel x :

$f(x) - 1 = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = (x + 2)^2$.

2° D'après **1°** :

pour tout réel x , $f(x) = (x + 2)^2 + 1$,

or : $(x + 2)^2 \geqslant 0$,

donc, pour tout réel x , $f(x) \geqslant 1$,

autrement dit, 1 est un minorant de f (sur $\mathbb{R}$) .

> Pour tous réels a et b : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

De plus, clairement, $f(-2) = 1$, donc 1 est une valeur prise par f .

Des relations : $\begin{cases} \text{pour tout réel } x , f(x) \geqslant 1 , \\ f(-2) = 1 , \end{cases}$

on déduit que **1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$** .

23 $f : x \mapsto -x^2 - 2x + 3$.

1° Pour tout réel x , $f(x) - 4 = -x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x + 1)^2$.

2° D'après **1°** :

pour tout réel x , $f(x) = -(x + 1)^2 + 4$,

or : $-(x + 1)^2 \leqslant 0$,

donc, pour tout réel x , $f(x) \leqslant 4$,

autrement dit, 4 est un majorant de f (sur $\mathbb{R}$) .

De plus, $f(-1) = 4$, donc 4 est une valeur prise par f .

Des relations : $\begin{cases} \text{pour tout réel } x , f(x) \leqslant 4 , \\ f(-1) = 4 , \end{cases}$

on déduit que **4 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$** .

24 $f : x \mapsto 3 - 2x^2(x-1)^2$.

Pour tout réel x, $\quad -2x^2(x-1)^2 \leqslant 0$,

donc : $\quad 3 - 2x^2(x-1)^2 \leqslant 3$,

donc : $\quad f(x) \leqslant 3$,

autrement dit, 3 est un majorant de f.

De plus, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Leftrightarrow 3 - 2x^2(x-1)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow -2x^2(x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } (x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1, \end{aligned}$$

ce qui prouve que 3 est non seulement un majorant de f, mais aussi le maximum de f, et que les seuls réels en lesquels f prend la valeur 3 sont 0 et 1.

Finalement, f **admet 3 pour maximum sur** $\mathbb{R}$**, et les réels en lesquels** f **atteint son maximum sont 0 et 1.**

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

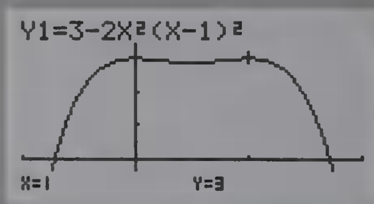
- en entrant :

  Y1=3–2X²(X – 1)²

- avec le cadrage :

  $-1 \leqslant x \leqslant 2$

  $-1 \leqslant y \leqslant 4$.



25 $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ et, pour tout x de $]1 ; +\infty[$:

$$x - 1 > 0,$$

donc :

$$\frac{1}{x-1} > 0,$$

autrement dit :

$$f(x) > 0.$$

On en déduit que **0 est un minorant de** f **sur l'intervalle** $]1 ; +\infty[$.

D'autre part, pour tout x de $]1 ; +\infty[$:

$$f(x) \neq 0,$$

donc **0 n'est pas le minimum de** f **sur** $]1 ; +\infty[$.

Un réel non nul et son inverse ont le même signe.

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de 0, pourvu que x soit suffisamment grand, car :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0,$$

mais f n'atteint jamais cette valeur sur $]1 ; +\infty[$ (ni sur $]-\infty ; 1[$).

26 $f : x \mapsto (x+1)^2 + (x-1)^4$.

1° Si x est un réel supérieur ou égal à 0, alors :

$$1 \leqslant x + 1 ,$$

donc, des réels positifs étant rangés comme leurs carrés :

$$1 \leqslant (x+1)^2 .$$

Il vient :

$$\textbf{pour tout } x \textbf{ de } [0 ; +\infty[,\ 1 \leqslant (x+1)^2 .$$

2° • Pour tout x de $[0 ; +\infty[$:

$$1 \leqslant (x+1)^2 \text{ (d'après } \mathbf{1°}) \text{ et } 0 \leqslant (x-1)^4 ,$$

donc : $$1 \leqslant (x+1)^2 + (x-1)^4 ,$$

autrement dit : $$1 \leqslant f(x) ,$$

ce qui prouve que **1 est un minorant de f sur $[0 ; +\infty[$** .

• Pour tout x de $[0 ; +\infty[$:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1)^4 = 1$$
$$\Leftrightarrow \big((x+1)^2 - 1\big) + (x-1)^4 = 0 ,$$

or : $(x+1)^2 - 1 \geqslant 0$ (d'après **1°**), $(x-1)^4 \geqslant 0$ (d'après **1°**)

et une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls, donc, si $f(x) = 1$, alors $(x-1)^4 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$.

De plus : $$f(1) = (1+1)^2 + (1-1)^4 = 4 ,$$

ce qui montre que 1 n'est l'image par f d'aucun réel de $[0 ; +\infty[$.

En conclusion, **1 n'est pas le minimum de f sur $[0 ; +\infty[$** .

27 $f : x^2 - 2x \sin x + 3 \sin^2 x$.

1° • Pour tout réel x ,

$$(x - \sin x)^2 = x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x .$$

Pour tous réels a et b :
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

2° La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et on déduit de la question **1°** que, pour tout réel x :

$$f(x) = (x - \sin x)^2 + 2 \sin^2 x ,$$

donc :

$$f(x) \geqslant 0$$

(car $(x - \sin x)^2 \geqslant 0$ et $2 \sin^2 x \geqslant 0$) ,
ce qui prouve que 0 est un minorant de f .

Il est utile de savoir : $\sin 0 = 0$.

De plus, en utilisant que la fonction sinus s'annule en 0, on obtient :

$$f(0) = 0 ,$$

ce qui prouve que **0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$** .

CORRIGÉS

28 1° D'après le tableau de variation de f :

- le maximum de f sur $[-3\,;0]$ est 2 ;
- le maximum de f sur $[-3\,;4]$ est 3 ;
- le maximum de f sur $[0\,;1]$ est $f(1)$;
- le maximum de f sur $[-2\,;1]$ est le plus grand des deux nombres $f(-2)$ et $f(1)$.

2° • D'après le cours, les fonctions $f+2$ et f ont le même sens de variation ; on obtient le tableau de variation de la fonction $f+2$ suivant :

x	-3		0		4
$f+2$	4	↘	1	↗	5

• D'après le cours, les fonctions $-3f$ et f ont des sens de variation contraires ; on obtient le tableau de variation de la fonction $-3f$ suivant :

x	-3		0		4
$-3f$	-6	↗	3	↘	-9

3° D'après le tableau de variation de la fonction $-3f$, le minimum de $-3f$ est -9, donc, pour tout x de $[-3\,;4]$:

$$-3f(x) \geqslant -9,$$

donc : $$10-3f(x) \geqslant 1,$$

et *a fortiori* : $$10-3f(x) > 0,$$

ce qui permet d'affirmer que **la fonction** $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10-3f(x)}}$ **est définie sur** $[-3\,;4]$.

29 On notera D_f l'ensemble de définition de f.

1° $f : x \mapsto x^9 \quad D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f(x) = (x^3)^3 = k[k(x)] = (k \circ k)(x)$,

donc : $$\boldsymbol{f = k \circ k}.$$

2° $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+1} \quad D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{h(x)} = g[h(x)] = (g \circ h)(x)$,

donc : $$\boldsymbol{f = g \circ h}.$$

3° $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ $D_f = \mathbb{R}_+$.
Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$, $f(x) = (\sqrt{x})^3 = k[t(x)] = (k \circ t)(x)$,
donc : $\boldsymbol{f = k \circ t}$.

4° $f : x \mapsto \sqrt{(2x^2+1)^3}$ $D_f = \mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f(x) = t[k(h(x))] = (t \circ k \circ h)(x)$, donc :
$$\boldsymbol{f = t \circ k \circ h};$$
on a également : $\boldsymbol{f = k \circ t \circ h}$.

5° $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$ $D_f = \mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f(x) = g[t(h(x))] = t[g(h(x))]$,
$$f(x) = (g \circ t \circ h)(x) = (t \circ g \circ h)(x),$$
donc : $\boldsymbol{f = g \circ t \circ h = t \circ g \circ h}$.

6° $f : x \mapsto \dfrac{2+x^2}{x^2}$ $D_f = \mathbb{R}^*$.
Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,
$$f(x) = \frac{2}{x^2} + 1 = 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = h[g(x)] = (h \circ g)(x),$$
et l'ensemble de définition de $h \circ g$ est $\mathbb{R}^*$,
donc : $\boldsymbol{f = h \circ g}$.

7° $f : x \mapsto 2x^6 + 1$ $D_f = \mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f(x) = 2(x^3)^2 + 1 = h[k(x)] = (h \circ k)(x)$,
donc : $\boldsymbol{f = h \circ k}$.

8° $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x + 1$ $D_f = \mathbb{R}_+$.
Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$, $f(x) = 2(\sqrt{x})^2 + 1 = h[t(x)] = (h \circ t)(x)$, et l'ensemble de définition de $h \circ t$ est $\mathbb{R}_+$,
donc : $\boldsymbol{f = h \circ t}$.

CORRIGÉS

FONCTIONS USUELLES

Rappels de cours

Pour les tracés de courbes, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

I- Fonctions affines

Définition

Une **fonction affine** est une fonction qui peut s'écrire $x \mapsto ax+b$, a et b étant des nombres réels ; elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

Si $a > 0$, alors $x \mapsto ax+b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
si $a < 0$, alors $x \mapsto ax+b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative

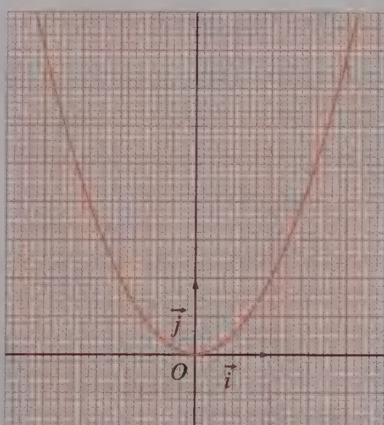
La courbe représentative de la fonction affine $x \mapsto ax+b$ est la droite d'équation $y = ax+b$.

II- Fonction carré

La **fonction carré** $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$; elle est paire, strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Sa courbe représentative est une parabole de sommet O, d'axe de symétrie la droite des ordonnées, et admet une tangente horizontale en O.



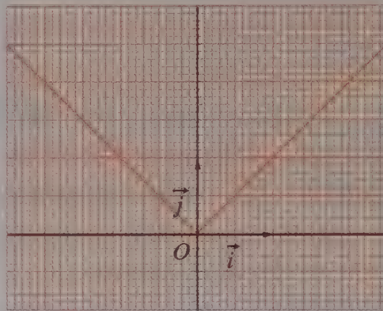
III- Fonction valeur absolue

La **fonction valeur absolue** $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} |x| = -x \text{ si } x \leqslant 0 , \\ |x| = x \text{ si } x \geqslant 0 . \end{cases}$$

Elle est paire et :

pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$.

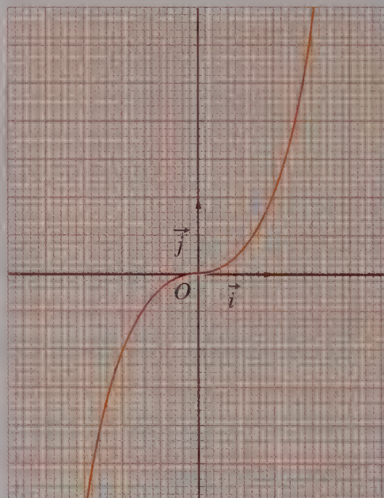


IV- Fonction cube

La **fonction cube** $x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$;
elle est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$-\infty$ ↗	$+\infty$

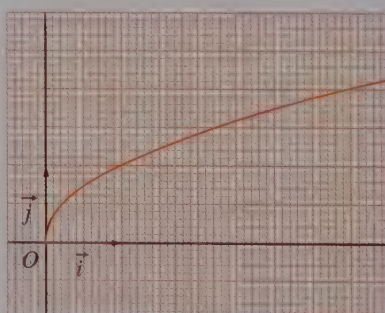
Sa courbe représentative est symétrique par rapport à O et admet une tangente horizontale en ce point.



V- Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour ensemble de définition $[0 ; +\infty[$; elle est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$



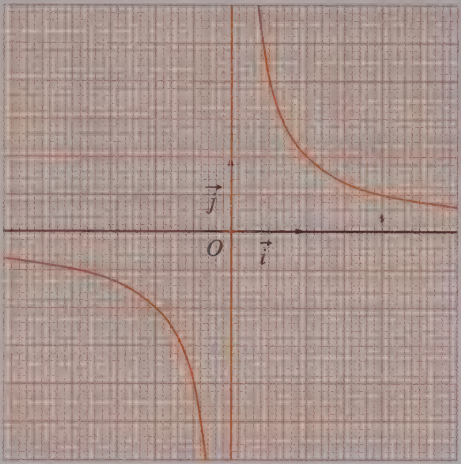
Sa courbe représentative est une demi-parabole ; la droite des ordonnées est tangente à la courbe au point O .

VI- Fonction inverse

La **fonction inverse** $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^*$; elle est impaire et strictement décroissante sur chacun des intervalles :

$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$



Sa courbe représentative est une hyperbole, de centre O , d'asymptotes les droites des abscisses et des ordonnées.

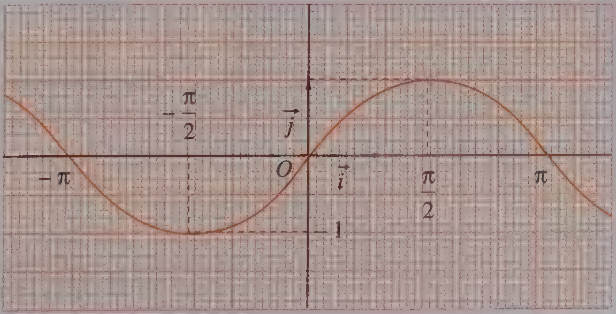
VII- Fonctions sinus et cosinus

Fonction sinus

La fonction sinus, notée sin , est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et de période 2π ; elle est bornée par -1 et 1 sur $\mathbb{R}$.

Son tableau de variation sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$0 \nearrow$	1

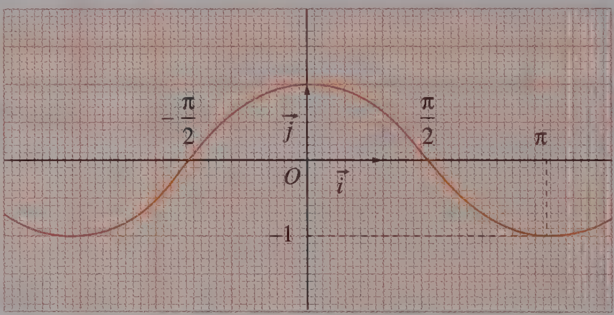


Fonction cosinus

La fonction cosinus, notée cos , est définie sur $\mathbb{R}$, paire et de période 2π ; elle est bornée par – 1 et 1 sur $\mathbb{R}$.

Son tableau de variation sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1 ↘	0



Propriétés

- Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- La courbe représentative de cos se déduit de celle de sin par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$ car, pour tout réel x :

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 50)

Préciser le sens de variation de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto \frac{3-x}{2}$. **2°** $x \mapsto -x^3$. **3°** $x \mapsto \frac{2}{x}$. **4°** $x \mapsto 2x^2 - 7$.

2

(Corrigé p. 50)

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction $x \mapsto x^2$ sur chacun des intervalles $[2 ; 3]$, $[-3 ; -2]$, $[-3 ; 2]$.

3

(Corrigé p. 51)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 = -8$.

4

(Corrigé p. 51)

Quelle fonction obtient-on en composant la fonction $x \mapsto x^2$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$?

5

(Corrigé p. 51)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer (rapidement !) la courbe représentative de chacune des fonctions proposées.

1° $f_1 : x \mapsto |x| - 1$; **2°** $f_2 : x \mapsto |x - 1|$; **3°** $f_3 : x \mapsto 1 - |x|$.

EXERCICES

EXERCICES d'entraînement

Sauf mention du contraire :
- *le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal,*
- *on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans ce repère.*

Sens de variation des fonctions usuelles

6 ★ 5 min (Corrigé p. 52)

Résoudre l'équation (E) : $x + x^3 + x^5 = 3$.

7 ★ 15 min (Corrigé p. 52)

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1° Démontrer que f est paire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ de f ?

2° Démontrer, en revenant à la définition, que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3° Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$?

8 ★★ 10 min (Corrigé p. 53)

Donner un exemple de fonction f :

1° croissante sur $[0\,;+\infty[$, telle que f^2 soit croissante sur $[0\,;+\infty[$;

2° décroissante sur $[0\,;+\infty[$, telle que f^2 soit croissante sur $[0\,;+\infty[$.

9 ★★ 10 min (Corrigé p. 54)

Donner un exemple de fonction f :

1° décroissante sur $]0\,;+\infty[$, telle que f^2 soit décroissante sur $]0\,;+\infty[$;

2° croissante sur $]0\,;+\infty[$, telle que f^2 soit décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

10 ★★ 20 min

(Corrigé p. 54)

On considère une fonction f, définie sur l'intervalle $[-2 ; 3]$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		3
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	2

1° Justifier que f ne prend que des valeurs strictement positives.

2° Justifier que :

a. la fonction $\dfrac{1}{f}$ est croissante sur $[1 ; 3]$;

b. la fonction $\sqrt{f}$ est décroissante sur $[1 ; 3]$;

c. la fonction f^2 est croissante sur $[-2 ; 1]$.

3° Dresser le tableau de variation sur $[-2 ; 3]$ de chacune des fonctions $\dfrac{1}{f}$, $\sqrt{f}$, f^2.

Fonctions associées aux fonctions usuelles

11 ★ 15 min

(Corrigé p. 55)

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto x^3 - 2\,,\quad f_2 : x \mapsto (x-2)^3\,,\quad f_3 : x \mapsto -x^3\,.$$

On notera $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, les courbes représentatives respectives des fonctions f_1, f_2, f_3.

12 ★ 15 min

(Corrigé p. 56)

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x+1}\,,\quad f_2 : x \mapsto \sqrt{x} - 2\,,\quad f_3 : x \mapsto \sqrt{x-1} + 2\,.$$

On notera $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, les courbes représentatives respectives des fonctions f_1, f_2, f_3.

13 ★★ 20 min (Corrigé p. 57)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+2} - 3$.

1° Du tableau de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, déduire celui de f et préciser par quelle transformation géométrique on passe de la demi-parabole Γ d'équation $y = \sqrt{x}$ à $\mathscr{C}_f$.

2° On considère les fonctions :

$$g : x \mapsto -\sqrt{x+2} + 3 \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \sqrt{-x+2} - 3 .$$

Tracer $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sur un même graphique.

3° On appelle $\mathscr{Q}$ le demi-plan d'inéquation $y \geqslant 0$
et $\mathscr{C}$ la courbe $(\mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g) \cap \mathscr{Q}$.
Mettre $\mathscr{C}$ en évidence sur un second graphique. De quelle fonction, notée u , $\mathscr{C}$ est-elle la courbe représentative ?

14 ★★ 20 min (Corrigé p. 58)

1° Donner le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{4}{x}$.

2° Soit g la fonction homographique : $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$.

Donner sa forme canonique, c'est-à-dire déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de -3 :

$$g(x) = \frac{a}{x+3} + b .$$

En déduire son tableau de variation et les asymptotes de $\mathscr{C}_g$.
Tracer $\mathscr{C}_g$.

15 ★★★ 20 min (Corrigé p. 60)

Étudier la fonction $f : x \mapsto |x| + |x^2 - x|$ et tracer $\mathscr{C}_f$.

16 ★★ 30 min (Corrigé p. 62)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que :
- 3 cm représentent π sur l'axe des abscisses,
- 1 cm représente 1 sur l'axe des ordonnées

(c'est-à-dire $\|\pi \vec{i}\| = 3$ et $\|\vec{i}\| = 1$, en cm) .

Connaissant la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus, tracer celle notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f proposée, puis en déduire graphiquement les propriétés éventuelles de parité, périodicité et les extrema de f.

1° $x \mapsto |\sin x|$.

2° $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3° $x \mapsto \sin |x|$.

4° $x \mapsto 2 \sin x$.

5° $x \mapsto \sin 2x$.

6° $x \mapsto -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

7° $x \mapsto 1{,}5 + \sin x$.

Résolutions graphiques

17 ★★ 10 min (Corrigé p. 65)

a est un réel tel que l'équation (E) : $||x - 2| - 1| = a$ possède exactement trois solutions.
Déterminer a graphiquement.

18 ★ 10 min (Corrigé p. 66)

Résoudre graphiquement le système Σ d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{x} \\ y = x - 2\,. \end{cases}$$

19 ★★ 15 min (Corrigé p. 66)

Résoudre graphiquement l'équation (I) :

$$x^2 - 4x - 2 \geqslant \frac{-6}{x-1}\,.$$

20 ★★ 15 min (Corrigé p. 67)

Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) :

$$\sqrt{x+2} = x^2 - x - 2\,.$$

CORRIGÉS des exercices

1 1° $f : x \mapsto \dfrac{3-x}{2}$.

f est la fonction affine $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$, et $-\dfrac{1}{2} < 0$, donc :

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2° $f : x \mapsto -x^3$.

La fonction f est l'opposée de la fonction cube, celle-ci étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$; il vient :

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En notant u la fonction inverse, on peut écrire : $f = 2u$; $2 > 0$, donc f et u ont le même sens de variation, ce qui prouve que :

f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.

4° $f : x \mapsto 2x^2 - 7$.

$x \mapsto 2x^2 - 7$ a le même sens de variation que $x \mapsto 2x^2$, et $x \mapsto 2x^2$ a le même sens de variation que $x \mapsto x^2$ (car $2 > 0$), donc :

f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Comme composée de la fonction carré par la fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
$x \mapsto 2x - 7$,
la fonction f et la fonction carré ont le même sens de variation.

2 • La fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc sur $[2\ ;\ 3]$; sur cet intervalle, la fonction $x \mapsto x^2$ atteint donc son minimum en 2 et son maximum en 3, ce qui implique :

le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[2\ ;\ 3]$ sont respectivement 4 et 9.

• La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, donc sur $[-3\ ;\ -2]$; sur ce segment, la fonction $x \mapsto x^2$ atteint donc son minimum en -2 et son maximum en -3, ce qui implique :

le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[-3\ ;\ -2]$ sont respectivement 4 et 9.

Attention !
La fonction carré n'est pas monotone sur $[-3\ ;\ 2]$.

• Pour tout x de $[-3\ ;\ 0]$: $0^2 \leqslant x^2 \leqslant (-3)^2$ (car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-3\ ;\ 0]$), c'est-à-dire : $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

Pour tout x de $[0\,;2]$: $\qquad 0 \leqslant x^2 \leqslant (2)^2$

(car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[0\,;2]$),

c'est-à-dire : $\qquad 0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

On en déduit : pour tout x de $[-3\,;2]$,

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 9,$$

les valeurs 0 et 9 étant prises par la fonction carré respectivement en 0 et -3.

Finalement, le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[-3\,;2]$ sont respectivement 0 et 9.

3 Équation :

$$x^3 = -8.$$

$(-2)^3 = -8$, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

-2 est la seule solution de l'équation $x^3 = -8$.

> Si une fonction est strictement monotone, elle ne peut prendre une certaine valeur m qu'au plus une fois.

4 Pour tout réel x,

$$|x| \geqslant 0 \text{ et } |x|^2 = x^2,$$

donc : $\sqrt{x^2} = |x|$

ce qui prouve que :

la composée de la fonction $x \mapsto x^2$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction $x \mapsto |x|$.

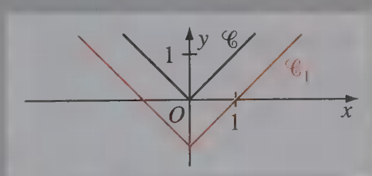
> Pour tout réel X, $\sqrt{X}$ est le réel positif dont le carré est égal à X.

5 Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto |x|.$$

1° $f_1 : x \mapsto |x| - 1$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de f_1 est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.



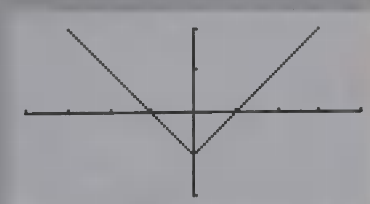
Copie d'écran de calculatrice obtenue :

- en entrant :

  Y1=AbsX–1

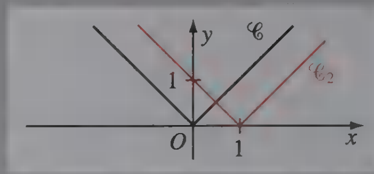
- avec le cadrage :

  $-4 \leqslant x \leqslant 4$,
  $-2 \leqslant y \leqslant 2$.



2° $f_2 : x \mapsto |x-1|$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_2$ de f_2 est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.



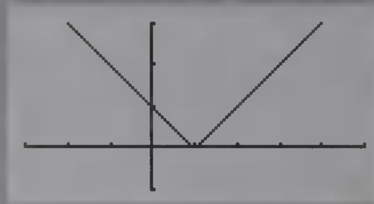
Copie d'écran de caculatrice obtenue :

- en entrant :

Y1=Abs(X–1)

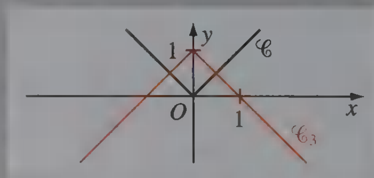
- avec le cadrage :

$-3 \leqslant x \leqslant 5$,
$-1 \leqslant y \leqslant 3$.



3° $f_3 : x \mapsto 1-|x|$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_3$ de f_3 est l'image par la translation de vecteur $\vec{j}$ de la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.



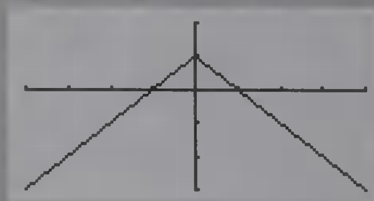
Copie d'écran de calculatrice obtenue :

- en entrant :

Y1=1–AbsX

- avec le cadrage :

$-4 \leqslant x \leqslant 4$,
$-3 \leqslant y \leqslant 2$.



(E) : $x + x^3 + x^5 = 3$.

1 est une solution évidente de l'équation (E).

De plus, comme somme des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^5$, toutes strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto x + x^3 + x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f ne prend la valeur 3 qu'en 1 ; en effet, $f(1) = 3$ et, pour tout réel x :

si $x < 1$, alors $f(x) < f(1)$,
si $x > 1$, alors $f(x) > f(1)$,
donc : si $x \neq 1$, alors $f(x) \neq 3$.

On peut donc conclure que **1 est la seule solution de (*E*).**

7 $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

1° f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x) ,$$

ce qui prouve que f **est paire.**

La courbe $\mathscr{C}$ de f est donc symétrique par rapport à la droite des ordonnées.

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, donc, évidemment, si $x \in \mathscr{D}_f$, alors $-x \in \mathscr{D}_f$.

2° Soient a et b des réels tels que $0 \leqslant a < b$. La fonction carré étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a :

$$a^2 < b^2,$$

d'où :

$$a^2 + 1 < b^2 + 1,$$

donc, la fonction racine carrée étant aussi strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ (et les réels a^2+1, b^2+1 étant positifs) :

$$\sqrt{a^2+1} < \sqrt{b^2+1},$$

c'est-à-dire :

$$f(a) < f(b).$$

f est la composée de $x \mapsto x^2 + 1$, strictement croissante et à valeurs positives sur $[0\,;+\infty[$, par $x \mapsto \sqrt{x}$, strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On a ainsi démontré que :

f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3° f est paire et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc :

f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

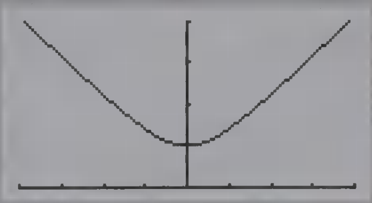
- en entrant :

  Y1=√(X²+1)

- avec le cadrage :

  $-4 \leqslant x \leqslant 4,$

  $0 \leqslant y \leqslant 4.$



8 **1°** Prenons pour f la fonction :

$$x \mapsto x.$$

f^2 est alors la fonction carré $x \mapsto x^2$; de plus f et f^2 sont croissantes sur $[0\,;+\infty[$.

Autres exemples pour f : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 3x+1$, etc.

2° Prenons pour f la fonction :

$$x \mapsto -x.$$

f^2 est alors la fonction carré $x \mapsto x^2$; de plus, f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, f^2 est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Autres exemples pour f : $x \mapsto -\sqrt{x}$, $x \mapsto -2x$, $x \mapsto -3x+1$, etc.

CORRIGÉS

9 1° Prenons pour f la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

f^2 est alors la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; de plus, f et f^2 sont décroissantes sur $]0 ; +\infty[$.

2° Prenons pour f la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

f^2 est alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; de plus, f est croissante sur $]0 ; +\infty[$, f^2 est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ comme composée de $x \mapsto x^2$, croissante et à valeurs strictement positives sur $]0 ; +\infty[$, par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

10

x	-2		1		
f	1	↗	5	↘	2

1° D'après le tableau de variation de f, le minimum de f est 1, donc :

pour tout x de $[-2 ; 3]$, $f(x) \geqslant 1$,

ce qui implique : pour tout x de $[-2 ; 3]$, $f(x) > 0$,

autrement dit, f **ne prend que des valeurs strictement positives**.

2° **a.** La fonction $\dfrac{1}{f}$ est la composée :

- de la fonction f, décroissante et à valeurs strictement positives sur $[1 ; 3]$,
- par la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc :

$\dfrac{1}{f}$ **est croissante sur $[1 ; 3]$.**

La composée de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante.

b. La fonction $\sqrt{f}$ est la composée :

- de la fonction f, décroissante et à valeurs positives sur $[1 ; 3]$,
- par la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc :

$\sqrt{f}$ **est décroissante sur $[1 ; 3]$** ;

La composée de deux fonctions monotones de sens de variation contraires est décroissante.

c. La fonction f^2 est la composée :

- de la fonction f, croissante et à valeurs positives sur $[-2 ; 1]$,

• par la fonction carrée $x \mapsto x^2$, croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc :

f^2 est croissante sur $[-2\,;1]$.

3° On sait que $\dfrac{1}{f}$ est croissante sur $[1\,;3]$; on démontre de manière analogue que $\dfrac{1}{f}$ est décroissante sur $[-2\,;1]$. Pour achever de compléter son tableau de variation sur $[-2\,;3]$, il suffit de calculer l'image par $\dfrac{1}{f}$ de chacun des nombres -2, 1, 3, c'est-à-dire l'inverse de chacun des nombres 1, 5, 2.

x	-2		1		3
$\dfrac{1}{f(x)}$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{5}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$

De même, on obtient :

x	-2		1		3
$\sqrt{f(x)}$	1	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

x	-2		1		3
$f^2(x)$	1	$\nearrow$	25	$\searrow$	4

11 Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$.

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variation de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 se déduit de celui de la fonction cube.

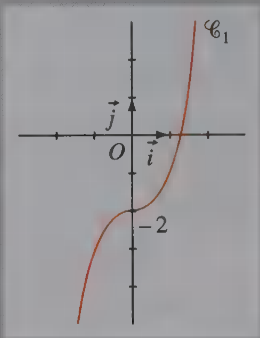
• $f_1 : x \mapsto x^3 - 2$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

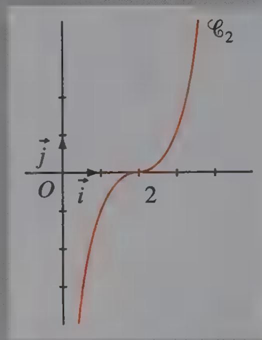
• $f_2 : x \mapsto (x-2)^3$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.



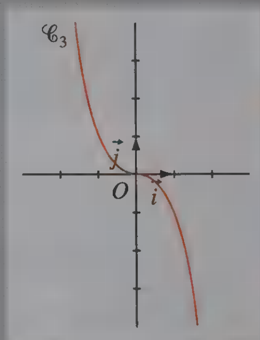
$\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$.



• $f_3 : x \mapsto -x^3$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_3(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_3$ sont symétriques par rapport à la droite des abscisses.



Une fonction f et son opposée $-f$ ont des sens de variation contraires.

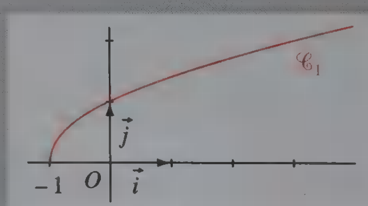
12 Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

Le tableau de variation de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 se déduit de celui de la fonction racine carrée.

• $f_1 : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

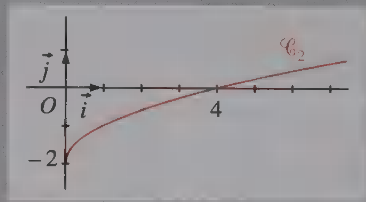
x	-1	$+\infty$
$f_1(x)$	0 ↗	$+\infty$



$\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

• $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} - 2$.

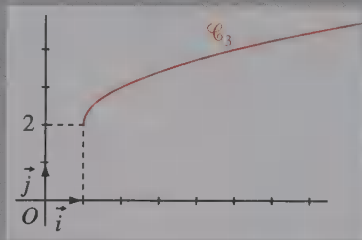
x	0	$+\infty$
$f_2(x)$	-2 ↗	$+\infty$



$\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

• $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-1} + 2$.

x	1	$+\infty$
$f_3(x)$	2 ↗	$+\infty$



$\mathscr{C}_3$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$.

13 $f : x \mapsto \sqrt{x+2} - 3$.

1° Du tableau de variation de $x \mapsto \sqrt{x}$:

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

on déduit celui de f :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	-3 ↗	$+\infty$

et on passe de la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{x}$ à $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - 3\vec{j}$.

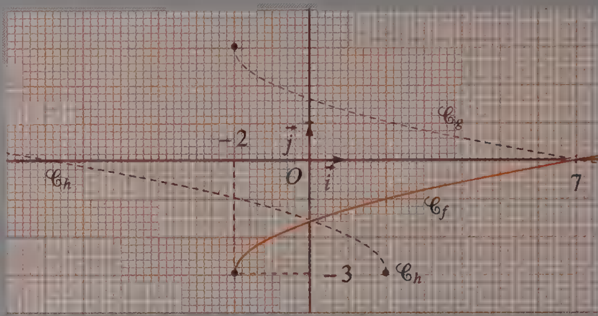
2° $g : x \mapsto -\sqrt{x+2} + 3$ et $h : x \mapsto \sqrt{-x+2} - 3$.

• f et g ont toutes deux pour ensemble de définition $[-2\,;+\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle : $g(x) = -f(x)$, donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

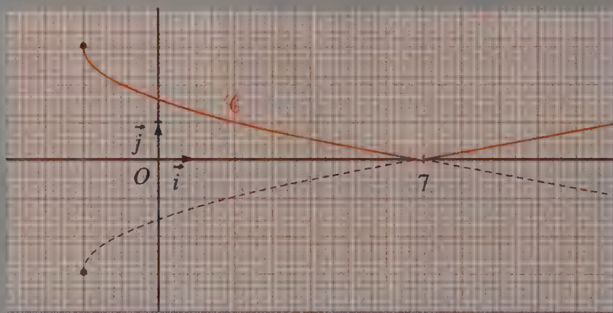
• L'ensemble de définition de h est le symétrique par rapport à 0 de celui de f et, pour tout x de $]-\infty\,;2]$: $h(x) = f(-x)$, donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont donc symétriques par rapport au point O.

Remarquons que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point d'abscisse 7 de l'axe des abscisses.



3°



$\mathscr{C}$ est bien la courbe représentative d'une fonction u, puisque toute droite parallèle à la droite des ordonnées coupe $\mathscr{C}$ au plus en un point.
La fonction u est positive et a le même ensemble de définition $[-2\,;+\infty[$ que les fonctions f et g ; de plus, pour tout x de $[-2\,;+\infty[$:

$$\begin{cases} u(x)=f(x) \text{ si } f(x)\geqslant 0, \\ u(x)=g(x) \text{ si } g(x)\geqslant 0, \end{cases}$$

autrement dit, puisque $g=-f$:

$$\begin{cases} u(x)=f(x) \text{ si } f(x)\geqslant 0, \\ u(x)=-f(x) \text{ si } f(x)\leqslant 0, \end{cases}$$

soit : $$u(x)=|f(x)|,$$

ce qui prouve : $$\boldsymbol{u=|f|}.$$

On a également : $u=|g|$.

14 1° $f : x \mapsto -\dfrac{4}{x}$.

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

-4 étant un réel strictement négatif, on en déduit celui de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

Si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variation contraires.

2° $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$.

L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

• Pour tout réel x différent de -3 :

$$g(x) = \frac{(x+3)-3-1}{x+3} = \frac{(x+3)-4}{x+3}$$

$$= \frac{x+3}{x+3} - \frac{4}{x+3}$$

$$g(x) = 1 - \frac{4}{x+3} = \frac{-4}{x+3} + 1 .$$

En prenant $a = -4$ et $b = 1$, on peut écrire, pour tout réel x différent de -3 : $g(x) = \dfrac{a}{x+3} + b$.

Donc **la forme canonique de g est : $x \mapsto \dfrac{-4}{x+3} + 1$.**

• D'après ce qui précède :

pour tout réel x différent de -3, $g(x) = f(x+3) + 1$.

• Du tableau de variation de f on déduit alors celui de g :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g(x)$	1 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

• De plus, on passe de l'hyperbole $\mathscr{C}_f$ à l'hyperbole $\mathscr{C}_g$ par la translation t de vecteur $-3\vec{i} + \vec{j}$.

Les asymptotes de $\mathscr{C}_g$ sont donc les images par t de celles de $\mathscr{C}_f$; or $\mathscr{C}_f$ et l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ ont les mêmes asymptotes : la droite des abscisses et celle des ordonnées. Il en résulte :

les asymptotes de $\mathscr{C}_g$ sont les droites d'équation $x = -3$ et $y = 1$.

De même, l'origine O étant le centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$, son image par t est le centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$, donc :

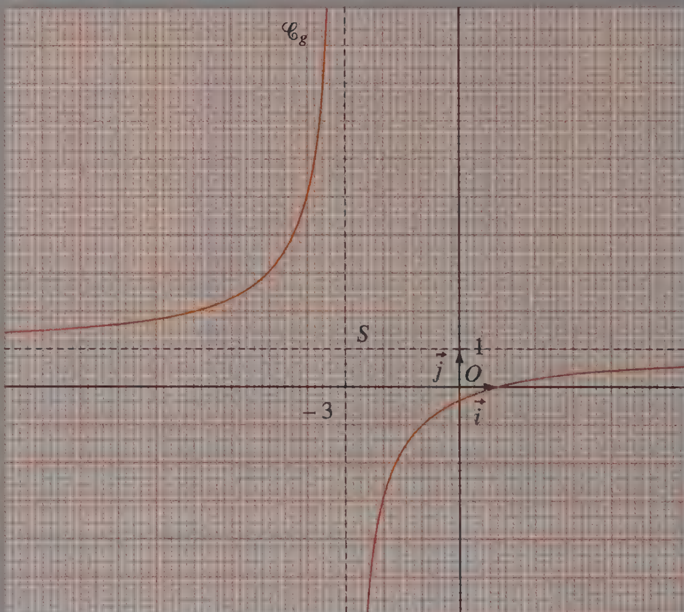
le centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$ est le point $S(-3\ ;\ 1)$.

Le centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$ est le point d'intersection des asymptotes.

CORRIGÉS

translation de vecteur $-3\vec{i}+\vec{j}$

	$\mathscr{C}_f$	$\mathscr{C}_g$
Équations des asymptotes	$x=0$ et $y=0$	$x=-3$ et $y=1$
Coordonnées du centre de symétrie	$(0\,;0)$	$(-3\,;1)$



16 $f : x \mapsto |x| + |x^2 - x|$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Transformons l'écriture de $f(x)$ en utilisant la définition de la valeur absolue d'un nombre réel :

pour tout réel X , $\begin{cases} |X| = -X \text{ si } X \leqslant 0 \\ |X| = X \text{ si } X \geqslant 0, \end{cases}$

et en remarquant :

pour tout réel x ,
$x^2 - x = x(x-1)$.

Le signe de $x^2 - x$ dépend donc de la position de x par rapport à 0 et 1.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x\rvert$		$-x$		x		x	
$\lvert x^2-x\rvert$		x^2-x		$x-x^2$		x^2-x	
$f(x)$		x^2-2x		$-x^2+2x$		x^2	

Du tableau précédent, on déduit que, pour tout réel x :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x \ \text{ si } \ x \leqslant 0\,, \\ f(x) = -x^2 + 2x \ \text{ si } \ 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ f(x) = x^2 \ \text{ si } \ x \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Déterminons la forme canonique du polynôme du second degré $x \mapsto x^2 - 2x$ et de son opposé $x \mapsto -x^2 + 2x$:

pour tout réel x, $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ et $-x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$.

Du tableau de variation de $x \mapsto x^2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

on déduit alors celui de $x \mapsto x^2 - 2x$ et de $x \mapsto -x^2 + 2x$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-2x	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x^2+2x$	$-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$

On en extrait les tableaux de variation de $x \mapsto x^2 - 2x$ sur $]-\infty\,;0]$, de $x \mapsto x^2 + 2x$ sur $[0\,;1]$ et de $x \mapsto x^2$ sur $[1\,;+\infty[$:

x	$-\infty$		0
x^2-2x	$+\infty$	↘	0

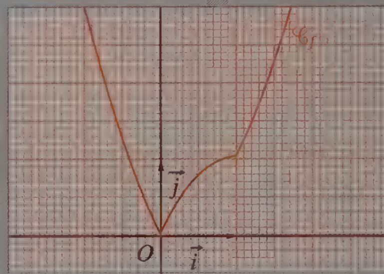
x	0		1
$-x^2+2x$	0	↗	1

x	1		$+\infty$
x^2	1	↗	$+\infty$

Par recollement des trois tableaux précédents, on obtient finalement le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

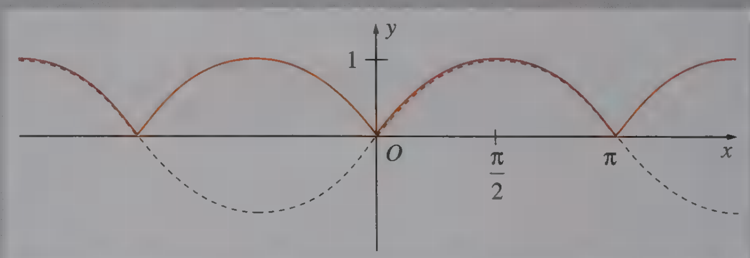


16 La légende suivante est valable pour tous les graphiques :

- - - - - $\mathscr{C}$ ——— $\mathscr{C}_f$

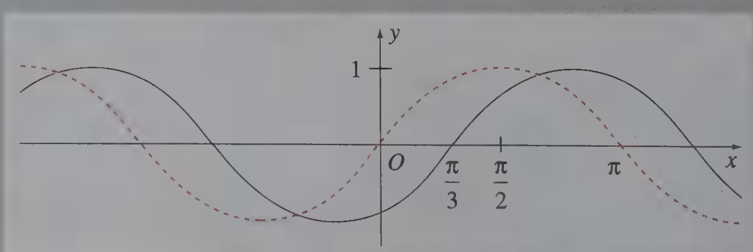
1° $f : x \mapsto |\sin x|$.

Appelons Γ la réunion de $\mathscr{C}$ et de la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses ; alors $\mathscr{C}_f$ est la partie de Γ dont les points ont une ordonnée positive.



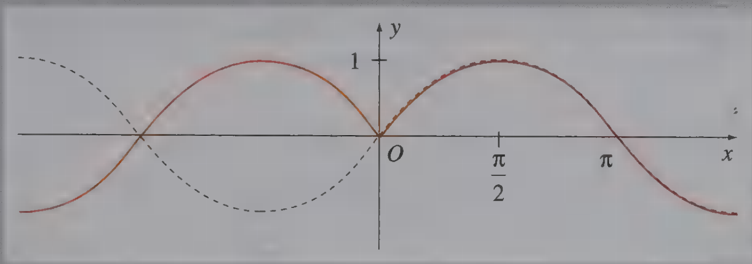
2° $f : x \mapsto \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\dfrac{\pi}{3}\vec{i}$.



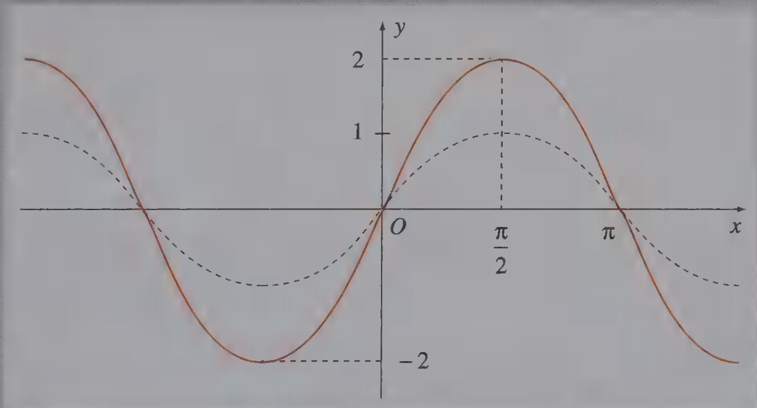
3° $f : x \mapsto \sin |x|$.

La fonction f est paire ; $\mathscr{C}_f$ est la réunion de la partie $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{C}$ dont les points ont une abscisse positive et de la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des ordonnées.



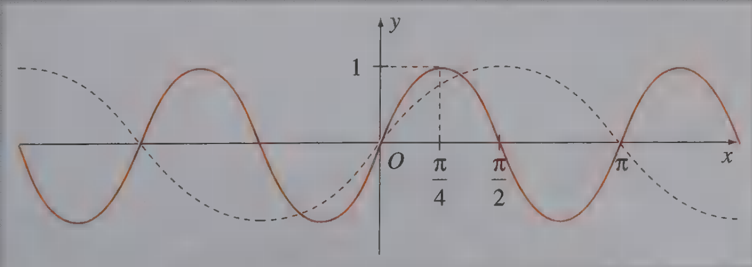
4° $f : x \mapsto 2 \sin x$.

Si M est un point de $\mathscr{C}$ et P est celui de $\mathscr{C}_f$ de même abscisse, alors l'ordonnée de P est double de celle de M.



5° $f : x \mapsto \sin 2x$.

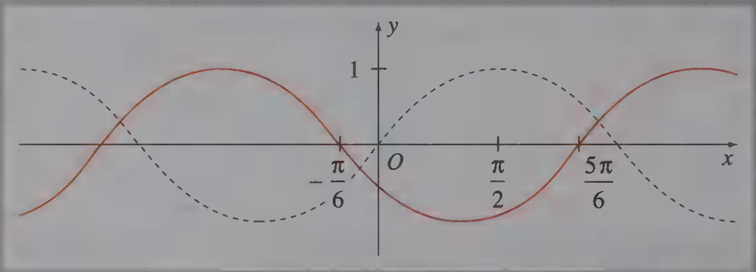
Pour tout point de $\mathscr{C}$, le point de même ordonnée et d'abscisse moitié appartient à $\mathscr{C}_f$.



CORRIGÉS

6° $f : x \mapsto -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

La composée de la translation de vecteur $-\dfrac{\pi}{6}\vec{i}$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite des abscisses transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}_f$.



Le graphique précédent met en évidence que $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\dfrac{5\pi}{6}\vec{i}$; vérifions-le par le calcul :

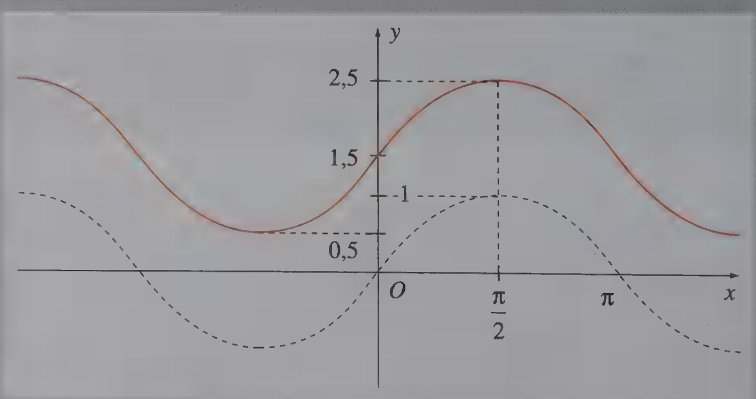
pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{6} - \pi\right) \\ &= \sin\left(x - \frac{5\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Pour tout réel x :
$\sin(x - \pi) = -\sin(x)$.

7° $f : x \mapsto 1{,}5 + \sin x$.

$\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $1{,}5\vec{j}$.



Le tableau suivant résume les propriétés des fonctions proposées que les graphiques mettent en évidence.

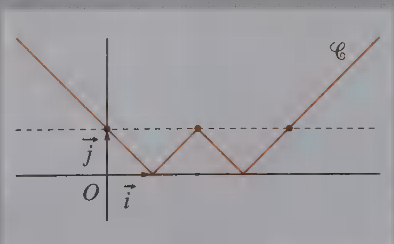
fonctions	parité	période	minimum	maximum
$x \mapsto \sin x$	impaire	2π	-1	1
$x \mapsto \lvert\sin x\rvert$	paire	π	0	1
$x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$		2π	-1	1
$x \mapsto \sin \lvert x\rvert$	paire	2π	-1	1
$x \mapsto 2\sin x$	impaire	2π	-2	2
$x \mapsto \sin 2x$	impaire	π	-1	1
$x \mapsto -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$		2π	-1	1
$x \mapsto 1{,}5 + \sin x$		2π	0,5	2,5

11 $(E) : \ \lvert\lvert x-2\rvert - 1\rvert = a$.
Le nombre de solutions de l'équation (E) est le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $y = a$ et de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :

$$x \mapsto \lvert\lvert x-2\rvert - 1\rvert$$

Soit $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction valeur absolue : $x \mapsto \lvert x\rvert$, $\mathscr{C}_2$ celle de la fonction $f_2 : x \mapsto \lvert x-2\rvert - 1$ et $\mathscr{C}_3$ celle de l'opposée $x \mapsto -\lvert x-2\rvert + 1$ de la fonction f_2 .

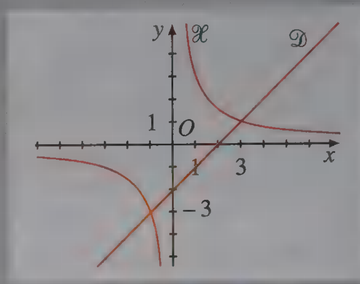
- $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par la translation de vecteur $2\vec{i} - \vec{j}$;
- $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont symétriques par rapport à la droite des abscisses ;
- enfin, $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points d'ordonnée positive de la réunion de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.



La seule droite horizontale qui coupe $\mathscr{C}$ en exactement trois points est celle d'équation $y = 1$, donc, finalement **1 est le seul réel a tel que l'équation (E) : $\lvert\lvert x-2\rvert - 1\rvert = a$ admette exactement trois solutions.**

CORRIGÉS

$\Sigma : \begin{cases} y = \dfrac{3}{x} \\ y = x - 2\,. \end{cases}$



Les solutions de Σ sont les couples de coordonnées des points d'intersection de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation :

$$y = \frac{3}{x}$$

et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$$y = x - 2\,.$$

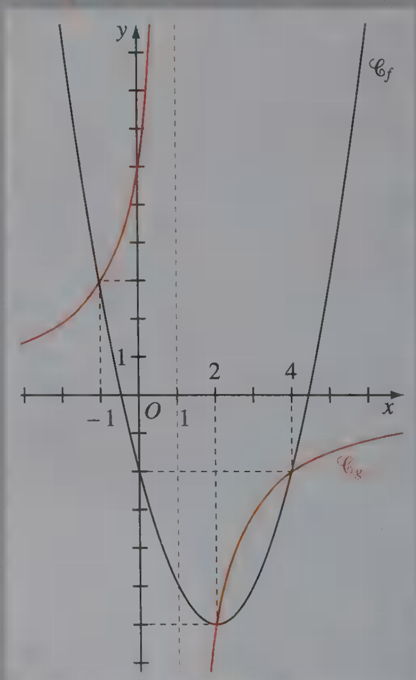
On lit sur la figure que **les solutions de Σ sont :**

$$\mathbf{(3\,;1)} \text{ et } \mathbf{(-1\,;-3)}\,.$$

On vérifie facilement par le calcul que $(3\,;1)$ et $(-1\,;-3)$ sont bien solutions de Σ.

19 $(I) : x^2 - 4x - 2 \geqslant \dfrac{-6}{x-1}$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 2 &= (x^2 - 4x + 4) - 6 \\ &= (x-2)^2 - 6\,. \end{aligned}$$



Soit :

- f le polynôme du second degré : $x \mapsto x^2 - 4x - 2$,
- g la fonction : $x \mapsto \dfrac{-6}{x-1}$.

Les solutions de (I) sont les abscisses des points de la parabole $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus (au sens large) de l'hyperbole $\mathscr{C}_g$.

La forme canonique de f étant :

$$x \mapsto (x-2)^2 - 6\,,$$

$\mathscr{C}_f$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $2\vec{i} - 6\vec{j}$.

Quant à $\mathscr{C}_g$, c'est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{-6}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.

La droite des abscisses et celle d'équation $x = 1$ sont asymptotes à $\mathscr{C}_g$.

On lit sur le graphique :

l'ensemble des solutions de (I) est :

$$\mathbf{]-\infty\,;-1]\cup]1\,;2]\cup[4\,;+\infty[\,.}$$

20 (E) : $\sqrt{x+2}=x^2-x-2$.

Soient :

- f la fonction : $x\mapsto\sqrt{x+2}$,
- g le polynôme du second degré :

$$x\mapsto x^2-x-2\,.$$

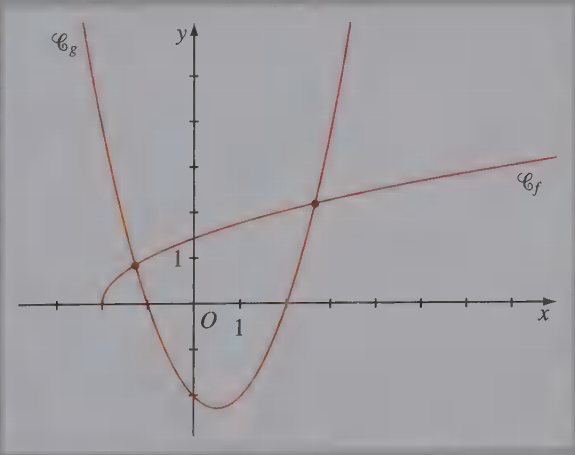
Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$\mathscr{C}_f$ est l'image de la demi-parabole d'équation $y=\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$; la forme canonique de g étant :

$$x\mapsto\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4},$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}$$
$$=x^2-x-2\,.$$

$\mathscr{C}_g$ est l'image de la parabole d'équation $y=x^2$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{9}{4}\vec{j}$.



Sur le graphique, on lit que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont exactement deux points d'intersection, donc :

le nombre de solutions de (E) est 2.

CHAPITRE 3

POLYNÔMES
POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Rappels de cours

I- Polynômes

Définition

Un polynôme est une fonction qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel et a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 sont des réels.
Si a_n est non nul, alors :

- n est le degré du polynôme,
- a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 sont ses coefficients.

Le polynôme nul $x \mapsto 0$ n'a pas de degré.

Égalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et si les coefficients des « termes de même degré » sont égaux.

II- Polynômes du second degré

Soit f le polynôme du second degré : $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$).
Le **discriminant** de f, que l'on notera Δ, est le réel $b^2 - 4ac$.

Forme canonique

Pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$, donc :

pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Minimum, maximum

- Si $a > 0$, alors f admet un minimum, qui est atteint en $-\dfrac{b}{2a}$;
- Si $a < 0$, alors f admet un maximum, qui est atteint en $-\dfrac{b}{2a}$.

Racines et factorisation

On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

et : pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, alors f admet une seule racine x_0 :

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

et : pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine.

Signe

Le signe de $f(x)$ est donné dans les tableaux suivants.

- Si $\Delta > 0$, alors, en notant x' et x'' les deux racines de f de sorte que $x' < x''$:

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, alors, x_0 étant la seule racine de f :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, alors f garde un signe constant, celui de a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Somme et produit des racines

Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines :

- leur somme est égale à $-\dfrac{b}{a}$,
- leur produit est égal à $\dfrac{c}{a}$.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 77)

1° P étant un polynôme de degré 3, quel est le degré de $2P$?

2° Donner un exemple de polynômes P et Q tous deux de degré 3 dont la somme $P + Q$ est de degré 2.

3° Soit P le polynôme : $x \mapsto x^{17} - 3x$.
Que peut-on dire du polynôme Q si le degré de $Q - P$ vaut 0 ?

2

(Corrigé p. 77)

Que peut-on dire des réels a et b si, pour tout réel x :

$$ax^2 + 4x - 3 = bx - 3 \;?$$

3

(Corrigé p. 77)

Résoudre l'équation (E) proposée.

1° $x^2 - 4x + 7 = 0$.

2° $2x^2 + \sqrt{5}x + \dfrac{1}{2} = 0$.

3° $x^2 - 3x + 2{,}25 = 0$.

4

(Corrigé p. 78)

Soit f la fonction : $x \mapsto 2x^2 + 5x - 3$.
Après avoir vérifié :

$$\text{pour tout réel } x\,,\; f(x) = (2x-1)(x+3) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8},$$

choisir la meilleur expression de $f(x)$ pour :

1° déterminer le minimum de f ;

2° étudier le signe de $f(x)$;

3° résoudre l'inéquation $f(x) < -3$.

EXERCICES d'entraînement

Polynômes

5 ★ 5 min (Corrigé p. 79)

Soient les polynômes P et Q définis par :

$$P(x) = 4x^2 - x + 4 ,$$
$$Q(x) = -6x^3 + x - 5 .$$

1° Prévoir le degré des polynômes $P + Q$, $P - Q$, $3P - 2Q$ et $P \times Q$.

2° Déterminer les polynômes $P + Q$, $P - Q$, $3P - 2Q$ et $P \times Q$.

6 ★ 1 min (Corrigé p. 79)

P, Q et R sont des polynômes de degrés respectifs 1, 2 et 6.
Quel est le degré du polynôme $P \times Q \times R$?

7 ★ 5 min (Corrigé p. 79)

Trouver le degré et le coefficient de plus haut degré du polynôme P proposé.

1° $P(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$.

2° $P(x) = (x - 2)^4 - 7x^2 + 13x$.

3° $P(x) = (x + 1)(x^3 - 5) + x(7x^2 - x^3)$.

8 ★ 5 min (Corrigé p. 80)

Dans chacun des cas suivants, déterminer un polynôme P de degré 4 tel que :

1° P ne prend que des valeurs strictement négatives ;

2° P s'annule exactement une fois ;

3° P s'annule exactement trois fois.

9 ★★ 10 min

(Corrigé p. 80)

Indiquer si la fonction f proposée est un polynôme. Si oui, en préciser le degré.

1° $f : x \mapsto \sqrt{5}$.

2° $f : x \mapsto 0{,}3 \sin^2 x - 3 \times 10^{-1} + 0{,}3 \cos^2 x$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

4° $f : x \mapsto 0{,}5x^{10} + 3x^5 - 7x + \sqrt{x} + 2$.

5° $f : x \mapsto x^7 - 0{,}5x^6 - x^7 + 3x^5 - 2{,}7x^2 + \dfrac{1}{2}x^6 + 4$.

6° $f : x \mapsto \dfrac{x + 5}{\pi}$.

Équations du second degré

10 ★ 1 min

(Corrigé p. 81)

Quel est le discriminant de :

$$x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2 \text{ ?}$$

11 ★★ 5 min

(Corrigé p. 81)

Justifier rapidement que l'équation :

$$2\,221x^2 - 3\,332x - 4\,443 = 0$$

admet deux solutions de signes contraires.

12 ★★ 10 min

(Corrigé p. 82)

1° Résoudre l'équation (E) :

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 .$$

2° En déduire les solutions de l'équation (E') :

$$3x^4 - 5x^2 - 2 = 0 .$$

EXERCICES

13 ★ ★ 5 min (Corrigé p. 82)

Sans calculer le discriminant, déterminer une solution de l'équation (E) proposée puis en déduire l'autre :

1° $x^2 + x - 6 = 0$. **2°** $3x^2 + x - 2 = 0$.

14 ★ ★ 10 min (Corrigé p. 83)

Le but de l'exercice est de calculer par deux méthodes les racines du polynôme $f : x \mapsto x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$, et de comparer ces deux méthodes.

1° Développer $(x - x_1)(x - x_2)$.
En déduire une factorisation de f. Quelles sont les racines de f ?

2° Déterminer les racines de f par la méthode du discriminant.

3° Vérifier que les deux méthodes conduisent bien au même résultat.

15 ★ ★ 15 min (Corrigé p. 84)

Un jardin rectangulaire a une aire de 12 ares et un périmètre de 140 mètres. Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

16 ★ ★ 15 min (Corrigé p. 84)

Deux automobilistes effectuent le même parcours de 400 km, mais le second le fait à 20 km/h de plus que le premier et en une heure de moins.
Donner la vitesse de chacun d'eux et le temps nécessaire à chacun pour parcourir le trajet.

Signe d'un polynôme du second degré

17 ★ 5 min (Corrigé p. 85)

Déterminer (de tête !) le signe de chacune des expressions suivantes en fonction du réel x :

1° $(x + 2)(x - 3)$; **2°** $(x + 2)(2 - 3x)$; **3°** $x^2 + x + 1$.

18 ★ 10 min (Corrigé p. 86)

Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x pour le polynôme du second degré f proposé.

1° $f : x \mapsto -3x^2 + 5x + 7$.

2° $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + x + 9$.

3° $f : x \mapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 3$.

19 ★★ 5 min (Corrigé p. 87)

Soient a, b, c des réels $(a \neq 0)$ tels que le trinôme du second degré f : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admette un discriminant Δ strictement négatif.
Peut-on affirmer que, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de c ?

20 ★★ 5 min (Corrigé p. 87)

Soient a, b, c des réels $(a \neq 0)$ tels que le trinôme du second degré f : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admette deux racines x_1 et x_2.

Que peut-on dire du signe de $f\left(\dfrac{x_1 + 2x_2}{3}\right)$?

21 ★★ 10 min (Corrigé p. 87)

Soit f la fonction $x \mapsto |-x^2 + 5x - 7|$.
f est-elle un polynôme ?

Sens de variation d'un polynôme du second degré

22 ★★ 20 min (Corrigé p. 88)

On considère un carré $ABCD$ de côté 10 cm et on note I le milieu de $[AD]$; de plus, M est un point de $[AB]$, N est le point de $[BC]$ qui vérifie $BN = AM$.

1° Soient x le réel tel que : $AM = x$ en cm, et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle MIN en cm^2.

a. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de x ?

b. Calculer $\mathscr{A}(0)$ et $\mathscr{A}(10)$.

c. Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x .

d. Dresser le tableau de variation de $\mathscr{A}$.

2° En déduire l'aire maximale et l'aire minimale du triangle MIN .

Résolution d'équations

23 ★ — 10 min (Corrigé p. 90)

Résoudre l'équation (E) proposée.

1° $x^3 + 4x^2 + 5x = 0$.

2° $x + 2 + \dfrac{1}{x} = 0$.

24 ★★ — 15 min (Corrigé p. 90)

Soit f le polynôme :

$$x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30 .$$

1° Démontrer qu'il existe des réels a et b , à déterminer, tels que :

$$\text{pour tout réel } x ,\ f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b) .$$

2° En déduire les racines de f .

CORRIGÉS des exercices

1 1° Si P est un polynôme de degré 3, alors **$2P$ est également un polynôme de degré 3.**

> Si P est un polynôme non nul, alors tout multiple non nul de P a le même degré que P.

2° En posant :

$$P : x \mapsto x^3 + x^2 \text{ et } Q : x \mapsto -x^3 + x^2,$$

P et Q sont des polynômes de degré 3, leur somme $P + Q$ est le polynôme :

$$x \mapsto x^2, \text{ qui a pour degré 2.}$$

3° $P : x \mapsto x^{17} - 3x$.

Le degré du polynôme $Q - P$ vaut 0 si, et seulement si, $Q - P$ est un polynôme constant non nul, c'est-à-dire si, et seulement si, **Q peut s'écrire :**

$$\boldsymbol{x \mapsto x^{17} - 3x + C}, \textbf{ où } \boldsymbol{C} \textbf{ est un nombre réel non nul.}$$

2 Si, pour tout réel x :

$$ax^2 + 4x - 3 = bx - 3,$$

alors les polynômes :

$$x \mapsto ax^2 + 4x - 3 \text{ et } x \mapsto bx - 3$$

sont égaux, donc ils ont le même degré et les mêmes coefficients, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{a = 0 \text{ et } b = 4}.$$

> Réciproquement, si $a = 0$ et $b = 4$, alors, pour tout réel x :
> $ax^2 + 4x - 3 = bx - 3$.

3 1° $(E) : x^2 - 4x + 7 = 0$.

Le discriminant Δ de l'équation du second degré (E) vérifie :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12.$$

$\Delta < 0$, donc (E) **n'admet pas de solution.**

2° $(E) : 2x^2 + \sqrt{5}x + \dfrac{1}{2} = 0$.

Soit Δ le discriminant de l'équation du second degré (E) :

$$\Delta = (\sqrt{5})^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5 - 4 = 1.$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \boldsymbol{-\frac{1 + \sqrt{5}}{4}}, \quad \boldsymbol{x_2} = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \boldsymbol{\frac{1 - \sqrt{5}}{4}}.$$

3° (E) : $x^2 - 3x + 2{,}25 = 0$.
Le discriminant Δ de l'équation du second degré (E) vérifie :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2{,}25 = 9 - 9 = 0 .$$

$\Delta = 0$, donc (E) admet une seule solution x_0 :

$$\boldsymbol{x_0} = \frac{-(-3)}{2 \times 1} = \frac{3}{2} = \mathbf{1{,}5} .$$

On aurait aussi pu remarquer que, pour tout réel x : $x^2 - 3x + 2{,}25 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

4 $f : x \mapsto 2x^2 + 5x - 3$.

Pour tout réel x :

• $(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$,

• $$2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} = 2\left(x^2 + 2 \times \frac{5}{4} \times x + \frac{25}{16}\right) - \frac{49}{8}$$
$$= 2x^2 + 5x + \frac{25 - 49}{8}$$
$$= 2x^2 + 5x - 3 ,$$

ce qui permet d'affirmer :

$$\textbf{pour tout réel } \boldsymbol{x} \text{ , } \boldsymbol{f(x) = (2x-1)(x+3) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}} .$$

1° « $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ » met en évidence que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{49}{8}$ (et qu'il est atteint en $-\frac{5}{4}$) .

2° « $f(x) = (2x-1)(x+3)$ » permet d'étudier le signe de $f(x)$ (en dressant un tableau de signes ou en utilisant les résultats concernant le signe d'un trinôme du second degré).

3° « $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ » met en évidence que l'inéquation $f(x) < -3$ est équivalente à $2x^2 + 5x < 0$ (que l'on sait résoudre, puisque l'on est ramené à étudier le signe de $x(2x+5)$) .

$-\frac{49}{8} = -6{,}125$.

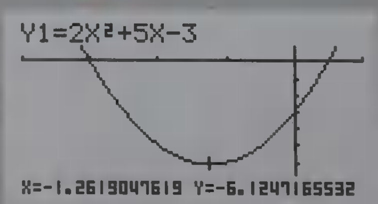
Copie d'écran de calculatrice obtenue :

• en entrant :

Y1=2X²+5X–3

• avec le cadrage :

$-4 \leqslant x \leqslant 1$,
$-8 \leqslant y \leqslant 2$.



5 $P(x) = 4x^2 - x + 4$ et $Q(x) = -6x^3 + x - 5$.

1° Les degrés des polynômes P et Q étant respectivement égaux à 2 et 3, on peut affirmer que **les polynômes $P + Q$, $P - Q$, $3P - 2Q$ seront de degré 3** (le plus grand des deux degrés) et que **$P \times Q$ sera de degré 5** (la somme des deux degrés).

2° $$\begin{aligned}(P + Q)(x) &= P(x) + Q(x)\\ &= (4x^2 - x + 4) + (-6x^3 + x - 5)\\ &= -6x^3 + 4x^2 - 1.\end{aligned}$$

Donc $P + Q$ est le polynôme (de degré 3) tel que :

$$\boldsymbol{(P + Q)(x) = -6x^3 + 4x^2 - 1.}$$

$$\begin{aligned}(P - Q)(x) &= P(x) - Q(x)\\ &= (4x^2 - x + 4) - (-6x^3 + x - 5)\\ &= 4x^2 - x + 4 + 6x^3 - x + 5\\ &= 6x^3 + 4x^2 - 2x + 9.\end{aligned}$$

Donc $P - Q$ est le polynôme (de degré 3) tel que :

$$\boldsymbol{(P - Q)(x) = 6x^3 + 4x^2 - 2x + 9.}$$

$$\begin{aligned}(3P - 2Q)(x) &= 3(4x^2 - x + 4) - 2(-6x^3 + x - 5)\\ &= 12x^2 - 3x + 12 + 12x^3 - 2x + 10\\ &= 12x^3 + 12x^2 - 5x + 22.\end{aligned}$$

Donc $3P - 2Q$ est le polynôme (de degré 3) tel que :

$$\boldsymbol{(3P - 2Q)(x) = 12x^3 + 12x^2 - 5x + 22.}$$

$$\begin{aligned}(P \times Q)(x) &= P(x) \times Q(x)\\ &= (4x^2 - x + 4)(-6x^3 + x - 5)\\ &= -24x^5 + 6x^4 - 24x^3 + 4x^3 - x^2 + 4x - 20x^2 + 5x - 20\\ &= -24x^5 + 6x^4 - 20x^3 - 21x^2 + 9x - 20.\end{aligned}$$

Donc $P \times Q$ sera le polynôme (de degré 5) tel que :

$$\boldsymbol{(P \times Q)(x) = -24x^5 + 6x^4 - 20x^3 - 21x^2 + 9x - 20.}$$

6 P, Q et R étant des polynômes de degrés respectifs 1, 2 et 6, le degré **du polynôme $P \times Q \times R$** est $1 + 2 + 6$, c'est-à-dire **9**.

7 1° $P(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$.

P est le produit d'un polynôme de degré 2 par un polynôme de degré 4, donc **P est un polynôme de degré 6.**

De plus : $x^2 \times (-x^4) = -x^6$,

donc **le coefficient du terme de plus haut degré de P est -1.**

2° $P(x) = (x - 2)^4 - 7x^2 + 13x$.

Le polynôme P est de degré 4 et le coefficient de son terme de plus haut degré est celui de $(x - 2)^4$, c'est-à-dire **1.**

CORRIGÉS

3° $P(x) = (x+1)(x^3-5) + x(7x^2 - x^3)$.
On a, pour tout réel x :

$$P(x) = x^4 + x^3 - 5x - 5 + 7x^3 - x^4$$
$$= 8x^3 - 5x - 5,$$

donc **le polynôme P est de degré 3 et le coefficient de son terme de plus haut degré est 8.**

P n'est pas de degré 4 car les termes en x^4 s'annulent.

8 1° Pour tout réel x :

$$-x^4 - 1 < 0 ;$$

le polynôme :

$$P : x \mapsto -x^4 - 1$$

est de degré 4 et ne prend que des valeurs strictement négatives.

Autres exemples :
$x \mapsto -3x^4 - 2$,
$x \mapsto -x^4 - x^2 - 1$,
$x \mapsto -x^4 - 0{,}001$, etc.

2° Le polynôme :

$$P : x \mapsto (x-2)^4$$

est de degré 4 et s'annule exactement une fois (en 2).

Autres exemples :
$x \mapsto -3x^4$,
$x \mapsto 5(x-0{,}1)^4$, etc.

3° Le polynôme :

$$P : x \mapsto x(x-1)(x-2)^2$$

est de degré 4 et s'annule exactement trois fois (en 0, 1 et 2).

Autres exemples :
$x \mapsto -3x^2(x+2)(x-1)$,
$x \mapsto 5(x+3)^2(x-\pi)(x-1)$,
etc.

9 1° $f : x \mapsto \sqrt{5}$.
La fonction f est une fonction constante non nulle, définie sur $\mathbb{R}$.
Donc **f est un polynôme de degré 0.**

2° $f : x \mapsto 0{,}3 \sin^2 x - 3 \times 10^{-1} + 0{,}3 \cos^2 x$.
Pour tout réel x :

$$f(x) = 0{,}3(\sin^2 x + \cos^2 x) - 0{,}3$$
$$= 0{,}3 \times 1 - 0{,}3 = 0.$$

Donc **f est le polynôme nul $x \mapsto 0$; il n'a pas de degré.**

Rappel : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.
La fonction f n'est pas définie en -2.
Son ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$, donc **f n'est pas un polynôme.**

4° $f : x \mapsto 0{,}5\,x^{10} + 3x^5 - 7x + \sqrt{x} + 2$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$, donc f **n'est pas un polynôme.**

5° $f : x \mapsto x^7 - 0{,}5x^6 - x^7 + 3x^5 - 2{,}7x^2 + \dfrac{1}{2}x^6 + 4$.

Pour tout réel x , $f(x) = 3x^5 - 2{,}7x^2 + 4$.

Donc f **est un polynôme de degré 5.**

6° $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{\pi}$.

Pour tout réel x , $f(x) = \dfrac{1}{\pi}x + \dfrac{5}{\pi}$.

Donc f **est un polynôme de degré 1** ; c'est une fonction affine.

10 Le polynôme du second degré :

$$x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2$$

admet une seule racine (qui est $\dfrac{4\,321}{1\,234}$) , donc **le discriminant de $x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2$ est égal à 0.**

Il était inutile (et pénible !) de calculer le discriminant.

11 Notons (E) l'équation du second degré :

$$2\,221x^2 - 3\,332x - 4\,443 = 0 .$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = (-3\,332)^2 - 4 \times 2\,221 \times (-4\,443)$$
$$= 3\,332^2 + 4 \times 2\,221 \times 4\,443$$

donc : $\Delta > 0$, ce qui prouve que (E) **admet deux solutions distinctes x_1 et x_2** ; de plus, le produit de ces solutions est égal à $\dfrac{-4\,443}{3\,332}$, donc : $x_1 \times x_2 < 0$, ce qui signifie que **x_1 et x_2 sont de signes contraires.**

Inutile de terminer le calcul de Δ pour connaître son signe.

Si deux nombres ont un produit strictement négatif, alors ils sont de signe contraire.

Plus généralement, si $ac < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions de signes contraires.

CORRIGÉS

13 1° $(E) : 3x^2 - 5x - 2 = 0$.
Soit Δ le discriminant de l'équation du second degré (E) :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 ;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5+7}{6} = 2 .$$

x est solution de (E') si, et seulement si, x^2 est solution de (E).

2° $(E') : 3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$.
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3x^4 - 5x^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow 3(x^2)^2 - 5x^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \text{ ou } x^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \\ &\quad\ \text{ou } x = \sqrt{2} . \end{aligned}$$

$-\frac{1}{3} < 0$, donc l'équation $x^2 = -\frac{1}{3}$ n'admet pas de solution.

Finalement, **les solutions de (E') sont :**

$$\mathbf{-\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{2}} .$$

14 1° $(E) : x^2 + x - 6 = 0$.
2 est solution de (E) car :

$$2^2 + 2 - 6 = 0 .$$

Le produit des solutions de (E) est $\frac{-6}{1}$, c'est-à-dire -6 , donc l'autre solution de (E) est $\frac{-6}{2}$, soit -3.

Les solutions de (E) sont donc 2 et -3 .

Lorsque l'équation :
$ax^2 + bx + c = 0$
admet deux solutions :
- leur somme vaut $-\frac{b}{a}$
- leur produit vaut $\frac{c}{a}$.

2° $(E) : 3x^2 + x - 2 = 0$.
-1 est solution de (E) car :

$$3 \times (-1)^2 + (-1) - 2 = 0 .$$

Le produit des solutions de (E) est $\frac{-2}{3}$; donc l'autre solution de (E) est $-\left(\frac{-2}{3}\right)$, soit $\frac{2}{3}$.

Finalement, les solutions de (E) sont donc -1 et $\frac{2}{3}$.

14 $f : x \mapsto x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$.

1° • Pour tout réel x :

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 .$$

• En remarquant que le polynôme f du second degré a :
– pour coefficient de x l'opposé de la somme de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$,
– pour terme constant le produit de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$,
on obtient :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}),$$

ce qui met en évidence que **les racines de f sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$**.

2° En notant Δ le discriminant de f :

$$\Delta = (-(\sqrt{2} + \sqrt{3}))^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{6} = 2 + 3 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

• Déterminons le signe de Δ, c'est-à-dire comparons les nombres 5 et $2\sqrt{6}$.
$5^2 = 25$ et $(2\sqrt{6})^2 = 4 \times 6 = 24$, donc $5^2 > (2\sqrt{6})^2$, donc, deux réels positifs étant rangés comme leurs carrés : $5 > 2\sqrt{6}$, ce qui prouve : $\Delta > 0$.

• $\Delta > 0$, donc f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-(\sqrt{2} + \sqrt{3})) - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2}},$$

$$x_2 = \frac{-(-(\sqrt{2} + \sqrt{3})) + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2}}.$$

3° Les écritures des racines obtenues par les deux méthodes sont très différentes, car, dans la deuxième, l'expression de $\sqrt{\Delta}$ n'a pas été simplifiée.
En notant que : $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 + 2 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$,
on peut écrire : $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, et l'on obtient :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{3}.$$

Finalement :

les deux méthodes conduisent bien au même résultat.

CORRIGÉS

15 En premier lieu, rappelons que 1 are vaut 100 m², et donc que 12 ares valent 1 200 m². Appelons x et y les dimensions, en mètres, du jardin ; les réels positifs x et y satisfont au système d'équation (S) :

$$\begin{cases} xy = 1\,200 \\ 2(x+y) = 140, \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1\,200 \\ y = 70 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(70-x) = 1\,200 \\ y = 70 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 70x + 1\,200 = 0 \\ y = 70 - x. \end{cases}$$

Soit (E) l'équation du second degré :

$$x^2 - 70x + 1\,200 = 0.$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = (-70)^2 - 4 \times 1 \times 1\,200 = 4\,900 - 4\,800 = 100 ;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-70) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{70 - 10}{2} = 30,$$

$$x_2 = \frac{-(-70) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{70 + 10}{2} = 40,$$

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$: le problème posé a bien une solution.

Il vient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ ou } x = 40 \\ y = 70 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 70 - x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 40 \\ y = 70 - x, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 40 \\ y = 30. \end{cases}$$

Finalement, **la longueur du jardin est de 40 m et la largeur de 30 m.**

16 Appelons v la vitesse en km/h du premier automobiliste et t le temps en heures qu'il met pour parcourir le trajet.

On a :

$$v \times t = 400 \quad (1).$$

(1) donne : $t = \dfrac{400}{v}$.

Par ailleurs, le deuxième automobiliste effectue le même trajet avec une vitesse de $(v + 20)$ km/h et un temps de parcours de $(t - 1)$ heures.

On a donc :

$$(v + 20) \times (t - 1) = 400 \quad (2).$$

En remplaçant dans (2), on obtient :

$$(v + 20) \times \left(\frac{400}{v} - 1\right) = 400 \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow 400 - v + \frac{8\,000}{v} - 20 - 400 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow v - \frac{8\,000}{v} + 20 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{v^2 - 8\,000 + 20v}{v} = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow v^2 + 20v - 8\,000 = 0\,.$$

Soit alors (E) l'équation du second degré :

$$v^2 + 20v - 8\,000 = 0\,;$$

son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = 20^2 - 4 \times 1 \times (-8\,000) = 400 + 32\,000 = 32\,400\,.$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes v_1 et v_2 :

$$v_1 = \frac{-20 - \sqrt{32\,400}}{2 \times 1} = \frac{-20 + 180}{2} = 80\,,$$

$$v_2 = \frac{-20 + \sqrt{32\,400}}{2 \times 1} = \frac{-20 - 180}{2} = -100\,,$$

v étant un réel positif, la seule valeur possible pour v est 80 ; il vient :

• $t = \dfrac{400}{80} = 5$; **le premier automobiliste roule à 80 km/h, la durée de son trajet étant de 5 h ;**

• $v + 20 = 80 + 20 = 100$, $t - 1 = 5 - 1 = 4$; **le second roule à 100 km/h, la durée de son trajet étant de 4 h.**

17 **1°** $(x + 2)(x - 3)$.

$x \mapsto (x + 2)(x - 3)$ est un polynôme du second degré, dont le coefficient de x^2 est positif, et qui a pour racines -2 et 3, donc :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2° $(x + 2)(2 - 3x)$.

$x \mapsto (x + 2)(2 - 3x)$ est un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif (il vaut -3) ; de plus, ses racines sont -2 et $\dfrac{2}{3}$, donc :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$(x+2)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

CORRIGÉS

3° $x^2 + x + 1$.

$x \mapsto x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant Δ est strictement négatif ($\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$) ; de plus, le coefficient de x^2 est positif, donc :

pour tout réel x , $x^2 + x + 1 > 0$.

1° $f : x \mapsto -3x^2 + 5x + 7$.

Soit Δ le discriminant de f :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times 7 = 25 + 84 = 109 .$$

$\Delta > 0$, donc f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{109}}{2 \times (-3)} = \frac{5 + \sqrt{109}}{6} , \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{2 \times (-3)} = \frac{5 - \sqrt{109}}{6} .$$

En remarquant que le coefficient de x^2 de f est négatif et $x_2 < x_1$, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement :

- **si $x \in]-\infty ; x_2[\cup]x_1 ; +\infty[$, alors $f(x) < 0$,**
- **si $x \in]x_2 ; x_1[$, alors $f(x) > 0$**
- **si $x = x_2$ ou $x = x_1$, alors $f(x) = 0$.**

2° $f : x \mapsto \dfrac{1}{2} x^2 + x + 9$.

Soit Δ le discriminant de f .

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 9 = 1 - 18 = -17 .$$

$\Delta < 0$, donc f garde un signe constant et, puisque $\dfrac{1}{2} > 0$:

pour tout réel x , $f(x) > 0$.

3° $f : x \mapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 3$.

Soit Δ le discriminant de f :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\sqrt{3})^2 - 4 \times (-1) \times (-3) \\ &= 12 - 12 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

$\Delta = 0$, donc f admet une seule racine x_0 :

$$x_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \times (-1)} = \sqrt{3} .$$

On pouvait également remarquer que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3) \\ &= -(x - \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

Le signe de $f(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

Finalement : **$f(\sqrt{3}) = 0$ et, pour tout réel x distinct de $\sqrt{3}$, $f(x) < 0$.**

19 Par hypothèse, le trinôme du second degré f :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

admet un discriminant Δ strictement négatif ; on sait qu'alors f garde un signe constant, qui est en particulier celui de $f(0)$, c'est-à-dire celui de c.

On a ainsi prouvé que :

pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de c.

Attention ! Ne pas dire : « $f(x)$ n'est pas du signe de c car il est du signe de a ». Ici, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a et du signe de c.

20 $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, x_1 et x_2 ses racines.

Remarquons que $\dfrac{x_1 + 2x_2}{3}$ est strictement compris entre x_1 et x_2 :

- dans le cas où $x_1 < x_2$:

$$x_1 + 2x_1 < x_1 + 2x_2 < x_2 + 2x_2,$$

c'est-à-dire : $$3x_1 < x_1 + 2x_2 < 3x_2,$$

donc : $$x_1 < \frac{x_1 + 2x_2}{3} < x_2 ;$$

$\dfrac{x_1 + 2x_2}{3}$ est une moyenne pondérée.

- dans le cas où $x_2 < x_1$, on obtient de même :

$$x_2 < \frac{x_1 + 2x_2}{3} < x_1.$$

On en déduit que :

$$f\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right) \text{ est du signe contraire de celui de } a.$$

21 $f : x \mapsto |-x^2 + 5x - 7|$.

Soit g le polynôme du second degré :

$$x \mapsto -x^2 + 5x - 7$$

et Δ son discriminant :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 25 - 28 = -3.$$

Δ est strictement négatif, donc g garde un signe constant ; de plus le

CORRIGÉS

coefficient de x^2 est -1 , $-1 < 0$, donc, pour tout réel x :

$$g(x) < 0 ,$$

d'où :

$$|g(x)| = -g(x) ,$$

et :

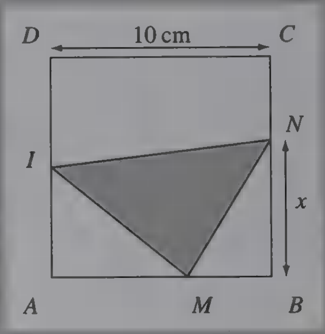
$$f(x) = -g(x) = x^2 - 5x + 7 .$$

Par conséquent, f s'écrit :

$$x \mapsto x^2 - 5x + 7 ,$$

ce qui prouve que f **est un polynôme**.

22



1° $\mathscr{A}(x)$ est l'aire du triangle MIN en cm².

a. M est un point de $[AB]$ et $AB = 10$, donc :

$$0 \leqslant AM \leqslant 10 ,$$

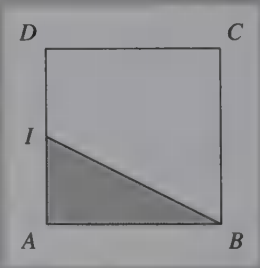
c'est-à-dire :

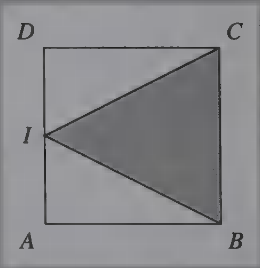
$$0 \leqslant x \leqslant 10 .$$

Réciproquement, pour tout x de $[0 ; 10]$, il existe un (et un seul) point M de $[AB]$, un (et un seul) point N de $[BC]$ tels que $AM = BN = x$.

L'ensemble des valeurs possibles de x est donc $[0 ; 10]$.

b.





- $\mathscr{A}(0)$ est l'aire en cm² du triangle IAB , donc $\mathbf{\mathscr{A}(0) = 25}$.
- $\mathscr{A}(10)$ est l'aire en cm² du triangle BIC , donc $\mathbf{\mathscr{A}(10) = 50}$.

c. Le carré $ABCD$ a une aire de 100 cm² ; d'autre part, l'aire du carré $ABCD$ est égale à la somme des aires :

• du triangle MIN,

• du triangle AMI, rectangle en A, tel que : $AI = 5$ et $AM = x$,

• du triangle MBN, rectangle en B, tel que : $BM = 10 - x$ et $BN = x$,

• du trapèze $DINC$, de bases $[DI]$, $[CN]$, de hauteur $[DC]$, telles que :

$$DI = 5\ ,\ CN = 10 - x \text{ et } DC = 10\ ,$$

donc :

$$\begin{aligned} 100 &= \mathscr{A}(x) + \frac{5 \times x}{2} + \frac{(10-x) \times x}{2} + \frac{5 + (10-x)}{2} \times 10 \\ &= \mathscr{A}(x) + \frac{5}{2}x + 5x - \frac{1}{2}x^2 + 75 - 5x \\ &= \mathscr{A}(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 75\ , \end{aligned}$$

donc : $$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 100 - 75 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25\ .$$

Finalement : **pour tout x de $[0\ ;\ 10]$, $\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25$.**

d. Pour obtenir le tableau de variation de $\mathscr{A}$, déterminons la forme canonique du polynôme du second degré :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25\ .$$

Pour tout réel x :

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25 = \frac{1}{2}(x^2 - 5x) + 25 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} + 25\ .$$

On en déduit, pour tout x de $[0\ ;\ 10]$:

$$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{175}{8}\ ,$$

et le tableau de variation de $\mathscr{A}$ sur $[0\ ;\ 10]$:

x	0	$\frac{5}{2}$	10
$\mathscr{A}(x)$	25 ↘	$\frac{175}{8}$	↗ 50

$\frac{175}{8} = 21{,}875$.

2° D'après le tableau de variation de $\mathscr{A}$:

• **l'aire maximale du triangle MIN est 50 cm^2,**

• **l'aire minimale du triangle MIN est 21,875 cm^2.**

23 1° (E) : $x^3 + 4x^2 + 5x = 0$.

Pour tout réel x :

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + 4x + 5 = 0 .$$

Soit alors (E') l'équation du second degré $x^2 + 4x + 5 = 0$; en notant Δ son discriminant :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 ;$$

$\Delta < 0$, donc (E') n'admet pas de solution.

En conclusion :

la seule solution de l'équation (E) est 0 .

2° (E) : $x + 2 + \dfrac{1}{x} = 0$.

Si un réel x est solution de (E), il est nécessairement non nul.

Pour tout réel x non nul :

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$

Pour tous réels a et b :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

On a ainsi démontré que :

-1 est la seule solution de (E).

24 $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$.

1° Pour tout réel x ,

$$(x^2 - 2)(x^2 + ax + b) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x^2 - 2ax - 2b$$
$$= x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - 2ax - 2b .$$

Donc, dire :

pour tout réel x , $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b)$

signifie que le polynôme : $x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$

et le polynôme : $x \mapsto x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - 2ax - 2b$

sont égaux, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 2 = -17 \\ -2a = 4 \\ -2b = 30 , \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\boldsymbol{a = -2}$ **et** $\boldsymbol{b = -15}$.

2° D'après la première question :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 2x - 15),$$

donc :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 2x - 15 = 0.$$

• Les solutions de l'équation $x^2 - 2 = 0$ sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

• Soient (E) l'équation du second degré :

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

et Δ son discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{2-8}{2} = -3,\quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Finalement, **les racines de f sont $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -3 et 5.**

CORRIGÉS

DÉRIVATION

Rappels de cours

f est une fonction dont l'ensemble de définition est un intervalle I et a un réel de I.

I- Nombre dérivé

Dire que f **est dérivable en** a signifie que :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

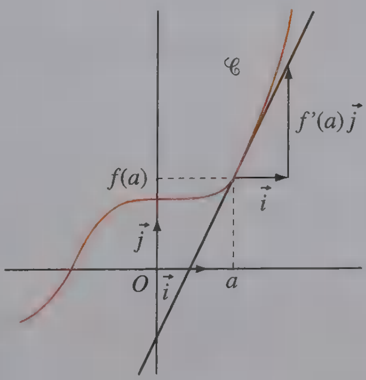
(le taux de variation de f entre a et $a+h$) admet une limite finie ℓ quand h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors appelé **nombre dérivé de** f **en** a, et noté $f'(a)$.

II- Interprétation graphique : tangente

Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet, au point A d'abscisse a, une tangente non verticale de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation :

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a).$$

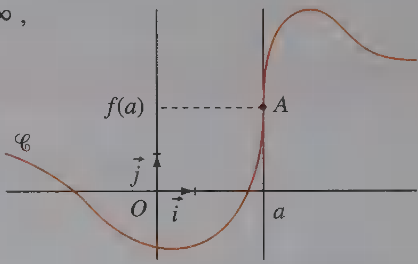


La fonction : $x \mapsto f'(a)\,(x-a) + f(a)$ est **l'approximation affine associée à** f **en** a.

Si l'on a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$

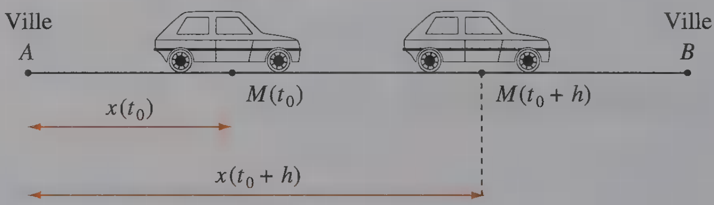
ou encore : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$,

alors f n'est pas dérivable en a ; si de plus : $\lim\limits_{a} f = f(a)$, alors la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet, au point A d'abscisse a , une tangente verticale d'équation : $x = a$.



III- Interprétation cinématique : vitesse

Un véhicule se rend sur une route rectiligne, d'une ville A à une ville B . À chaque instant t , on peut associer la distance AM qui sépare le véhicule de son point de départ ; on note $x(t)$ cette distance.



On définit ainsi une fonction $x : t \mapsto x(t)$ avec $x(t)$ la distance de A à $M(t)$ (x est ici une fonction de la variable t).

Par définition, $\dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ est la **vitesse moyenne** du véhicule entre les instants t_0 et t_0+h .

Si la fonction x est dérivable en t_0 , alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ est la **vitesse instantanée** du véhicule à l'instant t_0 ; c'est le nombre dérivé de la fonction x en t_0 .

IV- Dérivation sur un intervalle - Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout réel de I , et la fonction dérivée de f sur I est alors la fonction f' qui, à tout réel x de I , associe $f'(x)$ (c'est-à-dire le nombre dérivé de f en x).

Dérivées des fonctions usuelles

f	f'	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Dérivées et opérations

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I ; λ est un réel.

Formule	Conditions
$(u+v)' = u' + v'$	
$(\lambda u)' = \lambda u'$	
$(uv)' = u'v + uv'$	
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Fonction dérivée de la composée d'une fonction affine par une fonction u

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

a et b sont des réels, a est non nul, et J est l'ensemble des réels x tels que $ax + b$ appartient à I ; alors la fonction :

> **$f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur I**
> **et :**
> **pour tout x de I, $f'(x) = au'(ax+b)$**

COURS

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 100)

Tracer les droites d_1 , d_2 , d_3 , d_4 et d_5 passant par le point $A(3\,;4)$, et de coefficients directeurs respectifs :

$$m_1 = 2\,,\ m_2 = -1\,,\ m_3 = \frac{4}{3}\,,\ m_4 = 0 \text{ et } m_5 = -\frac{1}{5}\,.$$

2

(Corrigé p. 100)

En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de la fonction f :

$$x \mapsto x^2 - 3x + 5 \text{ en } -1.$$

3

(Corrigé p. 101)

On appelle f la fonction : $x \mapsto x^3 - 7x^2 + 3x - 2$.

1° Pour tout réel h , calculer $f(2+h) - f(2)$.

2° Montrer que f est dérivable en 2. Que vaut $f'(2)$?

4

(Corrigé p. 101)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.

EXERCICES
d'entraînement

Nombre dérivé et tangente

5 ★★ 20 min (Corrigé p. 102)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^2 + 4x - 7$.
Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1° Montrer en utilisant la définition que f est dérivable en 1, puis déterminer $f'(1)$.

2° Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f ; donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 .

3° Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_f$.

6 ★★ 20 min (Corrigé p. 103)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+2}$.
Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1° Montrer en utilisant la définition du nombre dérivé que f est dérivable en -1, et déterminer $f'(-1)$.

2° Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ au point A d'abscisse -1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.

3° Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_f$.

7 ★★★ 10 min (Corrigé p. 104)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
On appelle P et P' les paraboles d'équations respectives :

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{3}x^2 + 1 .$$

1° Démontrer que P et P' ont exactement deux points en commun dont on déterminera les coordonnées. On appellera A celui d'abscisse négative et B celui d'abscisse positive.

2° Soient d et d' les tangentes respectives à P et P' en A .

a. Déterminer les pentes de d et d' .

b. En déduire que d et d' sont perpendiculaires.

3° Soient Δ et Δ' les tangentes respectives à P et P' en B, montrer que Δ et Δ' sont perpendiculaires.

4° Tracer P, P', d, d', Δ et Δ' sur un même graphique.

Nombre dérivé et vitesse

8 ★★ 15 min (Corrigé p. 106)

On lance une balle verticalement, vers le haut, à partir du sol, et à un instant pris comme origine. On admet que la hauteur $h(t)$ mètres de la balle, à l'instant t secondes est donnée par :

$$h(t) = -5t^2 + 60t\ .$$

1° Montrer que la hauteur maximale atteinte par la balle est 180 mètres.
À quel instant la balle est-elle au point le plus haut ?

2° Quelle est la vitesse de la balle à son point le plus haut ?

9 ★★ 15 min (Corrigé p. 107)

À l'instant $t = 0$, on abandonne sans vitesse initiale une bille à une hauteur de 122,50 mètres. La distance $x(t)$ parcourue à l'instant t, entre le lâcher et l'arrivée au sol, est $4{,}9t^2$ (unité de longueur : le mètre ; unité de temps : la seconde).

1° À quel instant la bille arrive-t-elle au sol ?

2° Avec quelle vitesse la bille arrive-t-elle au sol ?

Dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, etc.

10 ★★ 30 min (Corrigé p. 107)

Préciser le plus grand ensemble de réels sur lequel est dérivable la fonction f proposée et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.

1° $f : x \mapsto -x^3 + 5x^2 + 6x - 9$. **2°** $f : x \mapsto 0{,}7x^9 - 5x^6 + 3x^4 - \sqrt{2}x + \pi$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$.

4° $f : x \mapsto (2x+5)\left(4x-\sqrt{3}\right)$.

5° $f : x \mapsto \dfrac{7x-8}{6x+5}$.

6° $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-x+2}{x^2-1}$.

7° $f : x \mapsto (2x+3)^3$.

8° $f : x \mapsto (-6x+5)^7$.

9° $f : x \mapsto \left(\dfrac{x+7}{x-7}\right)^2$.

10° $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$.

11° $f : x \mapsto \sqrt{4x+5}$.

12° $f : x \mapsto \sqrt{5-2x}$.

11 ★★★ 10 min (Corrigé p. 111)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0.

Dérivée d'une fonction trigonométrique

12 ★★ 20 min (Corrigé p. 112)

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f proposée dans chacun des cas suivants :

1° **a.** $x \mapsto \sin\left(\dfrac{2}{3}x+5\right)$.

b. $x \mapsto \cos(7x-1{,}2)$.

c. $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

2° **a.** $x \mapsto \sin x \cos x$.

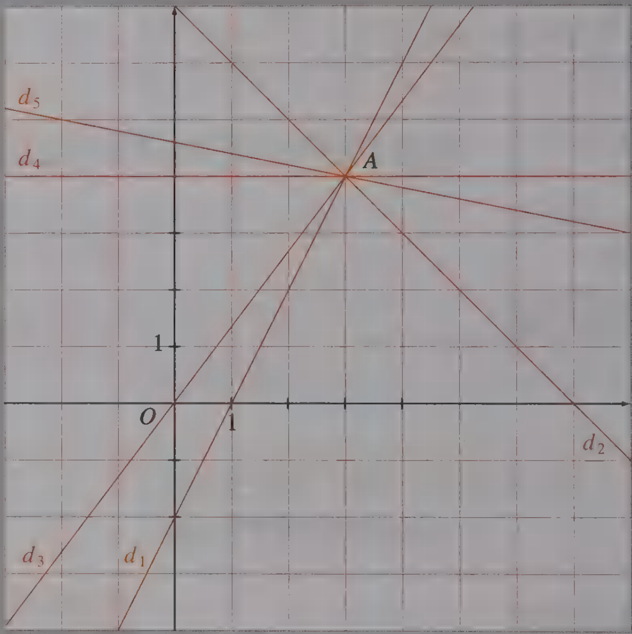
b. $x \mapsto \cos^2 x$.

c. $x \mapsto \dfrac{x^3}{1+\cos^2 x}$.

EXERCICES

CORRIGÉS des exercices

1



2 $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$.

La fonction f étant une fonction polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel h non nul, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2-3(-1+h)+5-9}{h}\\ &= \frac{1-2h+h^2+3-3h-4}{h}\\ &= \frac{h^2-5h}{h}\\ &= h-5,\end{aligned}$$

et : $\lim\limits_{h \to 0} (h-5) = -5$

donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -5$.

Cela prouve que f **est dérivable en -1 et $f'(-1) = -5$** .

On peut aussi déterminer $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$.

Pour tout réel x différent de -1 :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{x^2 - 3x + 5 - 9}{x + 1} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 4)}{x + 1} = x - 4 ,$$

donc : $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -1 - 4 = -5$, d'où : $f'(-1) = -5$.

3 $f : x \mapsto x^3 - 7x^2 + 3x - 2$.

La fonction f étant une fonction polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

1° Pour tout réel h , on a :

$$\begin{aligned} f(2 + h) - f(2) &= (2 + h)^3 - 7(2 + h)^2 + 3(2 + h) - 2 - (-16) \\ &= 8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 28 - 28h - 7h^2 + 6 + 3h + 14 \end{aligned}$$

donc : $\boldsymbol{f(2 + h) - f(2) = -13h - h^2 + h^3}$.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2° Pour tout réel h non nul, on a :

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = -13 - h + h^2 ,$$

et : $\lim\limits_{h \to 0} (-h + h^2) = 0$, donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = -13$.

Cela prouve que f **est dérivable en 2 et que $f'(2)$ est égal à -13.**

4 $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est :

$$y - f(-1) = f'(-1)\,(x - (-1)) ,$$

or :

$$f'(-1) = -5 \text{ et } f(-1) = 9 ,$$

donc **une équation de $\mathcal{T}$ est** :

$$y = -5(x + 1) + 9 ,$$

c'est-à-dire :

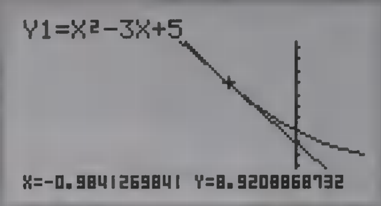
$$\boldsymbol{y = -5x + 4} .$$

On peut obtenir une équation de la tangente $\mathcal{T}$ sans utiliser la « formule ». Le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $f'(-1)$, c'est-à-dire -5, donc une équation de $\mathcal{T}$ est du type : $y = -5x + b$; de plus, le point de coordonnées $(-1 ; 9)$ appartient à $\mathcal{T}$, donc : $9 = -5 \times (-1) + b$, d'où : $b = 4$.
On en déduit qu'une équation de $\mathcal{T}$ est :
$y = -5x + 4$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :
- en entrant :

  Y1=X²–3X+5
  Y2=–5X+4
- avec le cadrage :

  $-4 \leqslant x \leqslant 1$
  $0 \leqslant y \leqslant 14.$



1 $f : x \mapsto x^2 + 4x - 7$.

1° La fonction f étant un polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel h , on a :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(-1+h)^2 + 4(1+h) - 7 - (-2)}{h}$$

$$= \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h - 5}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 6h}{h}$$

$$= h + 6 ,$$

et : $\lim\limits_{h \to 0} (h+6) = 6$

donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 6$.

Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 , c'est-à-dire $f'(1)$, est 6 .

> On peut aussi déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
> Pour tout réel x différent de 1 :
> $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2+4x-7+2}{x-1} = \frac{x^2+3x-5}{x-1}$$
> $$= \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = x+5 ,$$
> donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + 5 = 6$.

2° La pente de $\mathcal{T}$ est $f'(1)$, c'est-à-dire 6.
A est un point de $\mathcal{T}_f$; il a pour abscisse 1 et donc pour ordonnée $f(1)$, soit – 2.
Une équation de $\mathcal{T}$ est donc de la forme :

$$y = 6x + q .$$

Déterminons le réel q :

A est un point de $\mathcal{T}$,

donc : $y_A = 6x_A + q$,
soit : $-2 = 6 \times 1 + q$,
d'où : $q = -8$.

Donc une équation de $\mathcal{T}$ est :

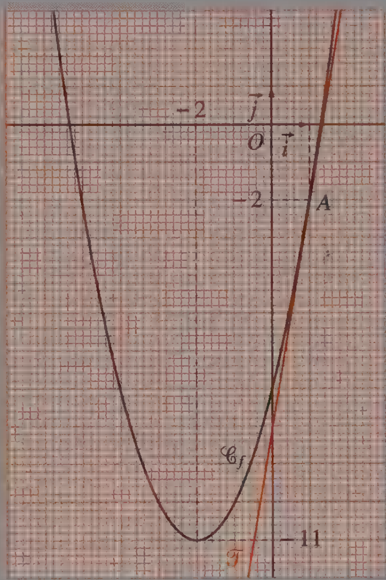
$$\mathbf{y = 6x - 8} .$$

> On peut aussi utiliser qu'une équation de $\mathcal{T}$ est :
> $$y - f(1) = f'(1)(x-1) .$$

3° Pour tout réel x,

$$f(x) = (x+2)^2 - 11 .$$

Donc $\mathscr{C}_f$ est la parabole déduite de celle d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - 11\vec{j}$.



5 $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$.

1° L'ensemble de définition de f est $[-2 \,;+\infty[$. Pour tout réel h non nul, tel que $-1+h \geqslant -2$ (c'est-à-dire $h \in [-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$), calculons le taux de variation $t(h)$ de f entre -1 et $-1+h$:

$$t(h) = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h}$$

$$t(h) = \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}$$

$$t(h) = \frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} .$$

Technique de l'expression conjuguée.

La limite de t en 0 est $\frac{1}{2}$, car $\sqrt{1+h}$ tend vers 1 quand h tend vers 0 .

La limite, quand h tend vers 0 , du taux de variation $t(h)$ de f entre -1 et $-1+h$ est $\frac{1}{2}$, ce qui signifie :

f **est dérivable en – 1** et $\boldsymbol{f'(-1) = \frac{1}{2}}$.

2° $\mathscr{T}$ est la droite :

- de coefficient directeur $f'(-1)$, soit $\frac{1}{2}$,

• qui passe par le point $A(-1\,;f(-1))$, avec $f(-1)=1$.

Une équation de $\mathcal{T}$ est donc : $\quad y-1=\dfrac{1}{2}[x-(-1)]$,

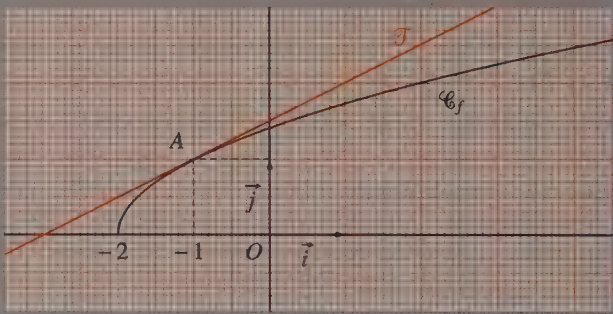
ou encore : $$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

3° $\mathcal{C}_f$ se déduit de la demi-parabole d'équation $y=\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

$\mathcal{T} : y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$;

$\mathcal{T}$ a donc pour pente $\dfrac{1}{2}$ et pour ordonnée à l'origine $\dfrac{3}{2}$.

$\mathcal{T}$ coupe la droite $(O,\vec{j})$ au point d'ordonnée $\dfrac{3}{2}$.



7 $P : y=x^2$ et $P' : y=-\dfrac{1}{3}x^2+1$.

1° Les abscisses des points d'intersection de P et P' sont les solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation :

$$x^2=-\frac{1}{3}x^2+1,$$

qui est équivalente à : $x^2=\dfrac{3}{4}$.

Donc **les points d'intersection de P et P' sont :**

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{3}{4}\right) \text{ et } B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{3}{4}\right).$$

A et B sont symétriques par rapport à la droite des ordonnées, résultat que l'on pouvait prévoir puisque chacune des courbes P et P' admet la droite des ordonnées pour axe de symétrie.

2° a. P et P' sont les courbes représentatives respectives des fonctions :

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto -\frac{1}{3}x^2+1.$$

f et g étant des polynômes, elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Leurs fonctions dérivées respectives sont :

$$f' : x \mapsto 2x \quad \text{et} \quad g' : x \mapsto -\frac{2}{3}x .$$

La pente de la tangente à P en A est $f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, soit $-\sqrt{3}$;

celle de la tangente à P' en A est $g'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

soit $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Finalement, d et d' ont respectivement pour pente $-\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

b. $-\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -1$; le produit des pentes de d et d' est égal à -1, ce qui prouve que d et d' sont perpendiculaires.

$\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$ et $\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de d et d' ; leur produit scalaire est :

$$1 \times 1 - \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}},$$

c'est-à-dire 0.

3° De la même façon, on démontre :

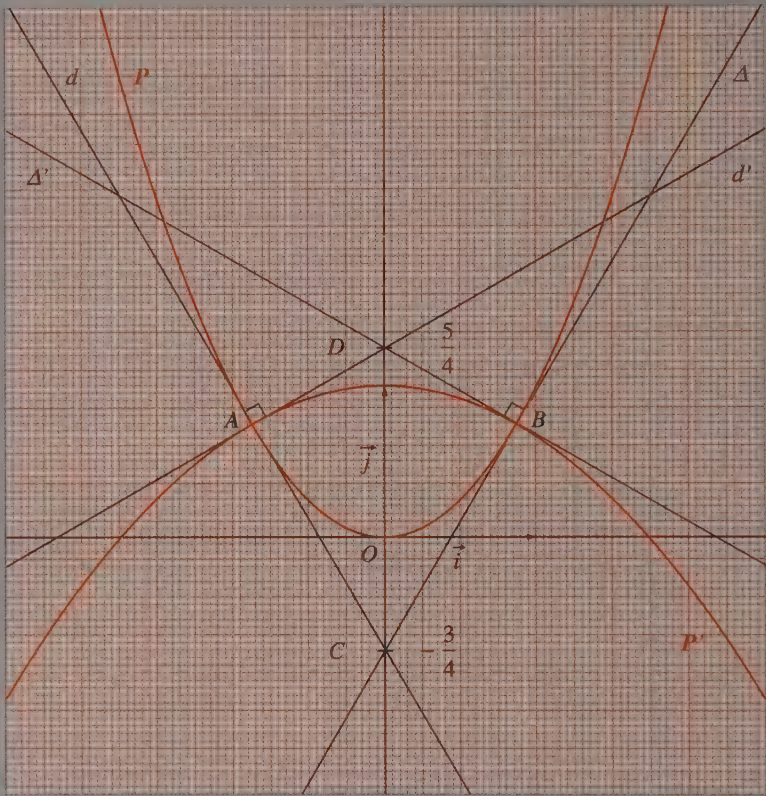
$$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1,$$

donc **Δ et Δ' sont perpendiculaires**.

Δ et Δ' sont les images respectives de d et d' par la symétrie orthogonale d'axe la droite des ordonnées ; or toute symétrie orthogonale conserve l'orthogonalité ; on retrouve ainsi géométriquement que Δ et Δ' sont perpendiculaires.

Pour tracer d, il est bon de noter qu'une équation de d est $y - \frac{3}{4} = -\sqrt{3}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ou encore $y = -\sqrt{3}x - \frac{3}{4}$.
d est donc la droite (AC), où C est le point de coordonnées $\left(0 ; -\frac{3}{4}\right)$. De la même façon, on obtient que d' est la droite (AD), où D est point de coordonnées $\left(0 ; \frac{5}{4}\right)$.
On a alors également : $\Delta = (BC)$ et $\Delta' = (BD)$.

CORRIGÉS



8 1° On a :

$$\begin{aligned} x(t) &= -5t^2 + 60t \\ &= -5(t^2 - 12t) \\ &= -5[(t-6)^2 - 36] \\ &= -5(t-6)^2 + 180\,, \end{aligned}$$

or : $-5(t-6)^2 \leqslant 0$,

donc : $x(t) \leqslant 180$.

De plus :

$$\begin{aligned} x(t) = 180 &\Leftrightarrow -5(t-6)^2 + 180 = 180 \\ &\Leftrightarrow -5(t-6)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-6)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 6\,. \end{aligned}$$

On peut aussi résoudre l'inéquation : $-5t^2 + 60t \leqslant 180$.

On peut alors affirmer que :
la hauteur maximale atteinte par la balle est 180 mètres et que **la balle est au point le plus haut au bout de 6 secondes.**

2° On a : $\dfrac{x(6+h)-x(6)}{h} = \dfrac{-5(6+h-6)^2+180-180}{h} = \dfrac{-5h^2}{h} = -5h$,

de plus : $\lim\limits_{h \to 0} (-5h) = 0$,

par conséquent : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(6+h)-x(6)}{h} = 0$.

Finalement, **la vitesse de la balle à son point le plus haut est nulle.**

9 1° La bille sera au sol quand elle aura parcouru une distance de 122,5 mètres.

L'équation $122{,}5 = 4{,}9t^2$ a une seule solution positive qui est 5.

Donc la bille arrive au sol au bout de 5 secondes.

$122{,}5 = 4{,}9t^2 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{122{,}5}{4{,}9}$

$\Leftrightarrow t^2 = 25$

2° Pour tout réel h non nul tel que $5+h \in [0\,;5]$, c'est-à-dire pour tout réel h de $[-5\,;0[$:

$$\frac{x(5+h)-x(5)}{h} = \frac{4{,}9\times(5+h)^2-122{,}5}{h} = \frac{4{,}9\times(25+10h+h^2)-122{,}5}{h}$$

donc : $$\frac{x(5+h)-x(5)}{h} = \frac{49h+4{,}9h^2}{h} = 49+4{,}9\,h ,$$

de plus : $\lim\limits_{h \to 0} (49+4{,}9h) = 49$,

par conséquent : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(5+h)-x(5)}{h} = 49$.

On a prouvé que la fonction x est dérivable en 5 et que l'on a : $x'(5) = 49$.

Finalement, **la bille arrive au sol avec une vitesse de 49 m/s, c'est-à-dire de 176,4 km/h.**

Bien se rappeler :
1 km/h = 3,6 m/s
car 1 km = 1 000 m
et 1 h = 3 600 s .

10 1° $f : x \mapsto -x^3+5x^2+6x-9$.

La fonction f étant un polynôme, elle est (définie et) dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2+10x+6} .$$

2° $f : x \mapsto 0{,}7x^9-5x^6+3x^4-\sqrt{2}x+\pi$.

La fonction f étant un polynôme, elle est (définie et) dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = 6{,}3x^8-30x^5+12x^3-\sqrt{2}} .$$

3° $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition, qui est $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $\quad f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

4° $f : x \mapsto (2x+5)(4x-\sqrt{3})$.
f étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = 2 \times (4x-\sqrt{3}) + (2x+5) \times 4,$$
$$f'(x) = 8x - 2\sqrt{3} + 8x + 20.$$

Finalement, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = 16x - 2\sqrt{3} + 20}.$$

On aurait pu aussi développer $f(x)$ avant de dériver.

5° $f : x \mapsto \dfrac{7x-8}{6x+5}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{5}{6}\right\}$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $\left]-\infty ; -\dfrac{5}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{5}{6} ; +\infty\right[$.

Pour tout réel x différent de $-\dfrac{5}{6}$:

$$f'(x) = \frac{7(6x+5) - 6(7x-8)}{(6x+5)^2}, \quad f'(x) = \frac{42x + 35 - 42x + 48}{(6x+5)^2}.$$

Finalement, pour tout x de $\left]-\infty ; -\dfrac{5}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{5}{6} ; +\infty\right[$: $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{83}{(6x+5)^2}}$.

6° $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-x+2}{x^2-1}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$.
f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
Pour tout réel x différent de -1 et de 1 :

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(x^2-1) - (3x^2-x+2) \times 2x}{(x^2-1)^2},$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - x^2 - 6x + 1 - 6x^3 + 2x^2 - 4x}{(x^2-1)^2}.$$

Finalement, pour tout x de $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x^2 - 10x + 1}{(x^2-1)^2}}\,.$$

7° $f : x \mapsto (2x+3)^3$.
f étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction $x \mapsto x^3$, dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $g' : x \mapsto 3x^2$.
Pour tout réel x :

$$f(x) = g(2x+3)\,,$$

donc :

$$f'(x) = 2g'(2x+3) = 2 \times 3(2x+3)^2\,.$$

Finalement, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = 6(2x+3)^2}\,.$$

8° $f : x \mapsto (-6x+5)^7$.
f étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction $x \mapsto x^7$, dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $g' : x \mapsto 7x^6$.
Pour tout réel x :

$$f(x) = g(-6x+5)\,,$$

donc :

$$f'(x) = -6g'(-6x+5) = -6 \times 7(-6x+5)^6\,.$$

Finalement, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = -42(-6x+5)^6}\,.$$

9° $f : x \mapsto \left(\dfrac{x+7}{x-7}\right)^2$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{7\}$.
f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;7[\,\cup\,]7\,;+\infty[$.
Pour tout réel x différent de 7 :

$$f(x) = \frac{x^2+14x+49}{x^2-14x+49}\,,$$

donc : $$f'(x) = \frac{(2x+14)(x^2-14x+49) - (x^2+14x+49)(2x-14)}{(x-7)^4}\,.$$

$$f'(x) = \frac{-28x^2 + 1\,372}{(x-7)^4}$$

$$= \frac{-28(x^2-49)}{(x-7)^4}\,.$$

Finalement, pour tout x de $[-\infty\,;7[\,\cup\,]7\,;+\infty[$:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-28(x+7)}{(x-7)^3}}\,.$$

CORRIGÉS

Autres façons :

• Pour tout réel x différent de 7 :

$$f(x) = \left(1 + \frac{14}{x-7}\right)^2 = \left(1 + \frac{14}{x-7}\right) \times \left(1 + \frac{14}{x-7}\right),$$

donc $$f'(x) = 2 \times \frac{-14}{(x-7)^2} \times \frac{x+7}{x-7} = \frac{-28(x+7)}{(x-7)^3}.$$

• En remarquant que les fonctions dérivées de $x \mapsto (x+7)^2$ et $x \mapsto (x-7)^2$ sont respectivement $x \mapsto 2(x+7)$ et $x \mapsto 2(x-7)$, on obtient : pour tout réel x différent de 7 :

$$f'(x) = \frac{(x+7)^2}{(x-7)^2},$$

d'où $$f'(x) = \frac{2(x+7)(x-7)^2 - (x+7)^2 \times 2(x-7)}{(x-7)^4}.$$

soit $$f'(x) = \frac{2(x+7)(x-7-x-7)}{(x-7)^3}, \text{ donc } f'(x) = \frac{-28(x+7)}{(x-7)^3}.$$

10° $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$.

f est la composée de la fonction affine $x \mapsto x - 1$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, donc :

• l'ensemble de définition de f est $[1 ; +\infty[$ (ensemble des réels x tels que $x - 1 \geqslant 0$),

• f est dérivable seulement sur $]1 ; +\infty[$ (ensemble des réels x tels que $x - 1 > 0$),

et, pour tout x de $]1 ; +\infty[$:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}.$$

11° $f : x \mapsto \sqrt{4x+5}$.

f est la composée de la fonction affine $x \mapsto 4x + 5$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, donc :

• l'ensemble de définition de f est $\left[-\frac{5}{4} ; +\infty\right[$

(ensemble des réels x tels que $4x + 5 \geqslant 0$),

• f est dérivable seulement sur $\left]-\frac{5}{4} ; +\infty\right[$

(ensemble des réels x tels que $4x+5>0$),

et, pour tout réel x de $\left]-\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$: $f'(x)=4\times\frac{1}{2\sqrt{4x+5}}=\frac{2}{\sqrt{4x+5}}$.

12° $f: x\mapsto\sqrt{5-2x}$.
f est la composée de la fonction affine $x\mapsto 5-2x$ par la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$, donc :

- l'ensemble de définition de f est $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]$

(ensemble des réels x tels que $5-2x\geqslant 0$),

- l'ensemble de dérivabilité de f est $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$

(ensemble des réels x tels que $5-2x>0$),

et, pour tout réel x de $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$: $f'(x)=-2\times\frac{1}{2\sqrt{5x-2x}}$,

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{5-2x}}}.$$

11 $f: x\mapsto x\sqrt{x}$.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.
f est le produit de la fonction $x\mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$, dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$; donc f est au moins dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction racine carrée n'étant pas dérivable en 0, il n'est pas possible d'appliquer le théorème du cours sur le produit de fonctions dérivables.

Déterminons donc, pour tout réel h strictement positif, le taux de variation $t(h)$ de f entre 0 et h.

Pour tout h de $\mathbb{R}_+^*$:

$$t(h)=\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\frac{h\sqrt{h}-0}{h}=\sqrt{h}.$$

La limite de t en 0 est 0, donc f **est dérivable en 0** et $f'(0)=0$.

f est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+$.

Pour que le produit de deux fonctions soit dérivable en un réel a, il n'est pas nécessaire que les deux fonctions soient dérivables en a, comme le prouve cet exercice.
On notera aussi que les théorèmes du cours de la classe de 1re ne nous permettent pas de conclure à la dérivabilité de certaines fonctions, même « simples » comme : $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$, ou $x\mapsto\sqrt{\sqrt{x}}$.

CHAPITRE 4

12 1° D'après le cours, chacune des fonctions proposées est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée d'une fonction affine par les fonctions sin ou cos).

a. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{2}{3}x+5\right)$. $\quad$ $\boldsymbol{f' : x \mapsto \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2}{3}x+5\right)}$.

b. $f : x \mapsto \cos(7x-1{,}2)$. $\quad$ $\boldsymbol{f' : x \mapsto -7\sin(7x-1{,}2)}$.

c. $f : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Pour tout réel x : $\quad f'(x) = -\left[-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$,

donc $\quad \boldsymbol{f' : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

2° a. $f : x \mapsto \sin x \cos x$.
f est le produit des fonctions sin et cos, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

donc $\boldsymbol{f' : x \mapsto \cos^2 x - \sin^2 x}$

b. $f : x \mapsto \cos^2 x$.
f est le produit de la fonction cos par elle-même, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = -\sin x \cos x + \cos x(-\sin x) = -2\sin x \cos x$$

Finalement $\boldsymbol{f' : x \mapsto -2\sin x \cos x}$

On dispose des formules de trigonométrie :
$2\sin x \cos x = \sin 2x$
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.
Donc f est la fonction :
$x \mapsto \frac{1}{2}\sin 2x$,
d'où, pour tout réel x :
$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos 2x$
$= 2\cos 2x$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$.

c. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+\cos^2 x}$.

f est le quotient de la fonction $x \mapsto x^3$, dérivable sur $\mathbb{R}$, par la fonction $x \mapsto 1+\cos^2 x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après **2° b.** ; de plus $x \mapsto 1+\cos^2 x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $\quad f'(x) = \dfrac{3x^2(1+\cos^2 x) - x^3(-2\sin x \cos x)}{(1+\cos^2 x)^2}$.

Finalement, $\quad \boldsymbol{f' : x \mapsto \dfrac{x^2(3+3\cos^2 x + 2x\sin x \cos x)}{(1+\cos^2 x)^2}}$.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

Rappels de cours

Les théorèmes suivants précisent le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction sur un intervalle.

Théorèmes de monotonie

f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si f' est positive sur I, c'est-à-dire si : pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.

• Si f' est négative sur I, c'est-à-dire si : pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

• Si f' est nulle sur I, c'est-à-dire si : pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Théorèmes de stricte monotonie

f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si, pour tout x de I : $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

• Si, pour tout x de I : $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Plus généralement :

• Si f' est positive sur I et si f' ne s'annule éventuellement qu'en un nombre fini de réels de I, alors f est strictement croissante sur I.

• Si f' est négative sur I et si f' ne s'annule éventuellement qu'en un nombre fini de réels de I, alors f est strictement décroissante sur I.

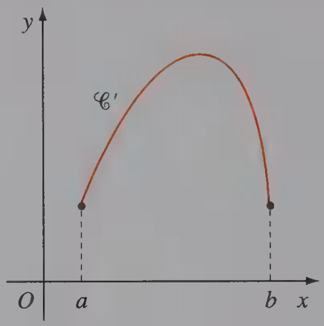
EXERCICES de contrôle des connaissances

1

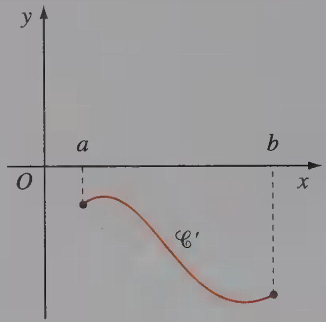
(Corrigé p. 119)

Dans chacun des deux cas suivants, comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sachant que $\mathscr{C}'$ est la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f, dérivable sur le segment $[a\,;b]$.

1°



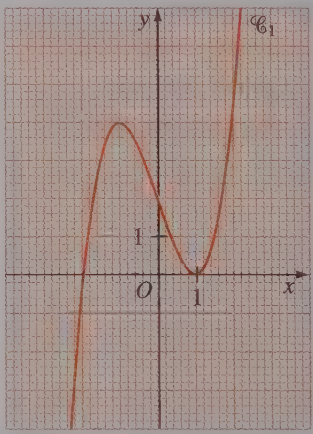
2°

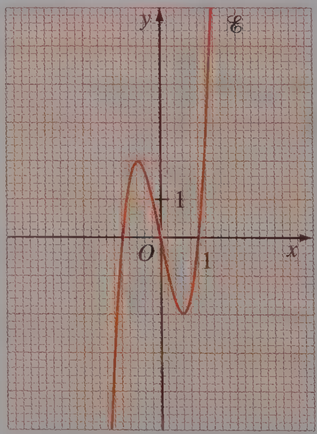


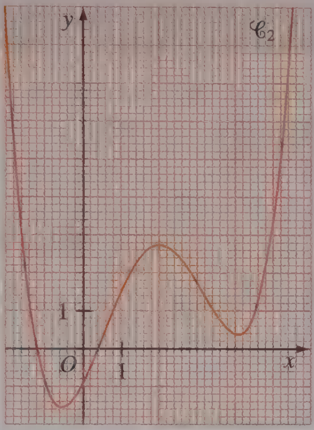
2

(Corrigé p. 119)

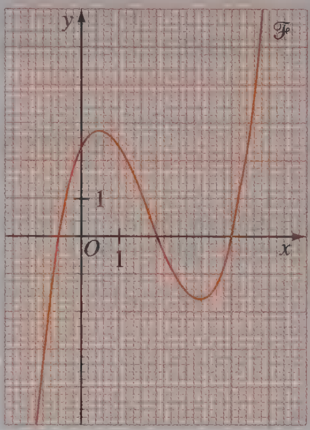
Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ (première colonne) sont les courbes représentatives respectives de trois fonctions f_1, f_2, f_3 ; pour chacune de ces fonctions, déterminer la courbe représentative de sa fonction dérivée, à choisir parmi les courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ de la deuxième colonne.



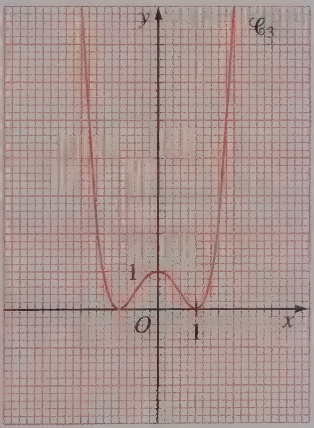




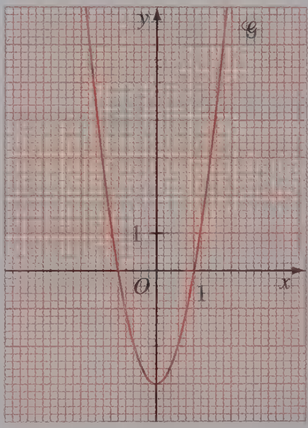
y
$\mathscr{C}_2$
1
O
1
x



y
$\mathscr{F}$
1
O
1
x



y
$\mathscr{C}_3$
1
O
1
x



y
$\mathscr{G}$
1
O
1
x

EXERCICES d'entraînement

Sens de variation

3 ★ 30 min (Corrigé p. 119)

Déterminer la dérivée de la fonction f proposée, puis étudier le sens de variation de f.

1° Fonction polynôme.

a. $x \mapsto -3x^2 + 4x + 5$.

b. $x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + x - 1$.

c. $x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x - 20$.

2° Fonction rationnelle.

a. $x \mapsto 5 - \dfrac{3}{2x-1}$.

b. $x \mapsto \dfrac{2x + 0{,}7}{3x+1}$.

3° Fonction irrationnelle.

a. $x \mapsto \sqrt{4-5x}$.

b. $x \mapsto \dfrac{4}{x} + \sqrt{x}$.

4 ★ 10 min (Corrigé p. 123)

Étudier le sens de variation de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-4x+3}.$$

5 ★★ 15 min (Corrigé p. 125)

Comparer les réels A et B définis par :

$$A = \frac{(5{,}012013014015016)^2 + 3}{3{,}012013014015016},$$

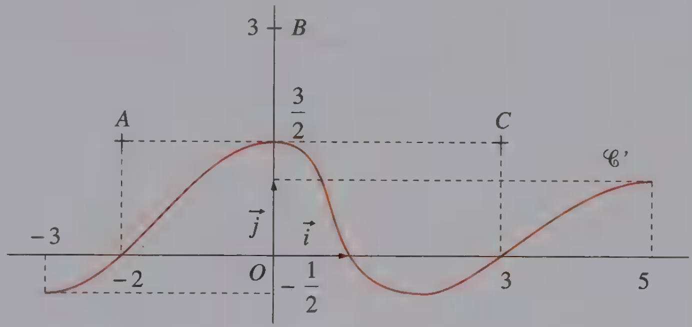
$$B = \frac{(5{,}012013014015017)^2 + 3}{3{,}012013014015017}.$$

6 ★★ 20 min (Corrigé p. 126)

f est une fonction dérivable sur $[-3\,;5]$.
$\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.

1° Étudier le sens de variation de f.

2° Déterminer l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sachant qu'elle passe par les points A, B, C.



Minimum, maximum, extremum

7 ★ 10 min (Corrigé p. 127)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^4 - 4x + 2$.
Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$; préciser la valeur de ce minimum.

8 ★ 15 min (Corrigé p. 128)

Déterminer le minimum sur l'intervalle $[-1\,;1]$ de la fonction f :

$$x \mapsto 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\,.$$

9 ★★ 20 min (Corrigé p. 129)

Un livre doit contenir, par page, 500 cm² de texte imprimé. Chaque page est rectangulaire et possède des marges gauche et droite de 4 cm, des marges inférieure et supérieure de 5 cm.

Quelles sont les dimensions d'une page du livre si l'on veut que la consommation de papier soit minimale ?

10 ★★ 20 min (Corrigé p. 130)

En économie, on constate souvent que le nombre n d'objets vendus diminue quand le prix de vente p de cet objet augmente. Une des lois formulées est : $n = a - ep$, où a et e sont des constantes réelles $(e > 0)$.
Un magasin met en vente des bouteilles de champagne au prix de 18 € l'unité, achetée 12 € au grossiste ; au bout d'une semaine, 200 bouteilles sont vendues. Le directeur décide alors de baisser le prix de la bouteille de 0,5 € ; il constate qu'à la fin de la deuxième semaine, la vente hebdomadaire a augmenté de 50 bouteilles.

1° En supposant que la loi $n = a - ep$ s'applique dans cet exemple, quelles sont les valeurs des coefficients a et e (les prix étant exprimés en euros) ?

2° Exprimer alors le bénéfice b en fonction de p, puis calculer le prix de vente d'une bouteille de champagne assurant un bénéfice maximal (on néglige les frais de tous ordres).

Obtention d'inégalités

11 ★★ 20 min (Corrigé p. 130)

1° Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x - \sin x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
En déduire :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-\infty\,;0],\ \sin x \geqslant x,$$
$$\text{pour tout } x \text{ de } [0\,;+\infty[,\ \sin x \leqslant x.$$

2° Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus en son point d'abscisse 0.
Interpréter alors les résultats de la question **1°**.

CORRIGÉS des exercices

1 1° La fonction dérivée f' de f est strictement positive sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
Comme de plus : $a < b$, il vient : $\boldsymbol{f(a) < f(b)}$.

2° La fonction f' étant strictement négative sur $[a\,;\,b]$, la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Comme de plus : $a < b$, on peut conclure : $\boldsymbol{f(a) > f(b)}$.

2 • Fonction f_1
f_1 est décroissante sur $[-1\,;\,1]$, sa dérivée est donc négative sur $[-1\,;\,1]$.
La seule courbe qui puisse être celle de la dérivée de f_1 est $\mathscr{G}$.

• Fonction f_2
f_2 n'est pas monotone sur l'intervalle $[1\,;\,5]$, donc sa dérivée n'est pas de signe constant sur cet intervalle. Or, seule $\mathscr{F}$ possède des points dont l'abscisse est comprise entre 1 et 5 et dont l'ordonnée n'est pas de signe constant.
On en déduit que la courbe de la dérivée de f_1 est $\mathscr{F}$.

• Fonction f_3
D'après ce qui précède, **la courbe de la dérivée de f_3 ne peut être que** $\mathscr{E}$, ce qui est confirmé par la cohérence du tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

3 **1° a.** $f : x \mapsto -3x^2 + 4x + 5$.
La fonction f étant un polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = -6x + 4 = 2(-3x + 2)\,;$$

donc : • $f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$,

• si $x < \dfrac{2}{3}$, alors $f'(x) > 0$,

• si $x > \dfrac{2}{3}$, alors $f'(x) < 0$.

On en déduit que f **est strictement croissante sur** $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$ **et strictement décroissante sur** $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

On retrouve le sens de variation de f en écrivant que, pour tout réel x :
$f(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{3}$.

b. $x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + x - 1$.

La fonction f est un polynôme ; elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{4}(x+4),$$

donc : • $f'(-4) = 0$,
• si $x < -4$, alors $f'(x) < 0$,
• si $x > -4$, alors $f'(x) > 0$.

On retrouve le sens de variation de f en écrivant que, pour tout réel x :
$f(x) = \frac{1}{8}(x+4)^2 - 3$.

On en déduit que f **est strictement décroissante sur** $]-\infty\,;-4]$ **et strictement croissante sur** $[-4\,;+\infty[$.

c. $f : x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x - 20$.

La fonction f est un polynôme ; elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

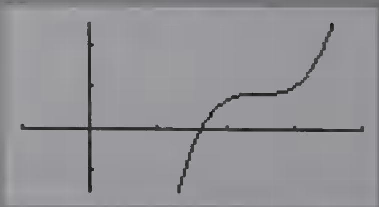
$$f'(x) = 4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2,$$

donc : • $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$,

• si $x \neq \frac{5}{2}$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :
- en entrant :
  Y1 = 4X^3÷3−10X²+25X−20
- avec le cadrage :
  $-1 \leqslant x \leqslant 4$,
  $-1{,}5 \leqslant y \leqslant 2{,}5$
- et l'échelle :
  2 sur l'axe des abscisses,
  1 sur l'axe des ordonnées.



2° a. $f : x \mapsto 5 - \dfrac{3}{2x-1}$.

La fonction f a pour ensemble de définition $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout réel x différent de $\dfrac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{6}{(2x-1)^2},$$

donc : $\qquad f'(x) > 0$.

Il en résulte que f **est strictement croissante sur chacun des intervalles** $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$ **et** $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Attention !
f n'est pas croissante sur la réunion de ces deux intervalles ; considérer par exemple :
$f(-1) = 6$, $f(1) = 2$.

b. $f : x \mapsto \dfrac{2x+0{,}7}{3x+1}$.

f est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$,

donc f est dérivable sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Pour tout réel x différent de $-\dfrac{1}{3}$:

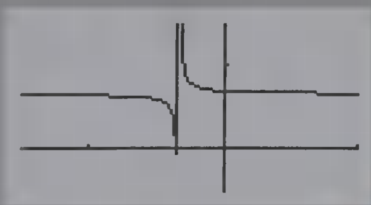
$$f'(x) = \frac{2(3x+1) - 3(2x+0{,}7)}{(3x+1)^2} = \frac{-0{,}1}{(3x+1)^2},$$

donc : $\qquad f'(x) < 0$.

Il en résulte que f **est strictement décroissante sur chacun des intervalles** $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right[$ **et** $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

- en entrant :
  Y1 = (2X+.7)÷(3X+1)
- avec le cadrage :
  $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 1$,
  $-0{,}5 \leqslant y \leqslant 1{,}5$.



CORRIGÉS

Le graphique fait apparaître un trait vertical ; c'est en fait un segment qui joint deux points dont les abscisses sont proches de – 1/3, l'une étant strictement inférieure à – 1/3 et l'autre strictement supérieure à – 1/3. C'est le mode de tracé en points connectés qui donne ce résultat (en mode « points séparés », le trait vertical disparaît). Noter que ce trait vertical matérialise une asymptote à la courbe représentative de la fonction f (la droite d'équation $x = -1/3$) ; en effet, on pourrait démontrer que :

- $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-1/3$ par valeurs inférieures,
- $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-1/3$ par valeurs supérieures.

3° a. $f : x \mapsto \sqrt{4-5x}$.

f est la composée de la fonction affine $x \mapsto 4-5x$ par la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$, donc :

- l'ensemble de définition de f est $\left]-\infty\,;\frac{4}{5}\right]$

(ensemble des réels x tels que $4-5x \geqslant 0$),

- f est dérivable sur $\left]-\infty\,;\frac{4}{5}\right[$

(ensemble des réels x tels que $4-5x > 0$).

Pour tout réel x tel que $x < \frac{4}{5}$:

$$f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{4-5x}},$$

d'où : $f'(x) < 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{4}{5}\right[$; plus précisément, **f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{4}{5}\right]$**, car le minimum de f sur cet intervalle est $f\left(\frac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire 0.

b. $f : x \mapsto \frac{4}{x} + \sqrt{x}$.

Un réel x appartient à l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f si, et seulement si :

$$x \neq 0 \text{ et } x \geqslant 0,$$

donc : $\mathscr{D}_f =]0\,;+\infty[$.

f est la somme des fonctions $x \mapsto \frac{4}{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-8\sqrt{x} + x^2}{2x^2\sqrt{x}},$$

et, en utilisant : $x^2 = x \times x = x\sqrt{x} \times \sqrt{x}$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{\left(-8 + x\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{-8 + x\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{x\sqrt{x} - 8}{2x^2},$$

ce qui met en évidence que le signe de $f'(x)$ est celui de $x\sqrt{x} - 8$.

Il vient, pour tout x de $]0 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 8 > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^3 > 2^3, \end{aligned}$$

donc, la fonction cube $x \mapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2,$$

c'est-à-dire, des réels positifs étant rangés comme leurs carrés :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4;$$

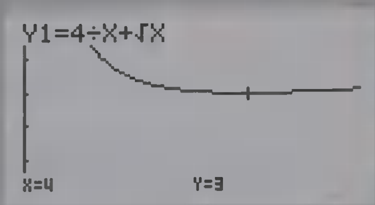
on obtient de manière analogue :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Finalement :
$$\begin{cases} f'(4) = 0, \\ f'(x) < 0 \text{ si } 0 < x < 4, \\ f'(x) > 0 \text{ si } x > 4, \end{cases}$$

ce qui prouve que f **est strictement décroissante sur $]0 ; 4]$ et strictement croissante sur $[4 ; +\infty[$.**

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



- en entrant :
  Y1=4÷X+√X
- avec le cadrage :
  $0 \leqslant x \leqslant 6$,
  $0 \leqslant y \leqslant 5$.

4 $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$.

- L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que :

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0.$$

1 étant une solution de l'équation du second degré : $x^2 - 4x + 3 = 0$, son autre solution, notée α, vérifie : $\alpha \times 1 = \dfrac{3}{1}$, donc $\alpha = 3$.

On en déduit que la fonction f a pour ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{1 ; 3\}$, c'est-à-dire $]-\infty ; 1[\cup]1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

• f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout réel x différent de 1 et de 3 :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4x+3)-(x^2+1)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^3-8x^2+6x-2x^3-2x+4x^2+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{4(-x^2+x+1)}{(x^2-4x+3)^2},$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2+x+1$.

Résolvons l'équation (E) du second degré :

$$-x^2+x+1=0.$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = 1^2-4\times(-1)\times 1 = 5;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$,

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$.

Après avoir remarqué : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 3$,

dressons le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

On en déduit que f **est strictement décroissante sur chacun des intervalles** $\left]-\infty\,;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$, $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;3\right[$ **et** $]3\,;+\infty[$**, et strictement croissante sur chacun des intervalles** $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;1\right[$ **et** $\left]1\,;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

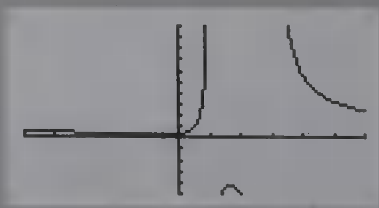
• en entrant :

Y1=(X²+1)÷(X²−4X+3)

• avec le cadrage :

$-5 \leqslant x \leqslant 6,$

$-5 \leqslant y \leqslant 10.$



5 $A = \dfrac{(5{,}012013014015016)^2 + 3}{3{,}012013014015016}$, $B = \dfrac{(5{,}012013014015017)^2 + 3}{3{,}012013014015017}$.

La plupart des calculatrices utilisées dans une classe de 1re n'ont pas une précision suffisante pour comparer A et B.

Posons : $a = 5{,}012013014015016$ et $b = 5{,}012013014015017$;
alors A et B sont les images respectives de a et b par la fonction f :

$$x \mapsto \frac{x^2+3}{x-2}.$$

Étudions le sens de variation de la fonction f.
f est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ et, pour tout réel x différent de 2 :

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+3)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2-3}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2},$$

donc $f'(x)$ est du signe de x^2-4x-3.

Résolvons l'équation (E) du second degré : $x^2-4x-3=0$.
Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(-3) = 28\,;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{28}}{2\times 1} = \frac{4-2\sqrt{7}}{2} = 2-\sqrt{7},$$

$$x_2 = \frac{4+\sqrt{28}}{2\times 1} = \frac{4+2\sqrt{7}}{2} = 2+\sqrt{7}.$$

$2-\sqrt{7} \approx -0{,}65$,
$2+\sqrt{7} \approx 4{,}65$.

Dressons le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

Les réels a et b appartiennent tous les deux à l'intervalle $[2+\sqrt{7}\,;+\infty[$ sur lequel f est strictement croissante, d'après le tableau précédent.

Comme, de plus : $a < b$, on peut affirmer :

$$f(a) < f(b),$$

c'est-à-dire : $\boldsymbol{A < B}$.

On a pu comparer $f(a)$ et $f(b)$ par cette méthode, car a et b appartiennent à un même intervalle de stricte monotonie de f.

CORRIGÉS

1° Nous constatons sur le graphique que :

- $f'(-2) = f'(1) = f'(3) = 0$;
- pour tout x de $[-3\,;5]$:

si $x < -2$, alors $f'(x) < 0$,
si $-2 < x < 1$, alors $f'(x) > 0$,
si $1 < x < 3$, alors $f'(x) < 0$,
si $x > 3$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit :

- **f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[-3\,;-2]$ et $[1\,;3]$,**
- **f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[-2\,;1]$ et $[3\,;5]$.**

2° f est dérivable sur $[-3\,;5]$, donc $\mathscr{C}$ est « bien régulière », c'est-à-dire qu'elle admet une tangente en chacun de ses points ; pour tout x de $[-3\,;5]$, $f'(x)$ est la pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x.

En particulier :

- $f'(-2) = f'(1) = f'(3) = 0$, donc $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en A, C et au point d'abscisse 1.
- $f'(0) = \dfrac{3}{2}$, donc la pente de la tangente en B est $\dfrac{3}{2}$.
- $f'(-3) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(5) = 1$, donc les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses -3 et 5 ont respectivement pour pente $-\dfrac{1}{2}$ et 1.

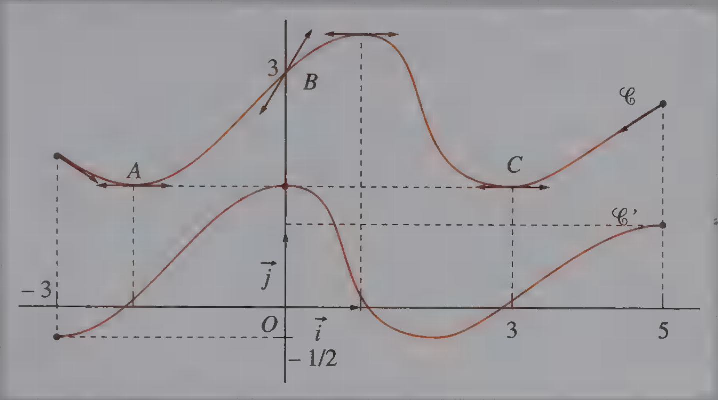
Résumons tous ces renseignements dans un tableau :

x	-3		-2		0		1		3		5
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	0	$+$	1
f		$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

On constate que le minimum de f sur $[-3\,;5]$ est $\dfrac{3}{2}$,

il est atteint en -2 et 3 : $f(-2) = f(3) = \dfrac{3}{2}$.

Utilisons tous les résultats obtenus pour tracer l'allure de $\mathscr{C}$:



7 $f : x \mapsto x^4 - 4x + 2$.

f est une fonction polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)\,,$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^3 - 1$;
or la fonction $x \mapsto x^3 - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1 ,
donc $x^3 - 1$ et $x - 1$ ont le même signe ;
on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$, ce qui implique que f admet $f(1)$ pour minimum sur $\mathbb{R}$ (et que 1 est le seul réel en lequel f atteint ce minimum).

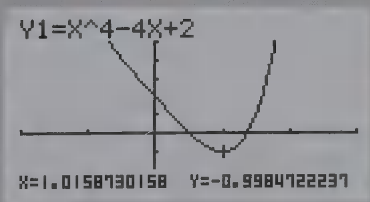
$f(1) = -1$, donc, finalement :

f admet -1 pour minimum sur $\mathbb{R}$.

-1 est le minimum (absolu) de f sur $\mathbb{R}$; on peut remarquer que -1 est également le seul minimum relatif de f sur $\mathbb{R}$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

- en entrant :
  Y1=X^4–4X+2
- avec cadrage :
  $-2 \leqslant x \leqslant 3$,
  $-3 \leqslant y \leqslant 6$.



CORRIGÉS

8 $f : x \mapsto 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

En tant que polynôme, la fonction f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $\quad f'(x) = 6x^2 - x - 2$.

Soit Δ le discriminant du polynôme du second degré f' :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 \text{ ;}$$

$\Delta > 0$, donc f' admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1-7}{2 \times 6} = -\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1+7}{2 \times 6} = \frac{2}{3}.$$

Pour tout réel x :
$f'(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

Nous sommes en mesure de dresser le tableau de variation de f sur $[-1\ ;\ 1]$ (en n'y consignant que les renseignements utiles pour répondre à la question posée) :

Penser à vérifier :
$-1 < -\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$.

x	-1		$-1/2$		$2/3$		1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

On en déduit que le maximum de f sur $[-1\ ;\ 1]$ est le plus grand des deux nombres $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$, or :

• $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 2 = \frac{13}{8}$,

• $f(1) = 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2}$,

• $\frac{13}{8} > \frac{1}{2}$,

donc le maximum de f sur $[-1\ ;\ 1]$ est $\frac{13}{8}$.

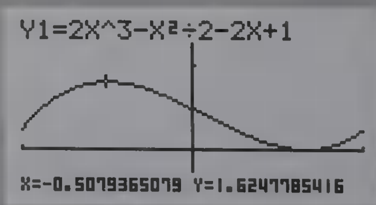
Copie d'écran de calculatrice obtenue :

• en entrant :

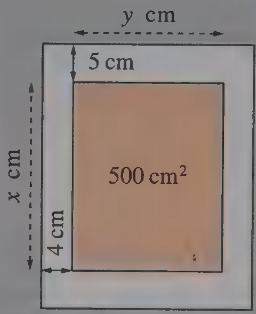
Y1=2X^3–X²÷2–2X+1

• avec le cadrage :

$-1 \leqslant x \leqslant 1$,
$-1 \leqslant y \leqslant 3$.



8 Soit y la dimension, en cm, des bords inférieur et supérieur de la partie imprimée d'une page ; soit x celle, en cm, des bords gauche et droit.



L'aire, en cm², de cette partie de page vaut 500, d'où :

$$xy = 500\,, \quad \text{soit} \quad y = \frac{500}{x}\,,$$

Les dimensions de la page entière, en cm, sont alors :

$$x + (2 \times 5) \text{ et } y + (2 \times 4)\,, \text{ soit } x + 10 \text{ et } \frac{500}{x} + 8\,.$$

Appelons f la fonction (définie seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) qui, au réel x, associe l'aire, en cm², de la page entière ; alors :

$$f(x) = (x + 10)\left(\frac{500}{x} + 8\right) = 500 + \frac{5\,000}{x} + 8x + 80\,,$$

$$f(x) = 8x + \frac{5\,000}{x} + 580\,.$$

Étudions les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 8 - \frac{5\,000}{x^2} = \frac{8(x^2 - 625)}{x^2}$$

$$= \frac{8(x + 25)(x - 25)}{x^2}\,.$$

Si $x > 0$, alors : $x + 25 > 0$ et $x^2 > 0$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - 25$.
Le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est donné par le tableau suivant :

x	0		25		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	980	$\nearrow$	

Le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est atteint en 25 ;
les dimensions recherchées sont obtenues pour $x = 25$; on a alors :

$$x + 10 = 35\,,$$

$$y + 8 = \frac{500}{25} + 8 = 20 + 8 = 28\,.$$

On en déduit que **les bords inférieur et supérieur d'une page du livre doivent mesurer 28 cm et les bords gauche et droit, 35 cm.**

CORRIGÉS

10 1° Le nombre n de bouteilles vendues en une semaine et le prix à l'unité de ces bouteilles sont supposés liés par la loi : $n = a - ep$.
La première semaine, 200 bouteilles sont vendues au prix de 18 € l'unité, donc : $200 = a - 18e$.
La deuxième semaine, 250 bouteilles sont vendues au prix de 17,5 € l'unité, donc : $250 = a - 17{,}5e$.

Les constantes a et e satisfont donc au système : $\begin{cases} a - 18e = 200 \\ a - 17{,}5e = 250. \end{cases}$

En soustrayant membre à membre la première égalité à la deuxième, on obtient : $0{,}5e = 50$, d'où : $\boldsymbol{e = 100}$;
puis, en substituant la valeur de e dans la première égalité, il vient :

$$a = 200 + 1\,800, \quad \text{soit : } \boldsymbol{a = 2\,000}.$$

2° Si n bouteilles sont vendues, au prix d'achat de 12 € et de vente de p € chacune, alors le bénéfice b € vérifie :

$$b = np - n \times 12 = n(p - 12),$$

or : $\quad n = a - ep$, et : $a = 2\,000$, $e = 100$,

donc : $\quad b = (2\,000 - 100p)(p - 12) = 100(20 - p)(p - 12)$.

Soit f la fonction : $x \mapsto 100(20 - x)(x - 12)$.
f est un polynôme (du second degré), donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f(x) = 100(-x^2 + 32x - 240),$$
$$f'(x) = 100(-2x + 32) = -200(x - 16),$$

donc le sens de variation de f est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	16	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
f	↗		↘

Si $p = 16$, alors :
$n = 2\,000 - 100 \times 16 = 400$,
$b = 400 \times (16 - 12) = 1\,600$.

Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est donc atteint en 16.

Concrètement, **le bénéfice maximal est donc assuré lorsque la bouteille de champagne est vendue 16 €** (le nombre de bouteilles vendues est alors 400, et le bénéfice s'élève à 1 600 €).

11 1° $f : x \mapsto x - \sin x$.
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 - \cos x,$$

donc : $f'(x) \geqslant 0$,

ce qui prouve que f **est croissante sur** $\mathbb{R}$.

D'autre part : $f(0) = \sin 0 = 0$;
f est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0, donc f est négative sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$:

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-\infty\,;0]\,,\ x - \sin x \leqslant 0\,,$$
$$\text{pour tout } x \text{ de } [0\,;+\infty[\,,\ x - \sin x \geqslant 0\,,$$

autrement dit :

$$\textbf{pour tout } \boldsymbol{x} \textbf{ de }]-\infty\,;0]\,,\ \boldsymbol{\sin x \geqslant x}\,,$$
$$\textbf{pour tout } \boldsymbol{x} \textbf{ de } [0\,;+\infty[\,,\ \boldsymbol{\sin x \leqslant x}\,.$$

2° $\mathscr{C} : y = \sin x$.

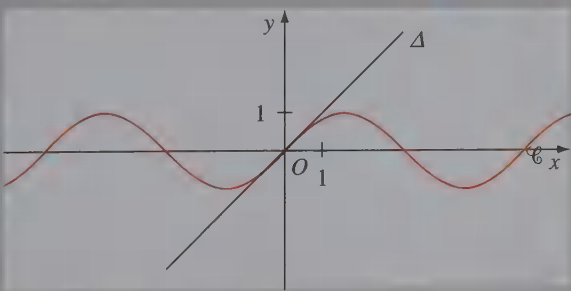
• Une équation de la tangente Δ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus en son point d'abscisse 0 est :

$$y = \sin'(0)\,(x - 0) + \sin 0\,,$$

or : $\sin 0 = 0\,,\ \sin'(0) = \cos 0 = 1\,,$
donc le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 est l'origine O du repère et **une équation de Δ est : $y = x$.**

• D'après les résultats de la question **1°** :
$\mathscr{C}$ est située au-dessus de Δ dans le demi-plan d'inéquation $x \leqslant 0$;
$\mathscr{C}$ est située en-dessous de Δ dans le demi-plan d'inéquation $x \geqslant 0$.

On dit que la courbe $\mathscr{C}$ « traverse sa tangente » à l'origine O .



LIMITES D'UNE FONCTION

Rappels de cours

I- Opérations algébriques sur les limites

ℓ et ℓ' désignent des réels, a désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'une somme

On suppose $f+g$ définie au voisinage de a.

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite en a	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit

On suppose $f\times g$ définie au voisinage de a.

Si f a pour limite en a	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f\times g$ a pour limite en a	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un quotient

On suppose $\dfrac{f}{g}$ définie au voisinage de a.

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
et si g a pour limite en a	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	0	$\pm\infty$
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Si f a pour limite en a	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$
et si g a pour limite en a	0	0	0	0
et si au voisinage de a	$g\geq 0$	$g\leq 0$	$g\geq 0$	$g\leq 0$
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

II- Limite à gauche, limite à droite

Soient f une fonction et a un réel ; λ désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

■ On dit que f **admet** λ **comme limite à gauche en** a si, et seulement si, la restriction de f à $]-\infty\,;a[$ admet λ comme limite en a.

On note alors :

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lambda$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lambda$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lambda$ ou $\lim\limits_{a^-} f = \lambda$.

■ On dit que f **admet** λ **comme limite à droite en** a si et seulement si la restriction de f à $]a\,;+\infty[$ admet λ comme limite en a.

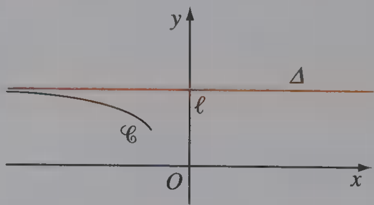
On note alors :

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lambda$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lambda$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lambda$ ou $\lim\limits_{a^+} f = \lambda$.

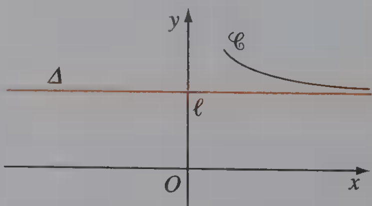
III- Asymptotes

Soient f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

■ **Asymptote horizontale**

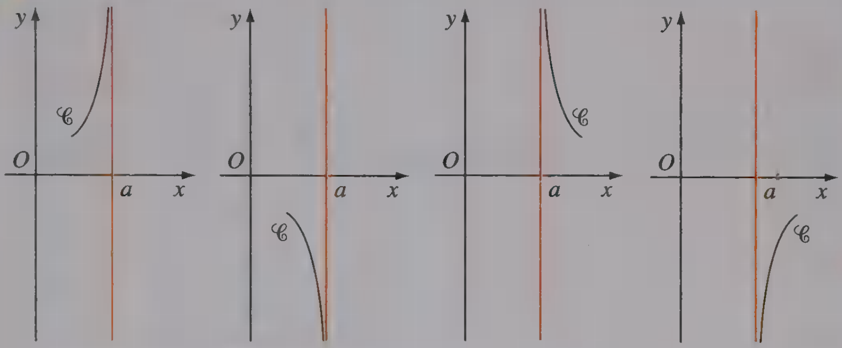


Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, alors la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.



Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

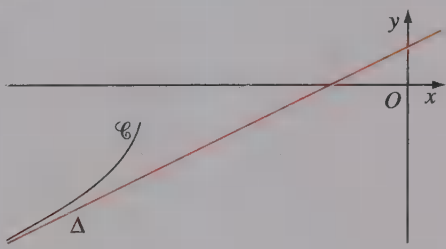
Asymptote verticale



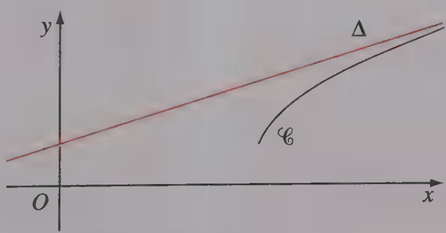
Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

alors la droite Δ d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

Asymptote oblique



Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.



Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 141)

Chacune des figures **1°**, **2°**, **3°**, **4°**, **5°**, **6°** est la représentation graphique d'une fonction f. Lui associer le comportement de f en $+\infty$ qui convient :

$\lim\limits_{+\infty} f = -1$;

$\lim\limits_{+\infty} f = 0$;

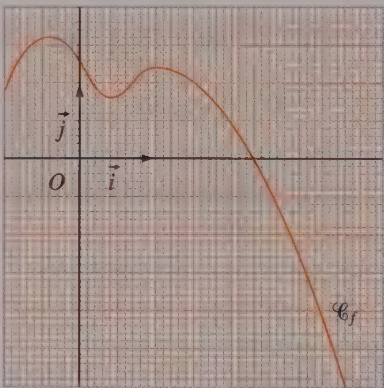
$\lim\limits_{+\infty} f = 2$;

$\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$;

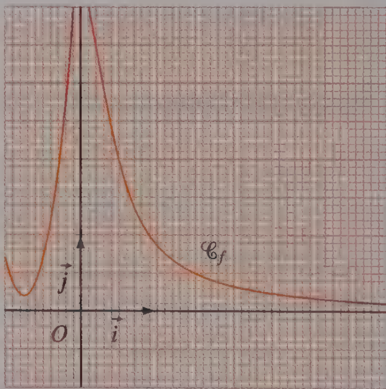
$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$;

f n'admet pas de limite en $+\infty$.

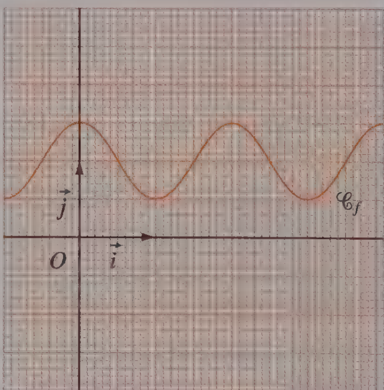
1°



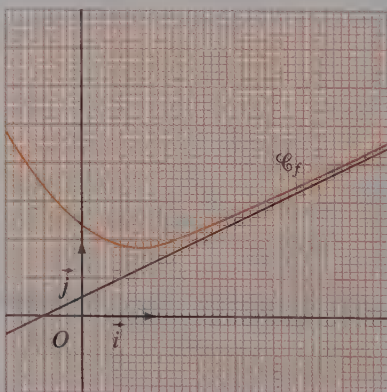
2°



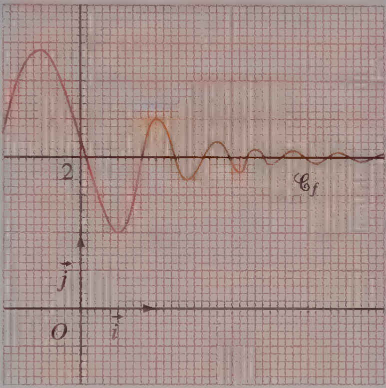
3°



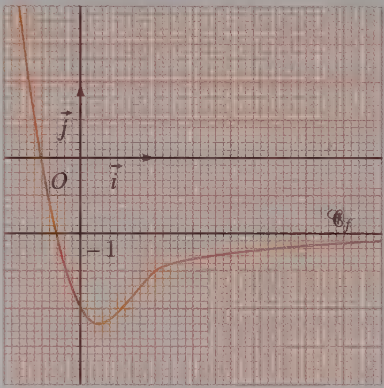
4°



5°



6°



2 (Corrigé p. 141)

Chacune des figures **1°**, **2°**, **3°**, **4°**, **5°**, **6°** est la représentation graphique d'une fonction f.

Lui associer le comportement de f en 1 qui convient :

$\lim\limits_{1} f = -1$;

$\lim\limits_{1} f = 1$;

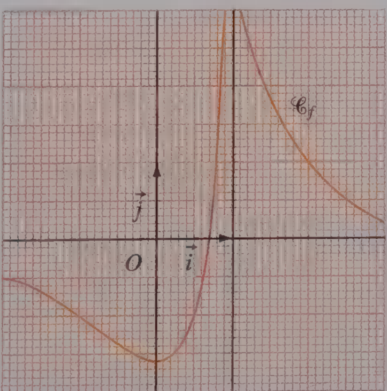
$\lim\limits_{1} f = 2$;

$\lim\limits_{1} f = -\infty$;

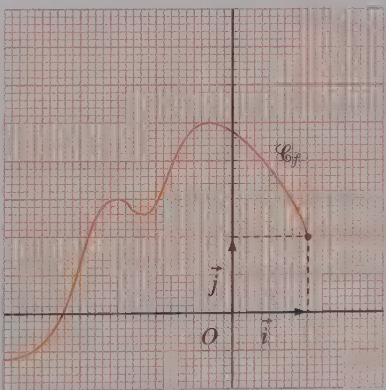
$\lim\limits_{1} f = +\infty$;

f n'admet pas de limite en 1.

1°



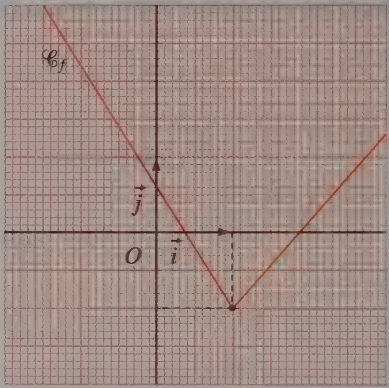
2°



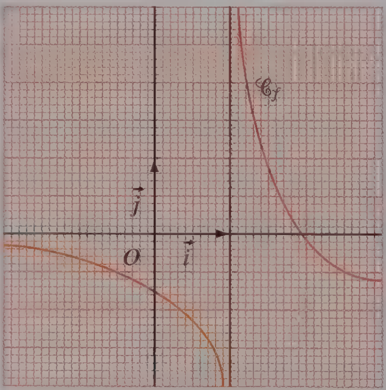
3°


$\mathscr{C}_f$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$

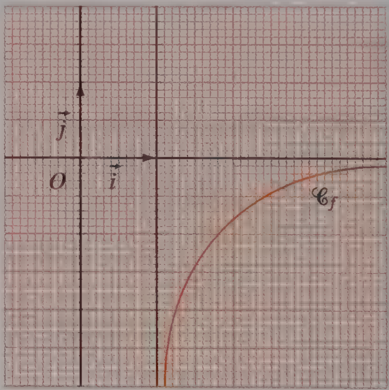
4°


$\mathscr{C}_f$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$

5°


$\mathscr{C}_f$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$

6°


$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
$\mathscr{C}_f$

EXERCICES d'entraînement

3 ★ 5 min (Corrigé p. 142)

f est la fonction : $x \mapsto 7 + \dfrac{5}{x - \sqrt{2}}$.

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $x = \sqrt{2}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f.

Montrer que la droite $\mathcal{D}'$ d'équation : $y = 7$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4 ★ 5 min (Corrigé p. 142)

f est la fonction : $x \mapsto 9x + \dfrac{1}{x}$.

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = 9x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5 ★ 5 min (Corrigé p. 142)

f est la fonction : $x \mapsto 2x + 3 + \dfrac{5}{x^2 + 1}$.

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

6 ★ 5 min (Corrigé p. 143)

Soit (A) l'affirmation :

« Si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-6x + 7)$, alors la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = -6x + 7$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$. »

L'affirmation (A) est-elle vraie ?

Limites à l'infini

7 ★ — 10 min (Corrigé p. 143)

À l'aide des opérations sur les limites, déterminer la limite de la fonction f proposée dans chacun des cas suivants.

1° $x \mapsto 3x^3 + 2x^2$ en $+\infty$.

2° $x \mapsto 3x^3 - 2x^2$ en $-\infty$.

3° $x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

4° $x \mapsto 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

5° $x \mapsto -3x\sqrt{x}$ en $+\infty$.

6° $x \mapsto \dfrac{3}{x^2+2}$ en $+\infty$.

Limites en un réel

8 ★★ — 10 min (Corrigé p. 145)

Étudier le comportement en 1 de la fonction f proposée.

1° $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2° $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

4° $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$.

9 ★★ — 10 min (Corrigé p. 147)

Soit la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{6+x} - \sqrt{6}}{\sqrt{x}}.$$

Étudier la limite de f en 0 (on pourra utiliser la technique de l'expression conjuguée).

1 **1°** $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ **.**

2° $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ **.**
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

3° f **n'admet pas de limite en** $+\infty$ **.**

4° $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ **.**
$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique.

5° $\lim\limits_{+\infty} f = 2$ **.**
La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

6° $\lim\limits_{+\infty} f = -1$ **.**
La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

2 **1°** $\lim\limits_{1} f = +\infty$ **.**
f n'est pas définie en 1 ; elle est définie « autour » de 1.
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

2° $\lim\limits_{1} f = 1 = f(1)$.
$A(1\ ;\ 1)$ est un point d'arrêt de $\mathscr{C}_f$.
f n'est pas définie « à droite » de 1.

3° $\lim\limits_{1} f = 2 = f(1)$.
f est définie en 1.

4° $\lim\limits_{1} f = -1 = f(1)$.
$A(1\ ;\ -1)$ est un point anguleux de $\mathscr{C}_f$.
f est définie en 1 et n'est pas dérivable en 1.

5° f **n'admet pas de limite en 1.**
En effet, en 1, f admet $-\infty$ pour limite à gauche et $+\infty$ pour limite à droite ; ces deux limites étant distinctes, on peut affirmer que f n'admet pas de limite en 1.

6° $\lim\limits_{1} f = -\infty$ **.**
f n'est pas définie « à gauche » de 1.
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

3 $f : x \mapsto 7 + \dfrac{5}{x - \sqrt{2}}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$.

• On a : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} (x - \sqrt{2}) = 0^+$, donc : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} \dfrac{5}{x - \sqrt{2}} = +\infty$,

d'où : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$;

de même : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} (x - \sqrt{2}) = 0^-$, donc : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} \dfrac{5}{x - \sqrt{2}} = -\infty$,

d'où : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$.

Cela prouve que **la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = \sqrt{2}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f.**

• On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x - \sqrt{2}} = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 7$;

de même : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x - \sqrt{2}} = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 7$.

Cela prouve que **la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = 7$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**

4 $f : x \mapsto 9x + \dfrac{1}{x}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) - 9x = 9x + \dfrac{1}{x} - 9x = \dfrac{1}{x}$,

et : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,

donc **la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 9x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**

5 $f : x \mapsto 2x + 3 + \dfrac{5}{x^2 + 1}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - (2x + 3) = 2x + 3 + \frac{5}{x^2 + 1} - 2x - 3 = \frac{5}{x^2 + 1},$$

de plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2 + 1} = 0$,

donc **la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**

6 Voici un contre-exemple qui prouve que l'**affirmation** **(*A*)**

« si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-6x+7)$, alors la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$y = -6x + 7$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$ »
est fausse.

Soit la fonction $f : x \mapsto -x^2 - 6x + 7$.

On a : $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-6x+7) = -\infty \,,$$

et bien sûr la courbe représentative de f (qui est une parabole) n'admet pas de droite asymptote.

On peut avoir : $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-6x+7) \,,$$

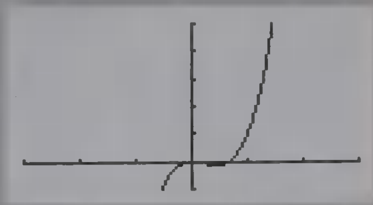
sans que la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = -6x + 7$
soit asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$.

7 **1°** $f : x \mapsto 3x^3 + 2x^2$ en $+\infty$.

La fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, est la somme des fonctions $x \mapsto 3x^3$ et $x \mapsto 2x^2$, chacune ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

On en déduit : $$\boldsymbol{\lim_{+\infty} f = +\infty} \,.$$

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



• en entrant :

Y1=3X^3+2X²

• avec le cadrage :

$-3 \leqslant x \leqslant 3$,

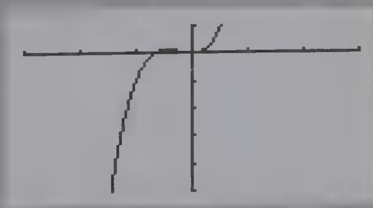
$-1 \leqslant y \leqslant 5$.

2° $f : x \mapsto 3x^3 - 2x^2$ en $-\infty$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est la somme des monômes $x \mapsto 3x^3$ et $x \mapsto -2x^2$; comme on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2) = -\infty$,

il vient : $$\boldsymbol{\lim_{-\infty} f = -\infty} \,.$$

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



• en entrant :

Y1=3X^3–2X²

• avec le cadrage :

$-3 \leqslant x \leqslant 3$,

$-5 \leqslant y \leqslant 1$.

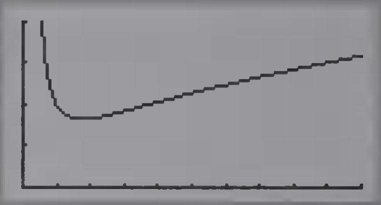
3° $f : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

On sait : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$,

donc : $$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



- en entrant :

  Y1=√X+1÷X²

- avec le cadrage :

  $0 \leqslant x \leqslant 10$,

  $0 \leqslant y \leqslant 4$.

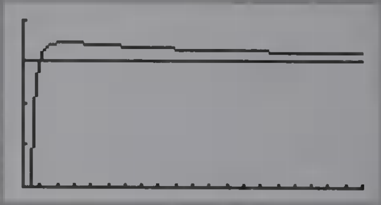
4° $f : x \mapsto 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$,

donc : $$\lim_{+\infty} f = 3.$$

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



- en entrant :

  Y1=3+1÷√X−1÷X²

  Y2=3

- avec le cadrage :

  $0 \leqslant x \leqslant 20$,

  $0 \leqslant y \leqslant 4$.

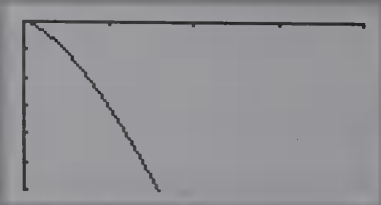
5° $f : x \mapsto -3x\sqrt{x}$ en $+\infty$.

f est définie seulement sur $\mathbb{R}_+$. f est le produit :

- de $x \mapsto -3x$, de limite $-\infty$ en $+\infty$,
- et de $x \mapsto \sqrt{x}$, de limite $+\infty$ en $+\infty$;

par conséquent : $$\lim_{+\infty} f = -\infty.$$

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



- en entrant :

  Y1=−3X√X

- avec le cadrage :

  $0 \leqslant x \leqslant 4$,

  $-6 \leqslant y \leqslant 0$.

6° $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+2}$ en $+\infty$.

f est définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+2) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2+2}\right) = 0$.

Il en résulte : $\mathbf{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$.

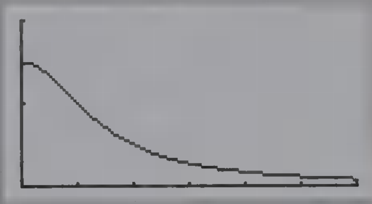
Copie d'écran de calculatrice obtenue :

- en entrant :

  Y1=3÷(X²+2)

- avec le cadrage :

  $0 \leqslant x \leqslant 6$,
  $0 \leqslant y \leqslant 2$.



8 **1°** $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

L'ensemble de définition de f est $]1\,;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-1} = 0^+$,

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$.

c'est-à-dire : $\mathbf{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty}$.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

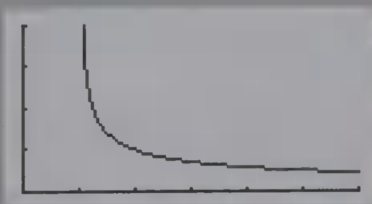
Copie d'écran de calculatrice obtenue :

- en entrant :

  Y1=1÷√(X−1)

- avec le cadrage :

  $0 \leqslant x \leqslant 6$,
  $0 \leqslant y \leqslant 4$.



2° $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

L'ensemble de définition de f est :

$]-\infty\,;1[\, \cup \,]1\,;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+$,

donc : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$,

c'est-à-dire : $\mathbf{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}$.

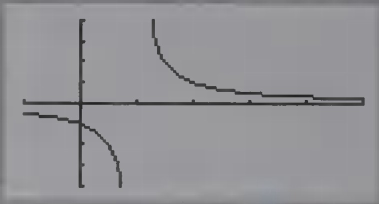
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

CORRIGÉS

De même : $\lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) = 0^-$, donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$,

c'est-à-dire : $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty .$$

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



- en entrant :

  Y1=1÷(X–1)

- avec le cadrage :

  $-1 \leqslant x \leqslant 5$,
  $-4 \leqslant y \leqslant 4$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

L'ensemble de définition de f est :
$]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

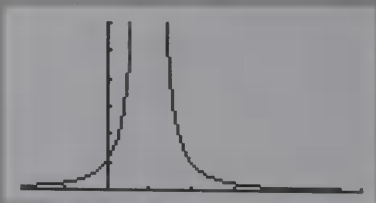
On a : $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$,

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$,

c'est-à-dire : $$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty .$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



- en entrant :

  Y1=1÷(X–1)²

- avec le cadrage :

  $-2 \leqslant x \leqslant 6$,
  $0 \leqslant y \leqslant 6$.

4° $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$.

L'ensemble de définition de f est $]1\,;+\infty[$.
Pour tout x de $]1\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$
$$= \sqrt{x-1} .$$

On a : $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-1} = 0$,

donc : $$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 .$$

Le point de coordonnées $(1\,;0)$ est un « point d'arrêt » de la courbe représentative de f.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

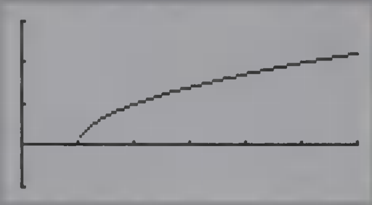
- en entrant :

  Y1=(X–1)÷√(X–1)

- avec le cadrage :

  $0 \leqslant x \leqslant 6$,

  $-1 \leqslant y \leqslant 3$.



9 $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6}}{\sqrt{x}}$.

L'ensemble de définition de f est $]0\,;+\infty[$.

Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour limite 0 en 0, ainsi que $x \mapsto \sqrt{6+x}-\sqrt{6}$, les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites ne peuvent pas s'appliquer directement ; transformons l'écriture de $f(x)$.

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{6+x}+\sqrt{6}}{\sqrt{6+x}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{6+x-6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{6+x}+\sqrt{6}\right)},$$

donc :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6+x}+\sqrt{6}} ;$$

de plus : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{6+x}+\sqrt{6}\right) = \sqrt{6+0}+\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Il vient finalement : $\boldsymbol{\lim\limits_{0} f = 0}$.

ÉTUDE DE FONCTIONS

Rappels de cours

En général, étudier une fonction f consiste à adopter la démarche suivante :

• déterminer l'ensemble de définition de f, s'il n'est pas explicitement donné dans l'énoncé ;

• étudier si f est paire, impaire ou périodique, ce qui permet, le cas échéant, de réduire l'ensemble d'étude ;

• préciser sur quel ensemble la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble ;

• du signe de $f'(x)$, déduire le sens de variation de f ;

• déterminer les limites éventuelles de f là où le problème se pose, c'est-à-dire dans la plupart des cas, aux bornes ouvertes de son ensemble de définition ;

• enfin, dresser le tableau de variation de f (et vérifier sa cohérence).

Lorsqu'il est demandé de « tracer la courbe représentative de f », il est implicitement exigé de mettre en évidence sur le graphique les éléments géométriques remarquables de la courbe : asymptotes, tangentes parallèles aux axes, centre de symétrie, axes de symétrie éventuels. Il est d'ailleurs préférable de commencer par placer ces éléments géométriques, le tracé de la courbe en est facilité.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

Dans tous les exercices de ce chapitre :
- *le plan est muni d'un repère* $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ *orthogonal,*
- *on note* $\mathscr{C}_f$ *la courbe représentative d'une fonction* f *dans ce repère.*

1

(Corrigé p. 156)

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. Sur quel ensemble suffit-il d'étudier f ?

2

(Corrigé p. 156)

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique. Sur quel ensemble suffit-il d'étudier f ?

3

(Corrigé p. 156)

Une fonction f est dérivable sur son ensemble de définition :

$$]-\infty\,;-1[\,\cup\,[0\,;+\infty[\,.$$

Lors de l'étude de f, où convient-il de chercher les limites ?

4

(Corrigé p. 156)

Soit f la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2$.

1° Déterminer le sens de variation de f.

2° Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.

5

(Corrigé p. 157)

f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la droite Δ d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ ?

Asymptote

6

(Corrigé p. 157)

f est une fonction strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$ et la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Ces données suffisent-elles pour connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ (dans le demi-plan d'inéquation $x > 0$) ?

EXERCICES d'entraînement

Fonctions rationnelles

On appelle fonction rationnelle toute fonction qui peut s'écrire comme le quotient de deux polynômes.

Une somme de fonctions rationnelles est une fonction rationnelle, et toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

7 ★ 15 min (Corrigé p. 158)

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{2}-1+\frac{2}{x}.$$

1° a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de f.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2° Démontrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{x}{2}-1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

3° Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ (le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est supposé orthonormal).

8 ★★ 30 min (Corrigé p. 160)

Étudier la fonction f proposée (parité, limite aux bornes de l'ensemble de définition, sens de variation).
Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1° $f : x \mapsto x+\frac{4}{x}$ (préciser les droites asymptotes de $\mathscr{C}_f$).

2° $f : x \mapsto x^2+\frac{16}{x}$.

Tangente, centre de symétrie, axe de symétrie, résolution graphique d'équations

9 ★ 30 min (Corrigé p. 163)

Soit f la fonction : $[3\ ;4] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3(2x-1)}{2x^2-2x+5}.$$

1° Vérifier que f est définie sur $[-3\ ;4]$ et justifier que, pour tout x de $[-3\ ;4]$, $f(x)$ est du signe de $2x-1$.

2° Déterminer le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

3° Démontrer que le point $A\left(\frac{1}{2}\ ;0\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

4° Tracer $\mathscr{C}_f$ en prenant pour unités graphiques 1 cm sur (Ox), 4 cm sur (Oy).

10 ★★ 30 min (Corrigé p. 166)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de f.

2° Démontrer que la droite Δ d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

3° a. Démontrer que, pour tout h de $]0\ ;4[$, le taux de variation de f entre 0 et h est égal à :

$$\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{4-h}+2}\ ;$$

en déduire que f n'est pas dérivable en 0 ; la courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une tangente en son point d'abscisse 0 ?

b. Justifier que f n'est pas dérivable en 4 et que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en son point d'abscisse 4.

4° Démontrer que f est dérivable sur $]0\ ;4[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet intervalle.

5° Déterminer le sens de variation de f, dresser son tableau de variation.

6° Tracer $\mathscr{C}_f$.

11 ★★ 30 min (Corrigé p. 170)

Soit f la fonction : $x \mapsto 3x^3 - 4x - 1$.

1° a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on pourra mettre x^3 en facteur dans l'expression de $f(x)$) .

b. Étudier le sens de variation de f.

2° a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point I d'abscisse 0.

b. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T .

c. Démontrer que I est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

3° a. Pour tout réel x , développer le produit $(x+1)(3x^2 - 3x - 1)$.

b. En déduire les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite des abscisses.

4° Tracer T et $\mathscr{C}_f$.

5° Déterminer graphiquement le nombre $N(m)$ de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs du réel m (présenter les résultats dans un tableau).

Fonctions trigonométriques

12 ★★★ 30 min (Corrigé p. 173)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sin x\,(1 + \cos x)$.

1° Démontrer que f est périodique de période 2π et impaire.

2° a. Démontrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (1 + \cos x)(2\cos x - 1) .$$

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

c. Soit $\mathscr{C}_1$ la courbe constituée des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $[0 ; \pi]$.
Tracer $\mathscr{C}_1$ et ses tangentes aux points d'abscisses 0 , $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ et π (unité graphique : 3 cm).

3° Soit $\mathscr{C}$ la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ située dans la bande de plan d'inéquations $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.
Expliquer comment tracer $\mathscr{C}$ connaissant $\mathscr{C}_1$.
Tracer $\mathscr{C}$ (unité graphique : 1 cm).

13 ★★★ 30 min

(Corrigé p. 175)

Étudier la fonction $f : x \mapsto \cos x + \cos^2 x$ et tracer la partie $\mathscr{C}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont les points ont une abscisse comprise entre $-\pi$ et 2π.

EXERCICES

CORRIGÉS des exercices

1 Il suffit d'étudier f sur $[0\,;+\infty[$:

• le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$ est contraire du sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$;

• si f admet une limite en $+\infty$, alors : $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f$;

si f n'admet pas de limite en $+\infty$, alors f n'admet pas de limite en $-\infty$;

• le repère étant orthogonal, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2 f étant 2π-périodique, on peut restreindre l'étude de f à $[-\pi\,;\pi]$; f étant de plus impaire, il suffit d'étudier f sur $[0\,;\pi]$.

3 f étant dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;-1[\,\cup\,[0\,;+\infty[$, il convient de chercher ses limites aux bornes ouvertes de son ensemble de définition, c'est-à-dire en $-\infty$, -1 et $+\infty$.

4 Soit f la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2$.

1° Pour tout réel x :

$$f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2\ ;$$

donc : $\begin{cases} f'(1) = 0\,, \\ f'(x) > 0 \text{ si } x \neq 1\,, \end{cases}$

ce qui prouve que f **est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

f' est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de cet intervalle (en fait en un seul réel : 1).

2° $f'(1) = 0$ et $f(1) = \dfrac{7}{3}$,

donc une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1 est $y = \dfrac{7}{3}$.

La tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1 est parallèle à la droite des abscisses car $f'(1)$ est nul.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

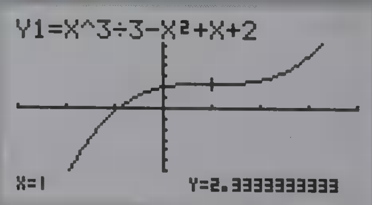
• en entrant :

Y1=X^3:3–X²+X+2

• avec le cadrage :

$-3 \leqslant x \leqslant 4$,

$-8 \leqslant y \leqslant 8$.



5 La droite Δ d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, donc : $\lim\limits_{+\infty} f = 2$; de plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\text{pour tout réel } x\,,\ f(x) < 2\,.$$

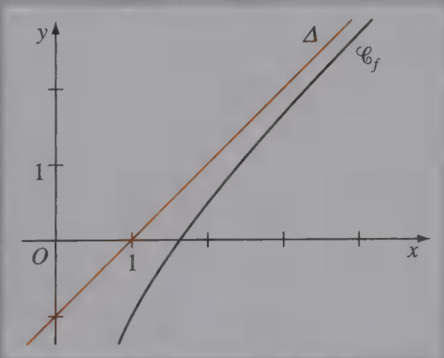
On en déduit que **$\mathscr{C}_f$ est toujours en dessous de Δ.**

6 Connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ, c'est connaître le signe de $f(x) - (x - 1)$ lorsque x appartient à $]0\,; +\infty[$.

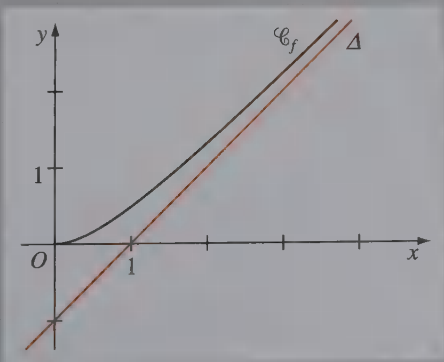
Dire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ signifie : $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x - 1)\big) = 0$.

Pour se convaincre qu'il ne suffit pas de savoir que f est strictement croissante sur $]0\,; +\infty[$ et que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, pour connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ, considérons les trois exemples suivants.

- $f : x \mapsto x - 1 - \dfrac{1}{x}$; $\mathscr{C}_f$ est située sous Δ.



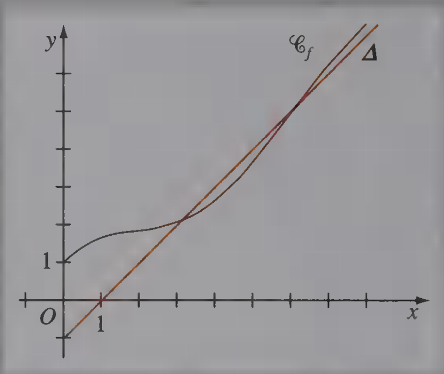
- $f : x \mapsto x - 1 + \dfrac{1}{x + 1}$; $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de Δ.



CORRIGÉS

• $f : x \mapsto x - 1 + 2\,\dfrac{\sin x}{x}$;

$\mathscr{C}_f$ n'est située ni au-dessus, ni en dessous de Δ ; sur tout intervalle dont une extrémité est $+\infty$, $f(x) - (x - 1)$ prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives.



7 $f : [1\,;+\infty[\;\longrightarrow\; \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x}\,.$$

L'ensemble de définition de f est $[1\,;+\infty[$.

1° a. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$,

donc : $$\lim_{+\infty} f = +\infty\,.$$

b. La fonction affine $x \mapsto \dfrac{x}{2} - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ est dérivable en tout réel non nul ; par conséquent, f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$.

Pour tout x de $[1\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$
$$= \frac{(x+2)(x-2)}{2x^2}\,,$$

Pour $x \geqslant 1$, $x + 2 > 0$ et $2x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$.

donc :

- $f'(2) = 0$,
- si $x \in [1\,;2[$, alors $f'(x) < 0$,
- si $x \in\,]2\,;+\infty[$, alors $f'(x) > 0$.

Cela prouve que f est strictement décroissante sur $[1\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.

c. $f(1) = \dfrac{1}{2} - 1 + 2 = 1{,}5$;

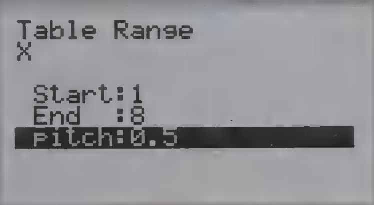
$f(2) = 1 - 1 + 1 = 1$;

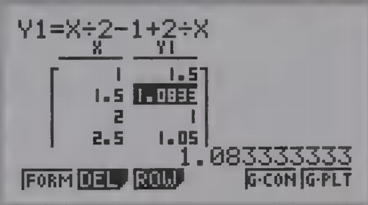
$f'(1) = -1{,}5$.

La pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est égale à $-1{,}5$.

Le tableau de variation de f est :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-1{,}5$	$-$	0	$+$	
f	1,5	↘	1	↗	$+\infty$





2° $\Delta : y = \dfrac{x}{2} - 1$.

• Pour tout x de $[1 \,;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1 + \dfrac{2}{x}$, et : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$,

donc la droite Δ **est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de** $+\infty$.

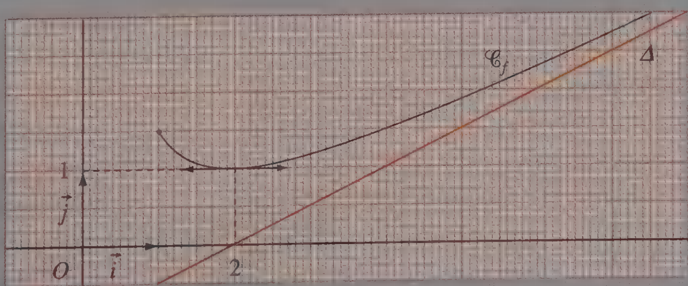
• Soient x un réel de $[1 \,;+\infty[$, M et P les points d'abscisse x respectivement de $\mathscr{C}_f$ et Δ :

$$\overline{PM} = y_M - y_P = \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x} - \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{2}{x} ,$$

donc : $\overline{PM} > 0$.

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ **est située au-dessus de Δ dans le demi-plan d'inéquation $x \geqslant 1$.**

3°



CORRIGÉS

8 1° $f : x \mapsto x + \dfrac{4}{x}$.

- L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$-x$ appartient à $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à zéro),

et $$f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -\left(x + \frac{4}{x}\right),$$

donc $$f(-x) = -f(x).$$

f est donc une fonction impaire ; il suffit de l'étudier sur $]0 ; +\infty[$, on complétera sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par la symétrie par rapport à l'origine du repère.

- Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, et : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$,

donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, et : $$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$,

$f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, et : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x} = +\infty$,

donc $\displaystyle\lim_{0^+} f = +\infty$ et la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

De plus, f étant impaire, on obtient :

$$\lim_{-\infty} f = -\infty, \quad \lim_{0^-} f = -\infty.$$

> Si f est impaire et si $\displaystyle\lim_{+\infty} f = a$, alors : $\displaystyle\lim_{-\infty} f = -a$.
> Si f est impaire et si $\displaystyle\lim_{0^+} f = a$, alors : $\displaystyle\lim_{0^-} f = -a$.

- f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2},$$

donc :

- $f'(2) = 0$,
- si $0 < x < 2$, alors $f'(x) < 0$.
- si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$.

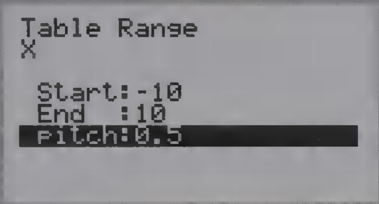
On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ et strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

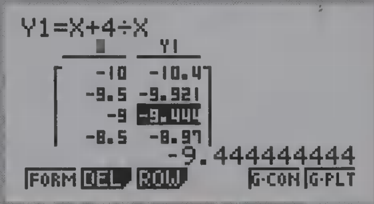
> Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $x + 2 > 0$ et $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$.

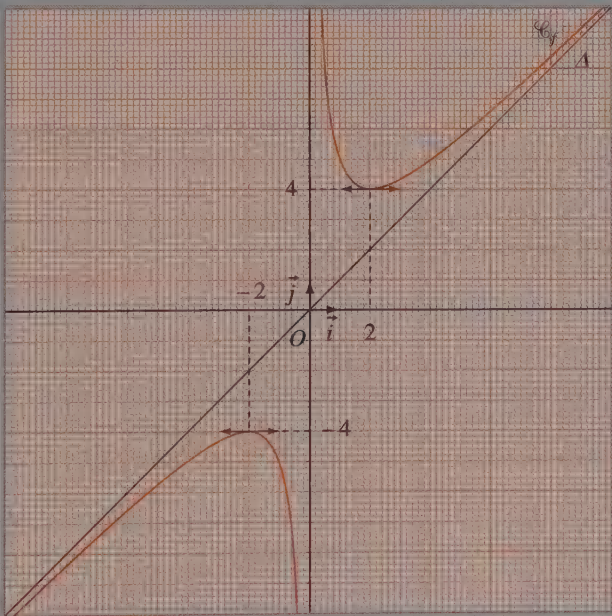
$f(2)$, c'est-à-dire 4, est donc le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est le suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$







2° $f : \mapsto x^2 + \dfrac{16}{x}$.

• L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

• On sait :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{16}{x} = 0 ,$$

f n'est ni paire, ni impaire ; en effet :
$f(1) = 17$, $f(-1) = -15$,
donc : • $f(-1) \neq f(1)$, et f n'est pas paire,
• $f(-1) \neq -f(1)$, et f n'est pas impaire.

donc : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

De même : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{16}{x} = 0$,

donc : $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

• On a : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{16}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{16}{x} = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{0^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$,

et la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

• f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;0[\, \cup \,]0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2} ,$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^3 - 8$, donc :

$f'(2) = 0$,

si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$,

si $x < 2$, alors $f'(x) < 0$.

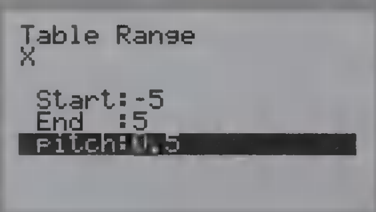
On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.

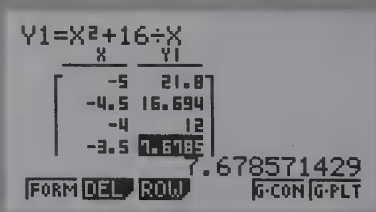
La fonction $x \mapsto x^3 - 8$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 2.

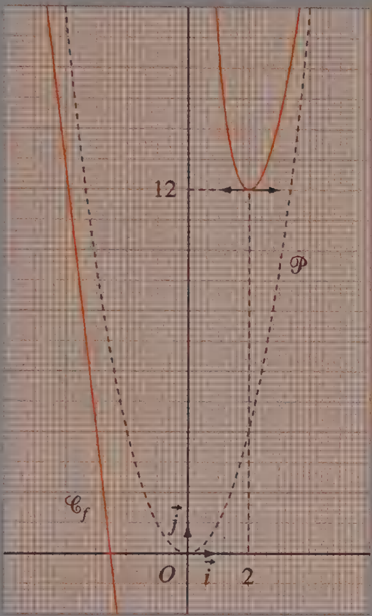
$f(2)$, c'est-à-dire 12 , est donc le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$







Au voisinage de $+\infty$, au voisinage de $-\infty$:
$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x},$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{16}{x} = 0 ;$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \frac{16}{x} = 0 .$$
On dit que $\mathscr{C}_f$ et la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

9 f : $[3 ; 4] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{3(2x-1)}{2x^2 - 2x + 5} .$$

1° L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x de $[-3 ; 4]$ tels que :
$$2x^2 - 2x + 5 \neq 0 .$$
Soient (E) l'équation du second degré :
$$2x^2 - 2x + 5 = 0 ;$$
son discriminant Δ vérifie :
$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4 \times 2 \times 5 \\ &= 4 - 40 \\ &= -36 . \end{aligned}$$

$2x^2 - 2x + 5$ est du signe du coefficient de x^2.

$\Delta < 0$, donc (E) n'admet pas de solution et :
$$\text{pour tout réel } x, \ 2x^2 - 2x + 5 > 0 .$$
On en déduit que :

l'ensemble de définition de f est $[-3 ; 4]$ et que, pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f(x)$ est du signe de $2x - 1$.

2° f est la restriction à $[-3 ; 4]$ d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $[-3 ; 4]$.

Pour tout x de $[-3\,;4]$:

$$f'(x) = 3 \times \frac{2(2x^2-2x+5)-(2x-1)(4x-2)}{(2x^2-2x+5)^2}$$
$$= 3 \times \frac{4x^2-4x+10-8x^2+4x+4x-2}{(2x^2-2x+5)^2}$$
$$= 3 \times \frac{-4x^2+4x+8}{(2x^2-2x+5)^2}$$
$$= \frac{12(-x^2+x+2)}{(2x^2-2x+5)^2}\,;$$

donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+x+2$.

Soit g le polynôme du second degré :

$$x \mapsto -x^2+x+2\,;$$

-1 étant une racine de g, son autre racine, notée α, vérifie :

$$\alpha \times (-1) = \frac{2}{-1},$$

donc : $\alpha = 2$.

On en déduit le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut aussi calculer le discriminant pour calculer les racines de g.

puis :

- $f'(-1) = f'(2) = 0$,
- pour tout x de $[-3\,;-1[\,\cup\,]2\,;4]$, $f'(x) < 0$,
- pour tout x de $]-1\,;2[$, $f'(x) > 0$,

ce qui implique que f est strictement croissante sur $[-1\,;2]$ et strictement décroissante sur chacun des intervalles $[-3\,;-1]$ et $[2\,;4]$.

$f(-3) = \frac{-21}{29} \approx -0{,}72$,
$f'(-3) = \frac{-120}{841} \approx -0{,}14$,
$f(4) = -f(-3)$,
$f'(4) = f'(-3)$.

x	-3		-1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{-21}{29}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{21}{29}$

3° $A\left(\frac{1}{2};0\right)$

Soient M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(A;\vec{i},\vec{j})$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\text{, donc } x\vec{i}+y\vec{j} = \left(\frac{1}{2}+X\right)\vec{i}+Y\vec{j}\,;$$

on en déduit les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X + \dfrac{1}{2} \\ y = Y. \end{cases}$$

Une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est $y = f(x)$, donc une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(A;\vec{i},\vec{j})$ est $Y = f\left(X+\frac{1}{2}\right)$.

Or, pour tout réel X tel que $X+\frac{1}{2}$ appartienne à $[-3\,;4]$, c'est-à-dire tel que X appartienne à $\left[-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right]$:

$$f\left(X+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left[2\left(X+\frac{1}{2}\right)-1\right]}{2\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(X+\frac{1}{2}\right)+5}$$

$$f\left(X+\frac{1}{2}\right) = \frac{3(2X+1-1)}{2X^2+2X+\frac{1}{2}-2X-1+5} = \frac{6X}{2X^2+\frac{9}{2}} = \frac{12X}{4X^2+9}.$$

La fonction F définie sur $\left[-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right]$ par :

$$F(X) = \frac{12X}{4X^2+9} \text{ est impaire ;}$$

en effet, pour tout X de $\left[-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right]$:

$-X$ appartient à $\left[-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right]$,

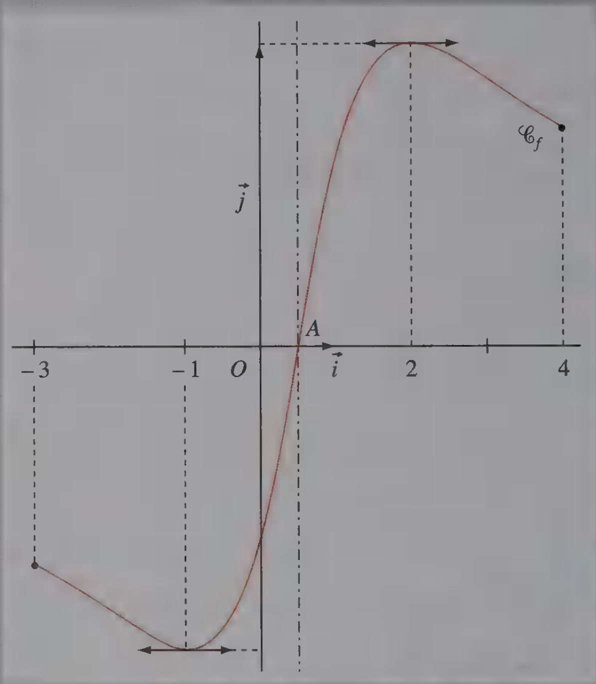
et $$F(-X) = \frac{12(-X)}{4(-X)^2+9} = \frac{-12X}{4X^2+9}$$

$$= -F(X).$$

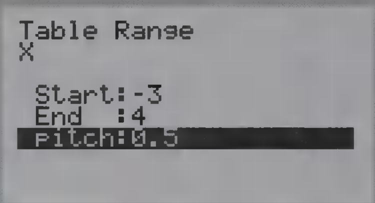
En résumé, démontrer que le point $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$, c'est démontrer que la fonction :

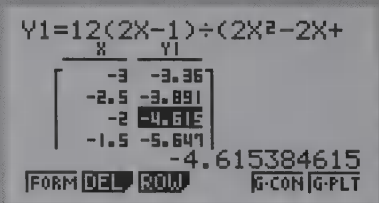
$x \mapsto f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est impaire.

On a ainsi prouvé que **le point** $A\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ **est centre de symétrie de** $\mathscr{C}_f$.



Pour tracer $\mathscr{C}_f$ en prenant pour unités graphiques 1 cm sur (Ox), 4 cm sur (Oy), il est avantageux de programmer $4f$ plutôt que f.





10 $f : x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$.

1° Un réel x appartient à l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f si, et seulement si : $x \geqslant 0$ et $4 - x \geqslant 0$,

c'est-à-dire si, et seulement si : $0 \leqslant x \leqslant 4$,

donc : $\mathscr{D}_f = [0\,;4]$.

2° $\Delta : x = 2$.

Notons A le point de coordonnées $(2\,;0)$.

Soient M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(A\,;\vec{i}, \vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, donc $x\vec{i} + y\vec{j} = (2+X)\,\vec{i} + Y\vec{j}$; on en déduit les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y. \end{cases}$$

Une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est $y = f(x)$, donc une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(A\,;\vec{i},\vec{j})$ est $Y = f(X+2)$.
Or, pour tout réel X tel que $X + 2$ appartienne à $[0\,;4]$, c'est-à-dire tel que X appartienne à $[-2\,;2]$:

$$f(X+2) = \sqrt{X+2} + \sqrt{4-(X+2)} = \sqrt{X+2} + \sqrt{2-X}.$$

La fonction F définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$F(X) = \sqrt{X+2} + \sqrt{2-X}$$

est paire ; en effet, pour tout X de $[-2\,;2]$:

$-X$ appartient à $[-2\,;2]$,

et :

$$\begin{aligned} F(-X) &= \sqrt{-X+2} + \sqrt{2+X} \\ &= \sqrt{X+2} + \sqrt{2-X} \\ &= F(X). \end{aligned}$$

En résumé, démontrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$, c'est démontrer que la fonction : $x \mapsto f(x+2)$ est paire.

On a ainsi prouvé :

la droite Δ d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

3° a. • Pour tout h de $]0\,;4[$:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}+\sqrt{4-h}-2}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} + \frac{\sqrt{4-h}-2}{h}.$$

or :
$$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

et, en multipliant le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{\sqrt{4-h}-2}{h}$ par le réel strictement positif $\sqrt{4-h}+2$:

Noter que, f étant la somme de $x \mapsto \sqrt{x}$, non dérivable en 0, et de $x \mapsto \sqrt{4-x}$, dérivable en 0, f n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{\sqrt{4-h}-2}{h} = \frac{(\sqrt{4-h})^2-2^2}{h(\sqrt{4-h}+2)} = \frac{4-h-4}{h(\sqrt{4-h}+2)} = \frac{-1}{\sqrt{4-h}+2},$$

donc, finalement :

$$\boldsymbol{\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{4-h}+2}}.$$

- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4-h}+2} = \dfrac{1}{4}$,

donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$,

ce qui prouve que :

f n'est pas dérivable en 0 et que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0.

> En toute rigueur, pour conclure à l'existence de cette tangente verticale, il faut signaler que f est continue en 0, c'est-à-dire : $\lim\limits_{0} f = f(0)$.

b. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0 et est symétrique par rapport à la droite Δ d'équation $x = 2$, donc $\mathscr{C}_f$ **admet une tangente verticale en son point d'abscisse 4**, ce qui prouve que **f n'est pas dérivable en 4**.

> Si f était dérivable en 4, alors $\mathscr{C}_f$ admettrait une tangente non verticale en son point d'abscisse 4.

4° • La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{4-x}$ est dérivable sur l'intervalle formé des réels x tels que : $4 - x > 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;4[$; chacune des deux fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt{4-x}$ est donc dérivable sur l'intervalle $]0\,;4[$, ce qui implique que leur somme f est dérivable sur $]0\,;4[$.

• Pour tout x de $]0\,;4[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}},$$

donc, en multipliant numérateur et dénominateur par le réel strictement positif $\sqrt{4-x}+\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{4-x})^2-(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$= \frac{4-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)},$$

> Ne pas perdre de vue que l'on calcule $f'(x)$ pour en étudier son signe ; la dernière écriture de $f'(x)$ proposée met bien ce signe en évidence.

et finalement :

$$f'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)}.$$

5° Pour tout x de $]0\,;4[$,
$f'(x)$ est du signe de $2-x$, donc :

$$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ si } 0<x<2, \\ f'(2)=0, \\ f'(x)<0 \text{ si } 2<x<4, \end{cases}$$

ce qui implique que f est strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;4[$.

Ces résultats sont bien en accord avec le fait que la droite Δ d'équation $x=2$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$. On aurait d'ailleurs pu se limiter à étudier le sens de variation de f sur $[0\,;2]$.

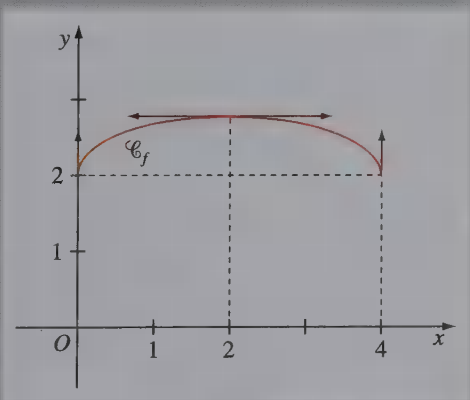
De plus, f étant continue en 0 et en 4 ($\lim_0 f = f(0) = 2$, $\lim_4 f = f(4) = 2$), on peut conclure :

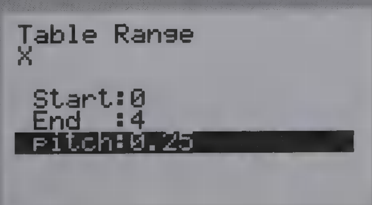
f est strictement croissante sur $[0\,;2]$
et strictement décroissante sur $[2\,;4]$.

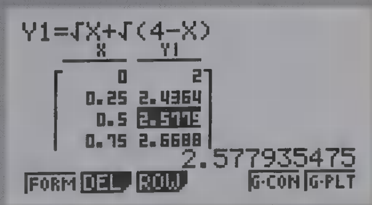
x	0		2		4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

$f(2)=\sqrt{2}+\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$

6°







11 $f : x \mapsto 3x^3 - 4x - 1$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

1° a. • Pour tout réel x non nul, $f(x) = x^3\left(3 - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$,

et :
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty ,$$
$$\lim_{x \to -\infty}\left(3 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 3 \ \left(\text{car } \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0\right),$$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• De manière analogue, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (f est un polynôme), et, pour tout réel x :
$$f'(x) = 9x^2 - 4 = (3x+2)(3x-2) .$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{7}{9}$	↘	$-\frac{25}{29}$	↗	$+\infty$

2° a. Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point I d'abscisse 0 est :
$$y = f'(0)\ (x - 0) + f(0) ,$$
or :
$$f(0) = -1 ,\ f'(0) = -4 ,$$
donc I a pour ordonnée -1 et **une équation de T est $y = -4x - 1$.**

b. Soient x un réel, M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et P celui de T de même abscisse :
$$\overline{PM} = y_M - y_P = f(x) - (-4x - 1) = 3x^3 - 4x - 1 - (-4x - 1)$$
$$= 3x^3 ,$$
donc $\overline{PM}$ est du signe de x , ce qui prouve que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T dans le demi-plan d'inéquation $x \geqslant 0$, et en-dessous dans le demi-plan d'inéquation $x \leqslant 0$; de plus, I est leur seul point d'intersection.

x et x^3 sont de même signe.

c. $I(0\ ;-1)$.

Déterminons une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(I\ ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(I ; \vec{i}, \vec{j})$.
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, donc $x\vec{i} + y\vec{j} = -\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j} = X\vec{i} + (Y-1)\vec{j}$; on en déduit les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y - 1 . \end{cases}$$

Une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$y = 3x^3 - 4x - 1 ,$$

donc une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(I ; \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$Y - 1 = 3X^3 - 4X - 1 ,$$

ou encore :

$$Y = 3X^3 - 4X .$$

La fonction $F : X \mapsto 3X^3 - 4X$ étant impaire :

pour tout réel X,

$$\begin{aligned} F(-X) &= 3(-X)^3 - 4(-X) \\ &= -3X^3 + 4X \\ &= -F(X) , \end{aligned}$$

on peut conclure que :

$$\textbf{I est centre de symétrie de } \mathscr{C}_f .$$

En résumé, démontrer que le point $I(0 ; -1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$, c'est démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) + 1$ est impaire.

3° a. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} (x+1)\,(3x^2 - 3x - 1) &= 3x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 3x - x - 1 \\ &= 3x^3 - 4x - 1 . \end{aligned}$$

b. Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, et :

$$f(x) = 0 \iff 3x^3 - 4x - 1 = 0 ,$$

donc, d'après la question **3. a.** :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x+1)\,(3x^2 - 3x - 1) = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \text{ ou } 3x^2 - 3x - 1 = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ ou } 3x^2 - 3x - 1 = 0 . \end{aligned}$$

Résolvons l'équation (E) du second degré :

$$3x^2 - 3x - 1 = 0 .$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-1) \\ &= 9 + 12 \\ &= 21 ; \end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{3 - \sqrt{21}}{6},$$

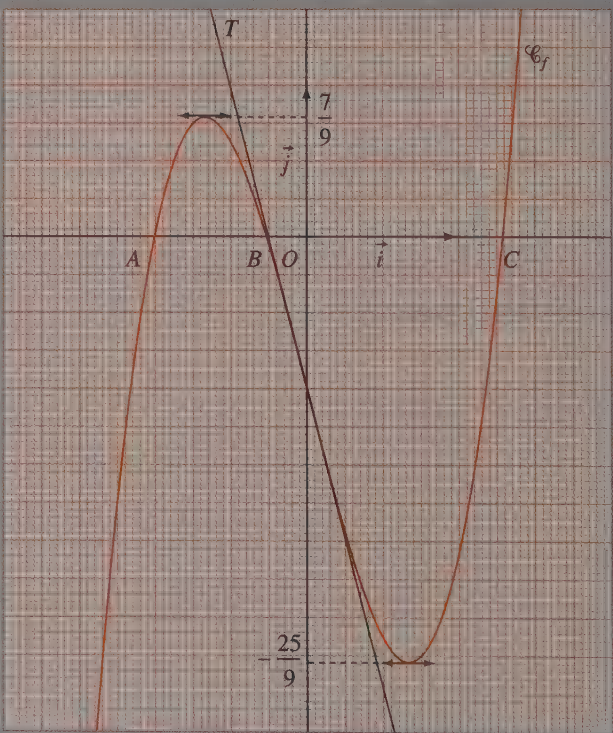
$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}.$$

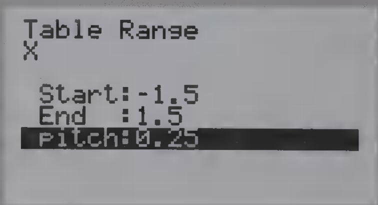
$$\frac{3 - \sqrt{21}}{6} \approx -0{,}26,$$
$$\frac{3 + \sqrt{21}}{6} \approx 1{,}26.$$

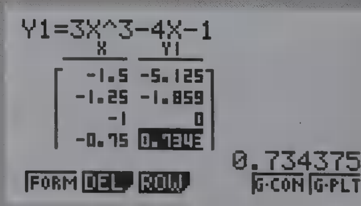
Finalement, **les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite des abscisses sont les trois points A, B, C d'abscisses respectives :**

$$\mathbf{-1, \quad \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \quad et \quad \frac{3 + \sqrt{21}}{6}.}$$

4°







5° Le nombre $N(m)$ de solutions de l'équation $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = m$ (qui est parallèle à la droite des abscisses).

Par conséquent :

m	$-\infty$		$-\frac{25}{29}$		$\frac{7}{9}$		$+\infty$
$N(m)$		1	2	3	2	1	

12 $f : x \mapsto \sin x\,(1 + \cos x)$.

La fonction f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

1° • Pour tout réel x :

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)\,(1 + \cos(x + 2\pi)),$$

donc, les fonctions sin et cos étant 2π-périodiques :

$$f(x + 2\pi) = \sin x\,(1 + \cos x),$$

c'est-à-dire :

$$f(x + 2\pi) = f(x),$$

ce qui prouve que f **est périodique de période 2π** .

• Pour tout réel x :

$$f(-x) = \sin(-x)\,(1 + \cos(-x)),$$

donc, la fonction sin étant impaire et la fonction cos étant paire :

$$f(-x) = -\sin x\,(1 + \cos x),$$

c'est-à-dire :

$$f(-x) = -f(x),$$

ce qui prouve que f **est impaire**.

2° **a.** Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x\,(1 + \cos x) + \sin x\,(-\sin x) \\ &= \cos x\,(1 + \cos x) - \sin^2 x \\ &= \cos x\,(1 + \cos x) - (1 - \cos^2 x) \\ &= \cos x\,(1 + \cos x) - (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ &= \mathbf{(2\cos x - 1)(1 + \cos x)}. \end{aligned}$$

sin' = cos ,
cos' = – sin .

b. Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$:

• $1 + \cos x \geqslant 0$ et π est la seule solution dans $[0\,;\pi]$ de l'équation $1 + \cos x = 0$;

• $2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x > \cos\dfrac{\pi}{3}$,

Pour tout réel x :
$\cos x \geqslant -1$.

donc, la fonction cos étant strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$:

$$2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3},$$

et $\frac{\pi}{3}$ est la seule solution dans $[0\,;\pi]$ de l'équation $2\cos x - 1 = 0$.

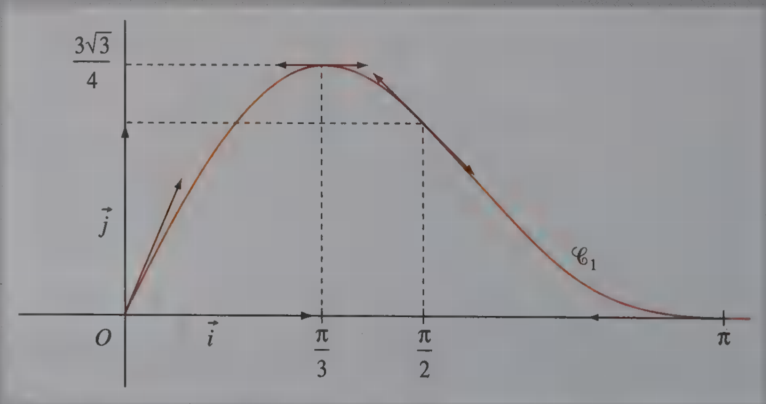
On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\pi]$:

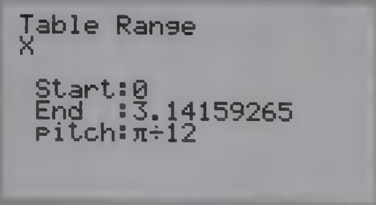
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

c. $\mathscr{C}_1 : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ y = f(x). \end{cases}$

- $\mathscr{C}_1$ admet une tangente horizontale en ses points d'abscisses $\frac{\pi}{3}$ et π ;
- $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$, donc $\mathscr{C}_1$ admet une tangente de pente 2 en 0 ;
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ donc $\mathscr{C}_1$ admet une tangente de pente -1 au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}\,; 1\right)$.

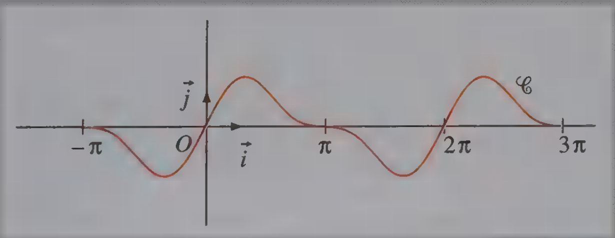




Penser à basculer la calculatrice en mode radian, si ce n'est déjà fait.

3° $\mathscr{C} : \begin{cases} -\pi \leqslant x \leqslant 3\pi \\ y = f(x) . \end{cases}$

- f est impaire, donc la courbe $\mathscr{C}_2$ constituée des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $[-\pi ; \pi]$ est la réunion de $\mathscr{C}_1$ et de la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'origine O ;
- f est 2π-périodique, donc la courbe $\mathscr{C}_3$ constituée des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $[\pi ; 3\pi]$ est l'image de $\mathscr{C}_2$ par la translation de vecteur $2\pi\,\vec{i}$;
- enfin, $\mathscr{C}$ est la réunion de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.



13 $f : x \mapsto \cos x + \cos^2 x$.

$\cos' = -\sin$.

- Des propriétés de la fonction cosinus, on déduit facilement que la fonction f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, paire et de période 2π .
- Pour tout réel x :

$f'(x) = -\sin x - 2 \sin x \cos x$

$\quad\;\;\, = -\sin x\,(1 + 2 \cos x)$.

Les fonctions cos et $x \mapsto 1 + 2\cos x$ ont le même sens de variation.

• Étudions le signe de f' sur $[0\,;\pi]$:

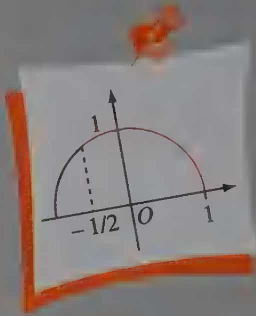
* $\sin 0 = \sin \pi = 0$ et, pour tout x de $]0\,;\pi[$, $\sin x > 0$;

* la fonction $x \mapsto 1 + 2\cos x$ est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$ et s'annule en $\dfrac{2\pi}{3}$,

donc, pour tout x de $[0\,;\pi]$:

$$1 + 2\cos x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2\pi}{3},$$

$$1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}.$$



• Il vient :

$$f'(0) = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f'(\pi) = 0,$$

$$\text{pour tout } x \text{ de } \left]0\,;\frac{2\pi}{3}\right[,\ f'(x) < 0,$$

$$\text{pour tout } x \text{ de } \left]\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right[,\ f'(x) > 0.$$

• Du signe de f' , on déduit que f est strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$.

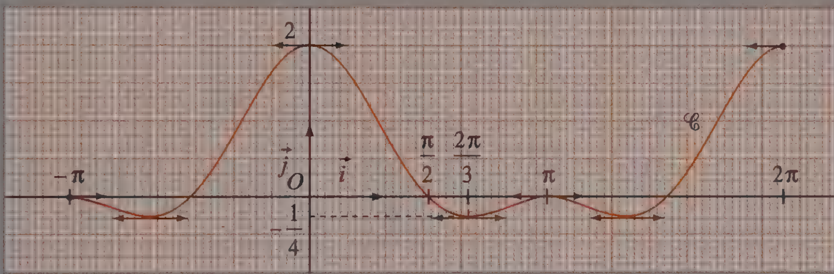
• Résumons les résultats obtenus en dressant le tableau de variation de f sur $[0\,;\pi]$:

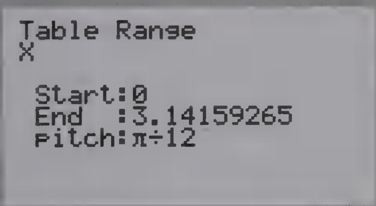
x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

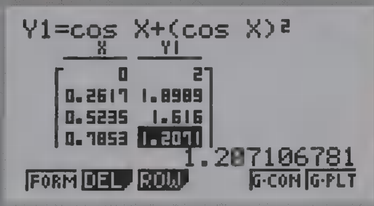
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

• $\mathscr{C} : \begin{cases} -\pi \leqslant x \leqslant 2\pi \\ y = f(x) \; . \end{cases}$

Pour préciser le tracé de $\mathscr{C}$ remarquons que f s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$; de plus : $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, donc $\mathscr{C}$ admet une tangente de pente -1 au point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2} ; 0\right)$.







Penser à basculer la calculatrice en mode radian, si ce n'est déjà fait.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Rappels de cours

I- Vocabulaire

Définition

Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Notations

Une suite peut se noter comme une fonction.
Par exemple, on dit :
la suite $u : n \mapsto -\sqrt{n} + 2$ est définie sur $\mathbb{N}$.

• L'image d'un naturel n par la suite u, appelée aussi **terme d'indice n**, est notée u_n.

• La suite u est parfois notée (u_n) ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II- Propriétés

u est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Suite majorée, minorée, bornée

• Dire que u est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout naturel n, $u_n \leqslant M$.

• Dire que u est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que, pour tout naturel n, $m \leqslant u_n$.

• Dire que u est **bornée** signifie que u est à la fois majorée et minorée.

Sens de variation

• Dire que u est **croissante** signifie :
pour tout naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

• Dire que u est **décroissante** signifie :
pour tout naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

• Dire que u est **monotone** signifie que u est croissante ou que u est décroissante.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 185)

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n + 2 .$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 2 \text{ et } v_{n+1} = 3v_n + 2 .$$

Calculer u_2 et v_2.

2

(Corrigé p. 185)

Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite u est majorée, si elle est minorée.

1° $u : n \mapsto \cos n$.

2° $u : n \mapsto \sin n^3$.

3° $u : n \mapsto n^2$.

4° $u : n \mapsto -n^4$.

5° $u : n \mapsto \dfrac{1}{2^n}$.

3

(Corrigé p. 186)

1° Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et $u_{n+1} = u_n - 3$.

2° Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 et $v_{n+1} = v_n + (v_n)^4$.

Calculs de termes

4 ★ 5 min (Corrigé p. 186)

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 dans chacun des cas suivants.

1° (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 5 \times 10^n + 2$.

2° (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$.

3° (u_n) est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

5 ★ 5 min (Corrigé p. 187)

Calculer u_5 lorsque la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + (u_n)^2}}.$$

6 ★ 5 min (Corrigé p. 188)

1° Soit la suite $u : n \mapsto 3n - 7$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2° Soit la suite $v : n \mapsto 5^n$.
Exprimer v_{n+1}, puis v_{2n} en fonction de v_n.

7 ★ 5 min (Corrigé p. 188)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3}{(u_n)^2}.$$

Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

8 ★ 5 min (Corrigé p. 188)

Trouver le plus petit indice à partir duquel la suite (u_n) est définie.

1° $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

2° $u_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{2}}$.

3° $u_n = \sqrt{2n - 15}$.

4° $u_n = \dfrac{1}{3^n - 1}$.

5° $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$.

Représentation graphique

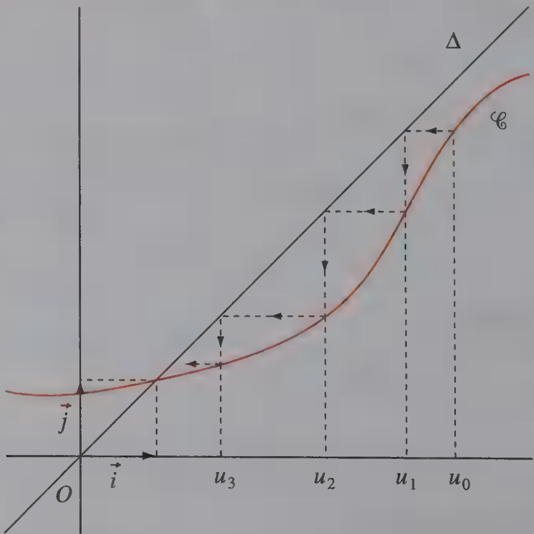
9 ★ 5 min (Corrigé p. 189)

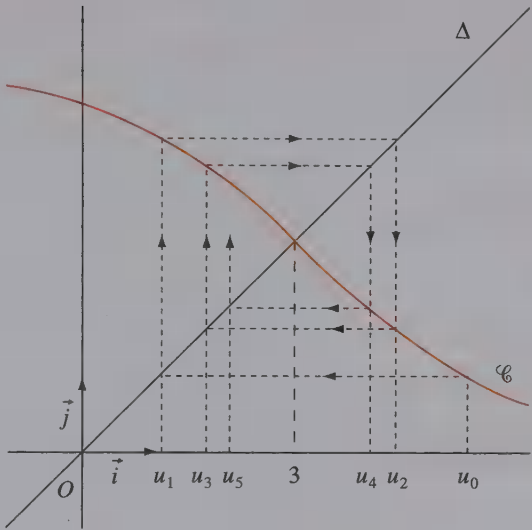
Dans chacun de deux cas suivants, on donne la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f ; Δ est la droite d'équation $y = x$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Quelles conjectures pouvez-vous établir sur le sens de variation, les bornes éventuelles de (u_n) ?

De quel nombre semble se rapprocher u_n quand n devient grand ?





10 ★ 5 min (Corrigé p. 189)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -5 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}.$$

Construire dans un même repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6+x}$.

Utiliser $\mathscr{C}$ et Δ pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Faire une conjecture sur le sens de variation de (u_n), ses bornes éventuelles.

De quel nombre semble se rapprocher u_n quand n devient grand ?

Sens de variation, majorant, minorant

11 ★ 15 min (Corrigé p. 190)

Étudier le sens de variation de la suite u proposée :

1° $n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$.   **2°** $n \mapsto (-5)^n$.

3° $n \mapsto \dfrac{3^n}{n+1}$.

4° $n \mapsto n^2 + n - 5$.

5° $u_0 = 4$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 0{,}71$.

12 ★ 5 min (Corrigé p. 191)

Soit u la suite $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$.

Quel est le plus petit naturel n tel que : $u_n \leqslant 10^{-3}$?

13 ★★ 10 min (Corrigé p. 192)

Les suites proposées sont-elles bornées ?

$$u : n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2, \quad v : n \mapsto (-1)^n, \quad w : n \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n+2}.$$

14 ★★ 10 min (Corrigé p. 192)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

Trouver un entier n_0 tel que :

$$\text{si } n \geqslant n_0, \text{ alors } u_n \geqslant 2.$$

CORRIGÉS des exercices

1 • Pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$u_n = 3n + 2,$$
donc :
$$u_2 = 3 \times 2 + 2 = \mathbf{8}.$$
• $v_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = 3v_n + 2,$$
donc : $v_1 = 3 \times v_0 + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8$,
et :
$$v_2 = 3 \times v_1 + 2 = 3 \times 8 + 2 = \mathbf{26}.$$

La suite (u_n) est définie de façon explicite, on peut calculer chacun de ses termes directement.
La suite (v_n) est définie de façon récurrente ; pour calculer un terme, il faut déjà connaître le terme d'indice précédent.

2 1° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \cos n,$$
or pour tout réel x :
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1,$$
donc pour tout entier naturel n :
$$-1 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
On a prouvé que **la suite u est minorée par – 1 et majorée par 1.**

La fonction sinus, comme la fonction cosinus, est bornée par – 1 et 1 sur $\mathbb{R}$.

2° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \sin n^3,$$
or pour tout réel x :
$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1,$$
donc pour tout entier naturel n :
$$-1 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
On a prouvé que **la suite u est minorée par – 1 et majorée par 1.**

3° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$u_n = n^2, \quad \text{donc} \quad u_n \geqslant 0.$$
En revanche, u_n peut être plus grand que n'importe quel réel A (si $A \geqslant 0$, il suffit de choisir n supérieur à $\sqrt{A}$).
La suite u est minorée par 0, mais n'est pas majorée.

La suite u est la restriction de la fonction carré à $\mathbb{N}$.

4° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$u_n = -n^4, \quad \text{donc} \quad u_n \leqslant 0.$$
En revanche, u_n peut être plus petit que n'importe quel réel A (si $A \leqslant -1$, il suffit de choisir n supérieur à $-A$).
La suite u est majorée par 0, mais n'est pas minorée.

5° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{2^n},$$

donc :

$$u_n > 0 \text{ et } u_n \leqslant \frac{1}{2^0},$$

d'où :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1 .$$

Cela prouve que **la suite u est minorée par 0 et majorée par 1.**

1 est un majorant de la suite u, donc tout nombre supérieur à 1 est aussi un majorant de u.
0 est un minorant de la suite u, donc tout nombre négatif est aussi un minorant de u.

1° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n - 3,$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n = -3,$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n < 0 .$$

On en déduit que **la suite (u_n) est strictement décroissante (sur $\mathbb{N}$).**

2° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = v_n + (v_n)^4,$$

donc :

$$v_{n+1} - v_n = (v_n)^4,$$

d'où :

$$v_{n+1} - v_n \geqslant 0 .$$

Cela prouve que **la suite (v_n) est croissante (sur $\mathbb{N}$).**

Dans ces deux cas, le sens de variation ne dépend pas du premier terme.

1° $u_n = 5 \times 10^n + 2$.

On a :

$$u_1 = 5 \times 10^1 + 2 = 50 + 2 = 52,$$

puis :

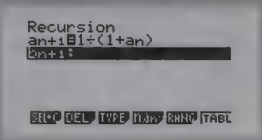
$$u_2 = 502, \quad u_3 = 5\,002, \quad u_4 = 50\,002 \quad \text{et} \quad u_5 = 500\,002 .$$

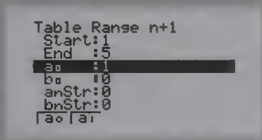
2° $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$.

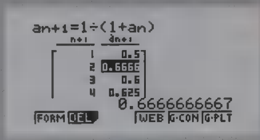
On obtient successivement :

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \qquad u_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \qquad u_3 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5},$$

$$u_4 = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{5}{8}, \qquad u_5 = \frac{1}{1 + \frac{5}{8}} = \frac{8}{13}.$$







3° u_n est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

On a : $u_1 = \frac{1}{1} = 1$,

$$u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$u_4 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12},$$

$$u_5 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}.$$

On peut noter que, pour tout naturel n non nul :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + (u_n)^2}}$.

On obtient de proche en proche :

$$u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{1 + u_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

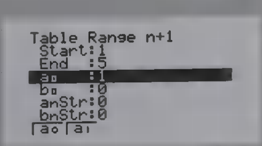
$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_1^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

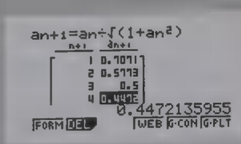
et de la même manière :

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad u_5 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Plus généralement, on peut établir que :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.





CHAPITRE 8

6 1° $u : n \mapsto 3n - 7$.

Pour tout naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 3(n+1) - 7 = 3n + 3 - 7$$
$$= 3n - 7 + 3,$$

donc :

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 3}.$$

$u_{n+1} = u_n + 3$ est une relation de récurrence.

2° $v : n \mapsto 5^n$.

Pour tout naturel n, on a :

$$v_{n+1} = 5^{n+1} = 5 \times 5^n,$$

donc :

$$v_{n+1} = 5v_n\ ;$$

de même :

$$v_{2n} = 5^{2n} = (5^n)^2,$$

d'où :

$$\boldsymbol{v_{2n} = (v_n)^2}.$$

7 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{(u_n)^2}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+2} = \frac{3}{(u_{n+1})^2} = \frac{3}{\dfrac{9}{(u_n)^4}} = \frac{3}{9} \times (u_n)^4,$$

donc :

$$\boldsymbol{u_{n+2} = \frac{1}{3}(u_n)^4}.$$

8 **1°** $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

u_n n'est défini que si $n \geqslant 1$.

On dit que la suite (u_n) est définie à partir de l'indice 1.

2° $u_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{2}}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n - \sqrt{2} \neq 0$, **par conséquent (u_n) est définie à partir de l'indice 0.**

3° $u_n = \sqrt{2n - 15}$.

Le naturel n vérifie $2n - 15 \geqslant 0$ si, et seulement si : $n \geqslant 7{,}5$; on en déduit que **(u_n) est définie à partir de l'indice 8.**

4° $u_n = \dfrac{1}{3^n - 1}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$3^n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = 0 ;$$

donc la suite (u_n) est définie à partir de l'indice 1 .

5° $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$.

Pour tout naturel n, $n^2 + n + 1 \neq 0$; **donc la suite (u_n) est définie pour tout naturel n .**

9 L'observation des graphiques nous invite à formuler les conjectures suivantes.

1^er^ graphique :

La suite (u_n) est décroissante donc majorée par son premier terme u_0 ; elle est minorée par 1, nombre duquel u_n « se rapproche » quand n devient grand.

2^e^ graphique :

La suite (u_n) est majorée par son premier terme u_0 et minorée par u_1 .

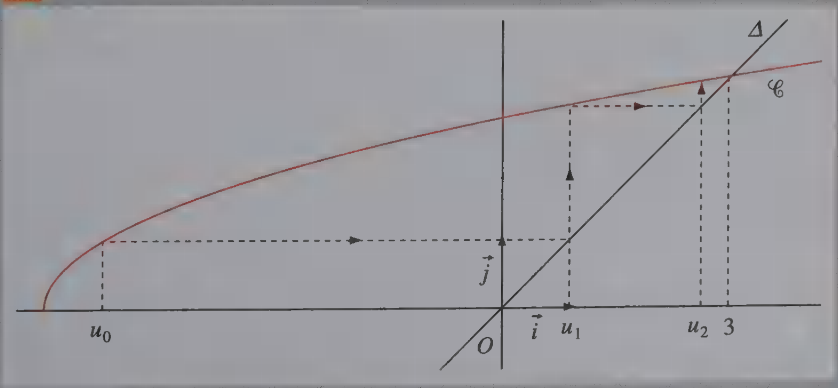
La suite n'est pas monotone ; plus précisément, les termes successifs de la suite sont alternativement supérieurs et inférieurs à 3, et la distance qui les en sépare ne cesse de diminuer (u_n est aussi proche que l'on veut de 3 pourvu que n soit suffisamment grand).

On peut encore affiner l'analyse en constatant que :

la suite (u_{2n}) des termes d'indice pair de (u_n) est décroissante,

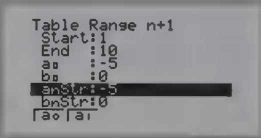
la suite (u_{2n+1}) des termes d'indice impair de (u_n) est croissante.

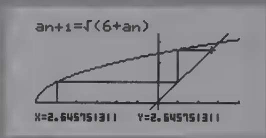
10



Il semble que la suite (u_n) soit croissante, donc minorée par son premier terme u_0 qui vaut -5.

De plus, il est raisonnable de penser qu'elle est majorée par 3, et que u_n ne cesse de se rapprocher de 3 quand n grandit ; plus précisément : u_n est aussi proche de 3 que l'on veut dès que n est suffisamment grand.





11 1° $n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$.

Pour tout naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 4(n+1)^2 - 5(n+1) - 1 - n^3 + 4n^2 - 5n + 1 ,$$

or :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 ,$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n = 3n^2 - 5n - 8 .$$

-1 est une racine du polynôme du second degré :

$$x \mapsto 3x^2 - 5x - 8 ;$$

son autre racine est donc $\frac{8}{3}$, d'où :

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1)\left(n - \frac{8}{3}\right)$$

$$= (n+1)(3n-8) ;$$

Autre façon de résoudre $3x^2 - 5x - 8 = 0$.
$\Delta = 25 + 96 = 121 = 11^2$;
les solutions de l'équation $3x^2 - 5x - 8 = 0$ sont : $\frac{5+11}{6}$ et $\frac{5-11}{6}$
c'est-à-dire : $\frac{8}{3}$ et -1 .

$u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de $3n - 8$, il vient :

- si $n \leqslant 2$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$,
- si $n \geqslant 3$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite u est strictement croissante à partir du rang 3.

2° $u : n \mapsto (-5)^n$.

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$, et, pour tout naturel n ,

- si n est pair, alors $u_n > 0$,
- si n est impair, alors $u_n < 0$.

***u* n'est donc pas monotone, même à partir d'un certain rang.**

3° $u : n \mapsto \dfrac{3^n}{n+1}$.

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs.
Pour tout naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = \frac{3(n+1)}{n+2} = \frac{3n+3}{n+2},$$

or :

$$\frac{3n+3}{n+2} > 1,$$

donc, pour tout naturel n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

soit : $u_{n+1} > u_n$ (car $u_n > 0$).
Cela prouve que u est strictement croissante.

Il peut être avantageux de calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de le comparer à 1 lorsque la suite u est à termes strictement positifs.
Cette méthode est exclue si la suite n'est pas à termes de signe constant.

4° $u : n \mapsto n^2 + n - 5$.
La suite u est définie sur $\mathbb{N}$.
D'autre part, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 5$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$, donc il en est de même de leur somme $x \mapsto x^2 + x - 5$.
Il en résulte que u est strictement croissante.

5° $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - 0{,}71$.
La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ et, pour tout naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = -0{,}71,$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Par conséquent, u est strictement décroissante.

12 $u : n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$.

u est définie sur $\mathbb{N}^*$.
Pour tout naturel n non nul :

$$u_n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leqslant 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geqslant 10^3 ;$$

or : $31^2 = 961$ et $32^2 = 1\,024$,
donc le plus petit naturel n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$ est 32.

CORRIGÉS

13 • $u : n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}} + 2$,

u est définie sur $\mathbb{N}^*$.
Pour tout naturel n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1,$$

donc : $2 < u_n \leqslant 3$.

On en déduit que la **suite u est bornée par 2 et 3.**

La valeur 3 est atteinte pour $n = 1$, et u_n est aussi proche de 2 que l'on veut (sans jamais l'atteindre), pourvu que n soit suffisamment grand.

• $v : n \mapsto (-1)^n$
v est définie sur $\mathbb{N}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ est impair, alors } v_n = -1, \\ \text{si } n \text{ est pair, alors } v_n = 1. \end{cases}$$

Donc la suite v est bornée par – 1 et 1.

• $w : n \mapsto \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$.

w est définie sur $\mathbb{N}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\sqrt{n}}{n+2} \geqslant 0,$$

c'est-à-dire : $w_n \geqslant 0$;
de plus : $\sqrt{n} \leqslant n + 2$,
donc : $w_n \leqslant 1$.

Donc la suite w est bornée par 0 et 1.

14 u_n : somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

Dans l'exercice 4, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n), et on a observé que, pour tout naturel n non nul :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0,$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante (sur $\mathbb{N}^*$).

De plus, on avait obtenu :

$$u_4 = \frac{25}{12}$$

et on a :

$$\frac{25}{12} \geqslant 2 .$$

On a : $u^3 = \dfrac{11}{6}$, donc : $u^3 < 2$;
par conséquent, 4 est le plus petit naturel n_0 tel que :
si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \geqslant 2$.

On peut donc affirmer :

si $n \geqslant 4$, alors $u_n \geqslant 2$.

SUITES ARITHMÉTIQUES SUITES GÉOMÉTRIQUES

Rappels de cours

I- Suites arithmétiques

Définition

Dire qu'une suite u est arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé la raison de la suite u_n .

Expression explicite de u_n

Si u est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = u_0 + nr$$

Somme de termes consécutifs

Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique u , alors :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

II- Suites géométriques

Définition

Dire qu'une suite u est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

q est appelé la raison de la suite u .

Expression explicite de u_n

Si u est une suite géométrique de raison non nulle q, alors pour tout naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Somme de termes consécutifs

Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1, alors :

$$S = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} \times (1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}$$

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1 (Corrigé p. 202)

Dans chacun des cas suivants, quel est le nombre de termes de la somme S ?

1° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

2° $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{17}$.

3° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, avec n entier naturel.

4° $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, avec n entier naturel non nul.

5° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n+1}$, avec n entier naturel.

6° $S = u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1}$, avec n entier naturel tel que : $n \geqslant 1$.

2 (Corrigé p. 202)

Une suite arithmétique u a pour raison 1,5 et pour premier terme u_0 avec :

$$u_0 = -4 .$$

Quels sont ses six premiers termes ?

3 (Corrigé p. 202)

n est un entier naturel non nul.
On pose : $S = 1 + 2 + \ldots + n$.
Que vaut la somme S ?

4 (Corrigé p. 202)

Une suite géométrique u a pour raison $-\dfrac{1}{2}$ et pour premier terme u_0 avec : $u_0 = 16$.

Quels sont ses huit premiers termes ?

5 (Corrigé p. 203)

n est un entier naturel.
On pose : $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$.
Que vaut la somme S ?

EXERCICES d'entraînement

Suites arithmétiques

Dans les quatre exercices suivants, u désigne une suite arithmétique de raison r.

6 ★ 5 min (Corrigé p. 203)

Sachant que $u_7 = 3\,000$ et $r = -50$, calculer le terme u_1.

7 ★ 5 min (Corrigé p. 203)

Sachant que $u_0 = 100$ et $u_{100} = 50$, calculer la raison r.

8 ★ 5 min (Corrigé p. 203)

Sachant que $u_0 = 1\,000$ et $r = 600$, calculer le terme u_5 et la somme S telle que :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_5 .$$

9 ★ 10 min (Corrigé p. 203)

u est une suite arithmétique telle que $u_{10} = 9$ et $u_{17} = 17{,}4$.

1° Calculer u_{21}.

2° Calculer la somme S telle que :

$$S = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{21} .$$

Suites géométriques

Dans les quatre exercices suivants, u désigne une suite géométrique de raison q.

10 ★ 5 min (Corrigé p. 204)

Sachant que $u_5 = 729$ et $q = -3$, calculer les termes u_{10} et u_0.

11 ★ 5 min (Corrigé p. 204)

Sachant que $u_0 = 1$ et $u_7 = 128$, calculer la raison q .

12 ★ 5 min (Corrigé p. 204)

u est une suite, de raison positive, telle que :

$$u_4 = 44 \text{ et } u_{10} = 352 .$$

Calculer u_{13} .

13 ★ 5 min (Corrigé p. 204)

Sachant que $u_0 = -2$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer le terme u_5 et la somme S telle que :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_5 .$$

Suites ni arithmétiques, ni géométriques et pourtant ...

14 ★★ 15 min (Corrigé p. 205)

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 ,$$

et soit la suite v telle que, pour tout naturel n :

$$v_n = u_n + 1 .$$

1° Prouver que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2° Démontrer que la suite v est géométrique.
En déduire les expressions de v_n puis de u_n en fonction du naturel n .

3° Déterminer, en fonction du naturel n , les sommes S et S' telles que :

$$S = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

et

$$S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_n .$$

EXERCICES

15 ★★ 15 min (Corrigé p. 205)

1° v est la suite : $n \mapsto (-2)^n$, w est la suite : $n \mapsto 3n - 5$.
Montrer que v est géométrique, puis que w est arithmétique.

2° u est la suite : $n \mapsto (-2)^n + 3n - 5$.
Calculer le réel S tel que :

$$S = u_2 + u_3 + \ldots + u_{10}.$$

Quelques problèmes concrets

16 ★★ 15 min (Corrigé p. 206)

1° On organise un tournoi individuel de tennis avec 128 participants. Sachant que chaque joueur ayant perdu une partie est éliminé, quel est le nombre de parties du 1er tour, du 2e tour, du 3e tour ?
Quel est le nombre total de parties à prévoir ?

2° Reprendre l'énoncé précédent en remplaçant les 128 participants par 2^n participants, où n est un naturel non nul.

17 ★★ 15 min (Corrigé p. 207)

Un jeu télévisé est organisé de la façon suivante : si le candidat donne une bonne réponse à la première question, il gagne 25 euros. Ensuite, chaque bonne réponse rapporte 15 euros de plus que la précédente. Le jeu s'arrête à la première réponse fausse.
Quel est le nombre minimal de bonnes réponses que doit donner un candidat pour que le total de ses gains s'élève au moins à 1 000 euros.

18 ★★ 15 min (Corrigé p. 208)

On place un capital de 100 000 euros à 7 % par an.

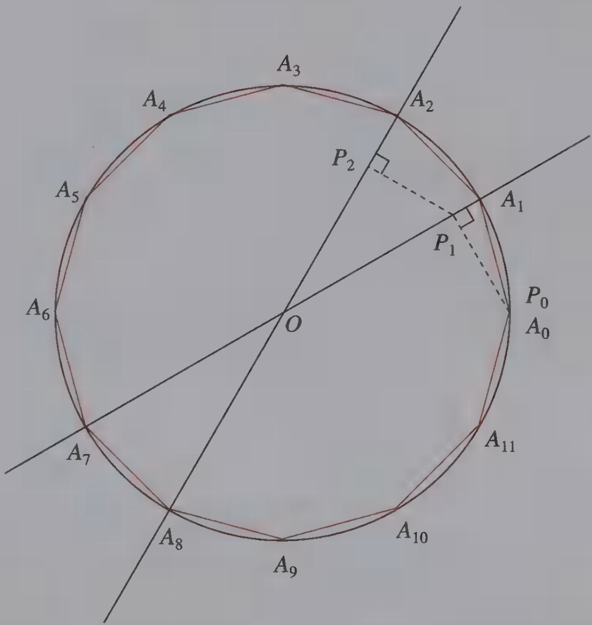
1° De combien dispose-t-on au bout de quatre ans ? au bout de dix ans ?

2° Combien d'années sont nécessaires pour voir le capital doubler ? pour voir le capital tripler ?

Un peu de géométrie

19 ★★★ 30 min (Corrigé p. 209)

• Les points A_0 , A_1 , ... , A_{11} de la figure ci-contre sont les douze sommets d'un dodécagone régulier de centre O .
• A_0 et O sont distants de 3 cm.
• $P_0 = A_0$.
• P_1 est le projeté orthogonal de P_0 sur la droite (OA_1) .
• P_2 est le projeté orthogonal de P_1 sur la droite (OA_2) , et ainsi de suite.



Calculer la longueur L , en cm, de la ligne brisée ainsi construite de P_0 à P_{10} .

CORRIGÉS des exercices

1 1° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.
S est la somme de **11 termes**.

2° $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{17}$.
S est la somme de **17 termes**.

3° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
S est la somme de $(n+1)$ **termes**.

4° $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
S est la somme de n **termes**.

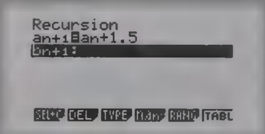
5° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n+1}$.
S est la somme de $(n+2)$ **termes**.

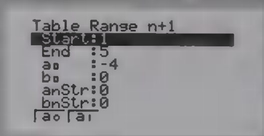
6° $S = u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1}$.
S est la somme de n **termes**.

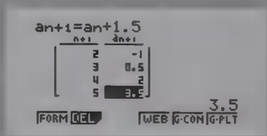
Plus généralement, p et n étant des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, $u_p + \ldots + u_n$ est la somme de $(n-p+1)$ termes.

2 Les six premiers termes de la suite u sont : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 avec :

$$u_0 = -4\ ;\ u_1 = -2{,}5\ ;\ u_2 = -1\ ;\ u_3 = 0{,}5\ ;\ u_4 = 2\ ;\ u_5 = 3{,}5\ .$$







3 $S = 1 + 2 + \ldots + n$.
S est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

On a donc :

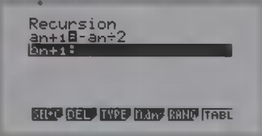
$$S = n \times \frac{(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

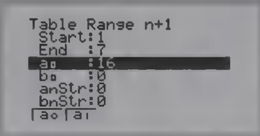
Le premier terme de S est 1, le dernier terme est n.

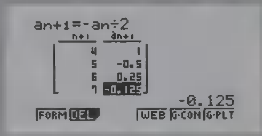
4 Les huits premiers termes de la suite u sont : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, avec :

$u_0 = 16$; $u_1 = -8$; $u_2 = 4$; $u_3 = -2$;

$u_4 = 1$; $u_5 = -\dfrac{1}{2}$; $u_6 = \dfrac{1}{4}$; $u_7 = -\dfrac{1}{8}$.







5 $S = 1 + 2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2^n$.

S est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Par conséquent :

$$S = 1 \times \frac{(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1},$$

donc : $\mathbf{S = 2^{n+1} - 1}$.

Le premier terme 1 s'écrit aussi 2^0.

6 $u_7 = 3\,000$ et $r = -50$.

On a : $u_7 = u_1 + 6r$,

d'où : $u_1 = u_7 - 6r = 3\,000 - 6 \times (-50)$,

donc : $\mathbf{u_1 = 3\,300}$.

7 $u_0 = 100$ et $u_{100} = 50$.

On a : $u_{100} = u_0 + 100r$,

donc : $r = \dfrac{u_{100} - u_0}{100} = \dfrac{50 - 100}{100}$,

d'où : $\mathbf{r = -0{,}5}$.

8 $u_0 = 1\,000$ et $r = 600$.

On a $u_5 = u_0 + 5r = 1\,000 + 5 \times 600$,

donc : $\mathbf{u_5 = 4\,000}$.

S est la somme des six premiers termes de la suite arithmétique u ;

donc : $S = \dfrac{6(u_0 + u_5)}{2} = \dfrac{6(1\,000 + 4\,000)}{2} = 3 \times 5\,000$,

d'où : $\mathbf{S = 15\,000}$.

9 1° • $u_{17} = u_{10} + 7r$, or : $u_{10} = 9$ et $u_{17} = 17{,}4$, donc : $r = \dfrac{8{,}4}{7} = \mathbf{1{,}2}$.

• $u_{21} = u_{17} + 4r = 17{,}4 + 4 \times 1{,}2 = 17{,}4 + 4{,}8$, donc : $\mathbf{u_{21} = 22{,}2}$.

2° $S = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{21}$; S est donc la somme des douze termes consécutifs de la suite arithmétique u, de u_{10} à u_{21}.

On en déduit :

$$S = 12 \times \frac{u_{10} + u_{21}}{2} = 6 \times (9 + 22{,}2) = \mathbf{187{,}2}.$$

10 $u_5 = 729$ et $q = -3$.

On a : $u_{10} = u_5 \times q^5 = 729 \times (-3)^5$,

donc : $\boldsymbol{u_{10} = -177\,147}$.

D'autre part : $u_5 = u_0 \times q^5 = u_0 \times (-3)^5$,

donc : $u_0 = \dfrac{u_5}{(-3)^5} = \dfrac{729}{-243}$,

d'où : $\boldsymbol{u_0 = -3}$.

11 $u_0 = 1$ et $u_7 = 128$.

On a : $u_7 = u_0 \times q^7$,

donc : $q^7 = \dfrac{u_7}{u_0} = 128$;

or : $2^7 = 128$,

donc : $\boldsymbol{q = 2}$.

```
7×√128
128^(1÷7)
```

12 $u_4 = 44$ et $u_{10} = 352$;

Soit q la raison de la suite géométrique u ;

On a : $u_{10} = u_4 q^6$,

donc : $q^6 = \dfrac{u_{10}}{u_4} = \dfrac{352}{44} = 8$.

D'autre part : $u_{13} = u_{10} q^3 = 352 q^3$.

On a : $q^6 = 8$, soit : $(q^3)^2 = 8$; de plus : $q \geqslant 0$, donc : $q^3 \geqslant 0$.

On en déduit : $q^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Finalement : $\boldsymbol{u_{13}} = 352 \times 2\sqrt{2} = \boldsymbol{704\sqrt{2}}$.

13 $u_0 = -2$ et $q = \dfrac{1}{2}$.

On a : $u_5 = u_0 \times q^5 = (-2) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = -\dfrac{1}{2^4} = -\boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$.

$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$; donc S est la somme des six premiers termes de la suite u. On en déduit :

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^6}{1 - q} = (-2) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}},$$

donc $S = -4 \times \left[1 - \dfrac{1}{64}\right] = -4 \times \dfrac{63}{64}$, d'où $\boldsymbol{S = -\dfrac{63}{16}}$.

14 Les suites u et v sont définies sur $\mathbb{N}$.

1° $u_0 = 1$,
$u_1 = 2u_0 + 1 = 3$,
$u_2 = 2u_1 + 1 = 7$;

- $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$,

donc [redacted] **n'est pas une suite arithmétique.**

- $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$,

donc u **n'est pas une suite géométrique.**

L'égalité $u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ ne permettrait pas d'affirmer que la suite u est arithmétique. De même, l'égalité $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_1}{u_0}$ ne permettrait pas d'affirmer que la suite u est géométrique.

2° • Pour tout naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1),$$

soit $\quad v_{n+1} = 2v_n$;

donc v **est une suite géométrique ;**

sa raison est 2, son premier terme v_0 est tel que : $v_0 = u_0 + 1 = 2$.

• Pour tout naturel n :

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n = \mathbf{2^{n+1}},$$
$$u_n = v_n - 1 = \mathbf{2^{n+1} - 1}.$$

3° S est la somme de $n + 1$ termes consécutifs de la suite géométrique v de raison 2, et dont le premier terme est v_0,

donc : $\quad S = \dfrac{v_0(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = \dfrac{2(1 - 2^{n+1})}{-1}$,

d'où : $\quad \mathbf{S = 2(2^{n+1} - 1)}$.

D'autre part $\quad S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$,

$S' = v_0 - 1 + v_1 + \ldots + v_n + (n + 1) \times (-1)$,

$S' = 2(2^{n+1} - 1) - n - 1$,

donc : $\quad \mathbf{S' = 2^{n+2} - n - 3}$.

15 1° $v : n \mapsto (-2)^n$ et $w : n \mapsto 3n - 5$.

• Pour tout naturel n,

$$v_{n+1} = (-2)^{n+1} = (-2) \times (-2)^n,$$

donc : $\quad v_{n+1} = -2v_n$.

Cela prouve que v **est une suite géométrique.**

Sa raison est -2, son premier terme v_0 est égal à 1.

Bien savoir manipuler les exposants :
$(-2)^{n+1} = (-2)^n \times (-2)^1$
$= (-2)^n \times (-2)$
$= (-2) \times (-2)^n$.

• Pour tout naturel n :

$$w_{n+1} = 3(n + 1) - 5 = 3n + 3 - 5 = 3n - 5 + 3,$$

donc : $\quad w_{n+1} = w_n + 3$.

Cela prouve que w **est une suite arithmétique.**

Sa raison est 3, son premier terme w_0 est tel que : $w_0 = -5$.

CORRIGÉS

CHAPITRE 9

2° $u : n \mapsto (-2)^n + 3n - 5$.
u est la somme :

• de la suite géométrique v :
$$n \mapsto (-2)^n \text{, de raison } -2 \text{, avec } v_0 = 1 ,$$

• de la suite arithmétique w :
$$n \mapsto 3n - 5 \text{, de raison 3, avec } w_0 = -5 .$$

On en déduit :
$$S = V + W ,$$
où :
$$V = v_2 + v_3 + \dots + v_{10}$$
$$= v_2 \times \frac{1-(-2)^9}{1-(-2)} = 4 \times \frac{1+2^9}{3} = 684 ,$$
$$W = w_2 + w_3 + \dots + w_{10}$$
$$= 9 \times \frac{w_2 + w_{10}}{2} = \frac{9}{2} \times 26 = 117 .$$

On obtient donc : $S = 684 + 117$,
soit : $\mathbf{S = 801}$ **.**

16 1° Il y aura :
• 64 parties au 1er tour.
• 32 parties au 2e tour (pour 64 joueurs),
• 16 parties au 3e tour (pour 32 joueurs), et ainsi de suite jusqu'au 7e tour où les deux finalistes se rencontrent.
Or :
$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$$
donc, **le nombre total de parties à prévoir est 127.**

2° Il y aura $\frac{2^n}{2}$ parties, c'est-à-dire 2^{n-1} parties au 1er tour.

D'un tour au tour suivant, le nombre de parties est divisé par 2.

Le nombre total de parties est :
$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0 .$$

Il s'agit de calculer la somme S_n des n termes consécutifs de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 :
$$S_n = 1 \times \left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = 2^n - 1 .$$

Il faudra prévoir $2^n - 1$ parties.

Qui a été suffisamment astucieux pour s'apercevoir qu'il y a autant de parties à prévoir que de joueurs à éliminer, c'est-à-dire $2^n - 1$?

17 Pour tout naturel n non nul, appelons u_n le gain, en euros, touché pour la $n^{\text{ième}}$ réponse juste.

La suite $u : n \mapsto u_n$ (définie sur $\mathbb{N}^*$), est la suite arithmétique de raison 15 et de premier terme u_1 tel que : $u_1 = 25$.

Pour tout naturel n non nul, le gain S_n en euros touché pour n réponses justes est la somme des n premiers termes consécutifs de la suite u, donc :

$$S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2},$$

avec :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times 15 .$$

Il vient :

$$S_n = n \times \frac{25 + 25 + (n-1) \times 15}{2} = \frac{n}{2}(15n + 35) .$$

Déterminons le plus petit naturel n tel que :

$$\frac{n}{2}(15n + 35) \geqslant 1\,000 ,$$

c'est-à-dire tel que :

$$3n^2 + 7n - 400 \geqslant 0 .$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré :

$$3x^2 + 7x - 400 = 0 \quad (E) .$$

Soit Δ son discriminant :

$\Delta = 4\,849$, les solutions de (E) sont donc les réels x' et x'' tels que :

$$x' = \frac{-7 - \sqrt{4\,849}}{6} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-7 + \sqrt{4\,849}}{6} .$$

x		x'		x''	
signe de $3x^2 + 7x - 400$	+	0	−	0	+

On a : $x' < 0$ et $10 < x'' < 11$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $3x^2 + 7x - 400 \geqslant 0$ est :

$$]-\infty ; x'] \cup [x'' ; +\infty[,$$

donc 11 est le plus petit naturel n tel que :

$$\frac{n}{2}(15n + 35) \geqslant 1\,000 .$$

Pour gagner au moins 1 000 euros, le candidat doit donner au moins 11 réponses consécutives exactes.

18 1° Notons u_n le capital en euros au bout de n années.
On a donc : $u_0 = 100\,000$,

$$u_1 = u_0 + \frac{7}{100}u_0 = 1{,}07u_0,$$

$$u_2 = u_1 + \frac{7}{100}u_1 = 1{,}07u_1,$$

et, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{7}{100}u_n,$$

soit :

$$u_{n+1} = 1{,}07u_n.$$

Cela prouve que la suite $n \mapsto u_n$, définie sur $\mathbb{N}$, est géométrique ; sa raison est 1,07 et son premier terme est 100 000.
On a donc, pour tout naturel n :

$$u_n = (1{,}07)^n \times u_0,$$

soit :

$$u_n = (1{,}07)^n \times 100\,000.$$

On en déduit :

$$u_4 = (1{,}07)^4 \times 100\,000 = 131\,079{,}601$$

et :

$$u_{10} = (1{,}07)^{10} \times 100\,000,$$

d'où :

$$u_{10} \approx 196\,715{,}1357 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Finalement le capital, au centième près, est de 131 079,60 euros au bout de quatre ans, et de 196 715, 14 euros au bout de 10 ans.

2° • Le capital aura doublé au bout de la $n^{\text{ième}}$ année dès que l'on aura :

$$\frac{u_n}{u_0} \geqslant 2,$$

c'est-à-dire :

$$(1{,}07)^n \geqslant 2.$$

La suite géométrique $n \mapsto (1{,}07)^n$ est croissante car : $1{,}07 > 1$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$(1{,}07)^{10} \approx 1{,}97 \text{ à } 10^{-2} \text{ près,}$$
$$(1{,}07)^{11} \approx 2{,}10 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Finalement, le capital doublera au cours de la 11ᵉ année.

• Suivons la même démarche.
Cherchons le plus petit naturel n tel que :

$$(1{,}07)^n \geqslant 3.$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$(1{,}07)^{16} \approx 2{,}95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près,}$$
$$(1{,}07)^{17} \approx 3{,}16 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Finalement, le capital triplera au cours de la 17ᵉ année.

19 Pour tout naturel n, les triangles OP_nP_{n+1} et $OP_{n+1}P_{n+2}$ sont rectangles et leurs angles de sommet O mesurent $\frac{\pi}{6}$ radians.

Les longueurs de leurs côtés sont donc deux à deux proportionnelles (triangles de même forme).

On obtient :

$$\frac{P_{n+1}P_{n+2}}{P_nP_{n+1}} = \frac{OP_{n+1}}{OP_n} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soit u la suite $n \mapsto P_nP_{n+1}$;
pour tout naturel n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

u est donc une suite géométrique ; sa raison est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et son premier terme est u_0 tel que :

$$u_0 = P_0P_1 = OP_0 \sin\frac{\pi}{6} = 3 \times \frac{1}{2}$$

soit : $$u_0 = \frac{3}{2}.$$

La longueur L, en cm, de la ligne brisée joignant P_0 à P_{10} est la somme des dix premiers termes de la suite u, donc :

$$L = u_0 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$L = \frac{3}{2} \times \frac{\frac{2^{10} - 3^5}{2^{10}}}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2^{10}} \times \frac{2^{10} - 3^5}{2 - \sqrt{3}},$$

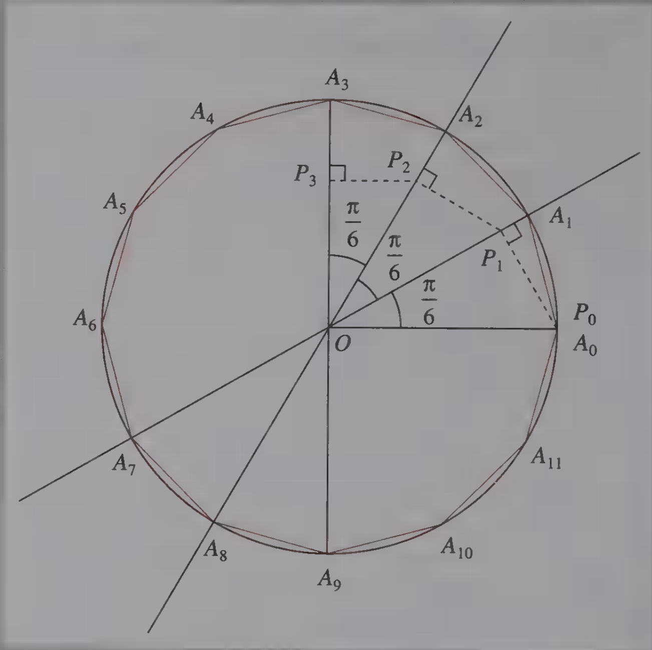
$$L = \frac{3}{2^{10}}\,(2^{10} - 3^5)\,(2 + \sqrt{3}).$$

$\sqrt{3}^{10}$ se simplifie en 3^5 en utilisant : $\sqrt{3}^{10} = (\sqrt{3}^2)^5 = 3^5$.

Une approximation de L à 10^{-1} près est 8,5.

CORRIGÉS

Finalement, $L = \dfrac{2\,343}{1\,024}\left(2 + \sqrt{3}\right)$.



CHAPITRE 10

LIMITE D'UNE SUITE

Rappels de cours

I- Convergence d'une suite

Dire qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; on note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell .$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

II- Suites de référence convergeant vers 0

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$, … sont des suites de limite 0.

Les suites géométriques de raison strictement comprise entre – 1 et 1 sont des suites de limite 0.

III- Suites de référence divergeant vers + ∞

Les suites $(\sqrt{n})$, (n), (n^2), (n^3), … sont des suites de limite $+\infty$.
Les suites géométriques (q^n), avec q un réel strictement supérieur à 1, sont des suites de limite $+\infty$.

IV- Opérations et limites

(u_n), (v_n), (w_n) sont des suites réelles ; ℓ et ℓ' sont des réels.

Somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$\pm\infty$
alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

V- Théorèmes de comparaison

(u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites ; ℓ est un réel.

- Si, à partir d'un certain rang : $u_n \geqslant v_n$,
et si : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- Si, à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$,
et si : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

- Si, à partir d'un certain rang : $|u_n - \ell| \leqslant v_n$,
et si : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

- **Théorème des gendarmes**

Si, à partir d'un certain rang : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,
et si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ,
alors (u_n) converge et : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

EXERCICES de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 217)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et admet pour limite 2.
Que sait-on du nombre d'indices n tels que :

1° u_n appartient à $]1{,}99 ; 2{,}01[$? **2°** u_n appartient à $[2{,}01 ; +\infty[$?

2

(Corrigé p. 217)

Compléter.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-5 \times 2^n) = \dots ;$ $\lim\limits_{n \to +\infty} [7 \times (\sqrt{2})^n] = \dots ;$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-94 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] = \dots ;$ $\lim\limits_{n \to +\infty} [2\,005 \times (-0{,}1)^n] = \dots .$

3

(Corrigé p. 217)

Parmi ces suites, lesquelles ont pour limite $+\infty$? lesquelles ont pour limite 0 ?

$n \mapsto n^3,$ $n \mapsto \left(\dfrac{1}{4}\right)^n,$ $n \mapsto \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n,$ $n \mapsto \dfrac{6}{5^n},$

$n \mapsto 10n^2,$ $n \mapsto \dfrac{7}{n^4},$ $n \mapsto 9^n,$ $n \mapsto \sqrt{n}.$

4

(Corrigé p. 218)

(u_n) est une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$, de limite -1.
Que sait-on du nombre d'indices n tels que u_n appartient à $]-1 ; 0[$?

5

(Corrigé p. 218)

Les suites (u_n) et (v_n) vérifient : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant v_n$.
Que peut-on en déduire concernant (u_n) si :

1° (v_n) converge vers 3 ? **2°** (v_n) a pour limite $-\infty$?

EXERCICES d'entraînement

Suites définies de façon explicite

6 ★ — 10 min (Corrigé p. 218)

À l'aide des opérations sur les limites, déterminer la limite de la suite u proposée.

1° $u : n \mapsto -2 + \sqrt{n}$.

2° $u : n \mapsto \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$.

3° $u : n \mapsto -5n^2 - n$.

4° $u : n \mapsto 3^n + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5° $u : n \mapsto \dfrac{(-0{,}5)^n}{7^n + 6}$.

6° $u : n \mapsto \dfrac{n^3}{(0{,}7)^n}$.

7 ★★ — 20 min (Corrigé p. 219)

En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer la limite de la suite u proposée.

1° $n \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n}$.

2° $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}\sin n$.

3° $n \mapsto \sqrt{n^4 + 3}$.

4° $n \mapsto \sqrt{4n^2 + 1} - n$.

5° $n \mapsto 2n + \cos n^2$.

6° $n \mapsto \dfrac{-n^5}{n^2 - \pi}$.

8 ★★ — 20 min (Corrigé p. 221)

En utilisant dans chaque cas l'indication proposée, déterminer la limite des suites u, v, w.

1° $u : n \mapsto -5n^2 - 17n + 12$; mettre n^2 en facteur dans l'expression de u_n.

2° $v : n \mapsto \dfrac{19^n + 2}{5^n - 17}$; comparer v_n et $\left(\dfrac{19}{5}\right)^n$.

3° $w : n \mapsto n\left|\dfrac{\cos n\pi}{3}\right|$; montrer que la suite $t : n \mapsto \cos\dfrac{n\pi}{3}$ ne prend que quatre valeurs.

9 ★★ 15 min

(Corrigé p. 223)

u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n.$$

1° Calculer les onze premiers termes de la suite u.
Quelle conjecture est-on incité à formuler ?

2° Démontrer que u a pour limite $+\infty$.

10 ★★ 15 min

(Corrigé p. 224)

u est la suite :

$$n \mapsto \sqrt{n^2 + 4n} - n.$$

1° Donner les approximations décimales, obtenues à l'affichage d'une calculatrice, des réels u_1, u_2, u_3, u_4 puis $u_{10^{2p}}$ pour les naturels p tels que :

$$1 \leqslant p \leqslant 8.$$

Quelle semble être la limite de u ?

2° a. Pour tout naturel n, calculer $u_n - 2$.
En déduire que la suite u converge vers un réel à préciser.

b. Interpréter les résultats de la première question.

11 ★★ 20 min

(Corrigé p. 225)

Soit u la suite :

$$n \mapsto \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}.$$

1° Montrer que u est minorée par 1.

2° Montrer que u est décroissante et a pour limite 1.

3° Déterminer le rang à partir duquel :

$$u_n < 1{,}000\,1.$$

Suites définies de façon récurrente

12 ★★ 20 min

(Corrigé p. 226)

u est la suite définie par $u_0 = -2$ et, pour tout naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}3u_n + 2{,}1 .$$

1° Programmer u et donner l'approximation décimale, obtenue à l'affichage d'une calculatrice, des termes successifs de la suite u de u_{12} à u_{20}.
Quelle semble être la limite de u ?

2° v est la suite telle que, pour tout naturel n, $v_n = u_n - 3$.

a. Démontrer que v est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction du naturel n.

b. Démontrer la conjecture formulée à la première question.

13 ★★★ 25 min

(Corrigé p. 227)

u est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} .$$

On admettra que u est définie sur $\mathbb{N}$.

1° Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points de la droite $(O ; \vec{i})$ d'abscisses u_0, u_1, u_2, u_3.
Quelle semble être la limite de u ?

2° a. Montrer que, pour tout naturel n non nul :

$$u_n - 2 = \frac{2 - u_{n-1}}{\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2},$$

puis que :

$$|u_n - 2| \leqslant \frac{|u_{n-1} - 2|}{2}.$$

b. En déduire que, pour tout naturel n :

$$|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

3° Quelle conclusion peut-on établir sur la limite de u ?

CORRIGÉS des exercices

1 La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et admet pour limite 2, donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, donc, en particulier, il existe un rang N_0 à partir duquel tous les u_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99 ; 2{,}01[$, ce qui implique :

1° Il existe une infinité d'indices n tels que u_n appartient à :

$$]1{,}99 ; 2{,}01[;$$

2° à partir du rang N_0, aucun u_n n'appartient à l'intervalle $[2{,}01 ; +\infty[$, d'où :

il n'existe qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'indices n tels que u_n appartient à $[2{,}01 ; +\infty[$.

Seuls $u_0, \ldots, u_{N_0-1}$ peuvent appartenir à $[2{,}01 ; +\infty[$, ce qui correspond au plus à N_0 indices.

2 • $\lim\limits_{n \to +\infty} (-5 \times 2^n) = -\infty$, car la suite géométrique $n \mapsto 2^n$, de raison 2 strictement supérieure à 1, a pour limite $+\infty$.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} [7 \times (\sqrt{2})^n] = +\infty$, en effet, la suite géométrique $n \mapsto (\sqrt{2})^n$, de raison $\sqrt{2}$ strictement supérieure à 1, a pour limite $+\infty$, et il en est de même pour la suite $n \mapsto 7 \times (\sqrt{2})^n$.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-94 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0$, car toute suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 converge vers 0.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} [2\,005 \times (-0{,}1)^n] = 0$, car toute suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 converge vers 0.

Une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1
• diverge vers $+\infty$ si son premier terme est positif,
• diverge vers $-\infty$ si son premier terme est négatif.

3 Les suites $n \mapsto n^3$, $n \mapsto 10n^2$, $n \mapsto 9^n$ et $n \mapsto \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.

Les suites $n \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $n \mapsto \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$, $n \mapsto \frac{6}{5^n}$ et $n \mapsto \frac{7}{n^4}$ ont pour limite 0.

4 (u_n) est une suite croissante, définie sur $\mathbb{N}$, de limite -1, donc :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \leqslant -1,$$

ce qui prouve qu'**il n'existe aucun indice n tel que u_n appartienne à $]-1\,;0[$.**

5 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant v_n \quad (1)$.

1° Supposons que la suite (v_n) admette pour limite 3.

• De : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(v_n - \dfrac{1}{n}\right) = 3$;

• D'après (1), la suite (u_n) est donc encadrée (sur $\mathbb{N}^*$) par deux suites convergentes de limite 3 ; le théorème des gendarmes permet de conclure :

(u_n) est convergente, de limite 3.

2° Supposons que la suite (v_n) admette pour limite $-\infty$.
D'après (1) :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant v_n,$$

donc la suite (u_n) est majorée (sur $\mathbb{N}^*$) par une suite de limite $-\infty$, ce qui implique (théorème de comparaison) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty .$$

6 1° $u : n \mapsto -2 + \sqrt{n}$.
u est définie sur $\mathbb{N}$; u est la somme de la suite constante $n \mapsto -2$ et de la suite de référence $n \mapsto \sqrt{n}$ qui diverge vers $+\infty$, donc :

$$\lim u = +\infty .$$

2° $u : n \mapsto \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$.
u est définie seulement sur $\mathbb{N}^*$.
On sait : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.
L'inverse d'une suite de limite $+\infty$ étant une suite de limite nulle, on obtient :

$$\lim u = 0 .$$

3° $u : n \mapsto -5n^2 - n$.
u est définie sur $\mathbb{N}$.
On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-5n^2) = -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$, donc : **$\lim u = -\infty$** (la somme de deux suites de limite $-\infty$ a pour limite $-\infty$).

4° $u : n \mapsto 3^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

u est définie sur $\mathbb{N}$.

Comme on a : $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, la suite géométrique $n \mapsto \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ a pour limite 0 ;

d'autre part : $3 > 1$, donc la suite géométrique $n \mapsto 3^n$ a pour limite $+\infty$.

On peut conclure : $\mathbf{\lim u = +\infty}$.

5° $u : n \mapsto \frac{(-0{,}5)^n}{7^n + 6}$.

u est définie sur $\mathbb{N}$.

$-1 < -0{,}5 < 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}5)^n = 0$;

$7 > 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 7^n = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (7^n + 6) = +\infty$;

de plus, on sait que le quotient d'une suite de limite 0 par une suite de limite $+\infty$ est une suite de limite 0.

On obtient donc finalement : $\mathbf{\lim u = 0}$.

6° $u : n \mapsto \frac{n^3}{(0{,}7)^n}$.

u est définie sur $\mathbb{N}$.

On sait : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$;

d'autre part, comme : $0 < 0{,}7 < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}7)^n = 0$.

La suite u est donc le quotient d'une suite de limite $+\infty$ par une suite de limite 0. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'on a :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ (0{,}7)^n > 0.$$

On peut alors affirmer : $\mathbf{\lim u = +\infty}$.

7 **1°** $n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$.

u est définie seulement sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout naturel n non nul, on a :

$$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

et on sait :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \quad \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

> Les inégalités $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ peuvent se résumer par : $|u_n| \leqslant \frac{1}{n}$;
> u est donc majorée en valeur absolue par une suite de limite nulle, ce qui permet également d'affirmer que la limite de u est 0.

CORRIGÉS

La suite u est donc encadrée par deux suites de limite nulle ; d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure :

$$\mathbf{\lim u = 0}\,.$$

2° $u : n \mapsto \dfrac{1}{n^2} \sin n$.

u est définie seulement sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1\,,$$

et si de plus $n \neq 0$:

$$-\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \sin n \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Il vient :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

$n \mapsto -\dfrac{1}{n^2}$ et $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$ étant des suites de référence de limite nulle, on obtient grâce au théorème des gendarmes :

$$\mathbf{\lim u = 0}\,.$$

3° $u : n \mapsto \sqrt{n^4 + 3}$.

u est définie sur $\mathbb{N}$ et, pour tout naturel n, on a :

$$n^4 + 3 \geqslant n^4\,,$$

donc :

$$\sqrt{n^4 + 3} \geqslant \sqrt{n^4}\,,$$

d'où :

$$u_n \geqslant n^2\,.$$

De plus, on sait : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

La suite u est minorée par une suite de limite $+\infty$, donc :

u diverge vers $+\infty$.

4° $u : n \mapsto \sqrt{4n^2 + 1} - n$.

u est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout naturel n, on a :

$$4n^2 + 1 \geqslant 4n^2\,,$$

donc : $\sqrt{4n^2 + 1} \geqslant 2n$,

donc : $\sqrt{4n^2 + 1} - n \geqslant 2n - n$.

Il vient : pour tout naturel n, $u_n \geqslant n$,

donc :

$$\mathbf{\lim u = +\infty}\,.$$

Avant tout calcul, il est indispensable de s'apercevoir du « conflit » entre $\sqrt{4n^2+1}$ et n, qui tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, puis de comprendre que le « vainqueur ne peut être que $\sqrt{4n^2+1}$ » (car très « proche de $2n$ »).

5° $u : n \mapsto 2n + \cos n^2$.

u est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant \cos n^2 \leqslant 1,$$

donc :

$$2n - 1 \leqslant 2n + \cos n^2 \leqslant 2n + 1,$$

c'est-à-dire :

$$2n - 1 \leqslant u_n \leqslant 2n + 1.$$

Remarquons que la suite $n \mapsto 2n - 1$ a pour limite $+\infty$; il suffit alors d'écrire :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n - 1$

pour pouvoir conclure : **lim $u = +\infty$.**

Pour tout réel x :
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

u est donc la somme :
- d'une suite de limite $+\infty$
- et d'une suite bornée.

6° $n \mapsto \dfrac{-n^5}{n^2 - \pi}$.

u est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$n^2 - \pi \leqslant n^2 ;$$

si de plus $n \geqslant 2$, $n^2 - \pi$ et n^2 sont strictements positifs, et on peut écrire :

$$\frac{1}{n^2 - \pi} \geqslant \frac{1}{n^2} > 0.$$

d'où :

$$\frac{-n^5}{n^2 - \pi} \leqslant -\frac{n^5}{n^2}.$$

Il vient : pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n \leqslant -n^3$.

Comme la suite $n \mapsto -n^3$ diverge vers $-\infty$, on obtient :

$$\textbf{lim } u = -\infty.$$

8 1° $u : n \mapsto -5n^2 - 17n + 12$.

u est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout naturel n non nul, on a :

$$u_n = n^2\left(-5 - \frac{17}{n} + \frac{12}{n^2}\right).$$

Or on sait : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\dfrac{17}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{12}{n^2}\right) = 0$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(-5 - \dfrac{17}{n} + \dfrac{12}{n^2}\right) = -5$;

CORRIGÉS

de plus : $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

On peut alors conclure : **$\lim u = -\infty$.**

2° $v : n \mapsto \dfrac{19^n + 2}{5^n - 17}$.

v est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout naturel n, on a :

$$19^n + 2 \geqslant 19^n \quad \text{et} \quad 5^n - 17 \leqslant 5^n ;$$

si de plus : $n \geqslant 2$:

$$5^n - 17 > 0,$$

donc :

$$\frac{1}{5^n - 17} \geqslant \frac{1}{5^n}.$$

Des réels strictement positifs sont rangés dans le sens contraire de leurs inverses.

On obtient les inégalités suivantes, valables pour tout naturel n tel que $n \geqslant 2$:

$$19^n + 2 \geqslant 19^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{5^n - 17} \geqslant \frac{1}{5^n}.$$

Comme elles portent sur des réels tous strictement positifs, il vient :

$$\text{pour tout entier } n \text{ tel que } n \geqslant 2, \ \frac{19^n + 2}{5^n - 17} \geqslant \frac{19^n}{5^n},$$

c'est-à-dire :

$$\text{pour tout entier } n \text{ tel que } n \geqslant 2, \ u_n \geqslant \left(\frac{19}{5}\right)^n.$$

Or : $\dfrac{19}{5} > 1$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{19}{5}\right)^n = +\infty.$$

On a établi que u est minorée par une suite de limite $+\infty$, ce qui prouve :

$$\mathbf{\lim u = +\infty .}$$

3° $w : n \mapsto n\left|\dfrac{\cos n\pi}{3}\right|$; $\qquad t : n \mapsto \cos\dfrac{n\pi}{3}$.

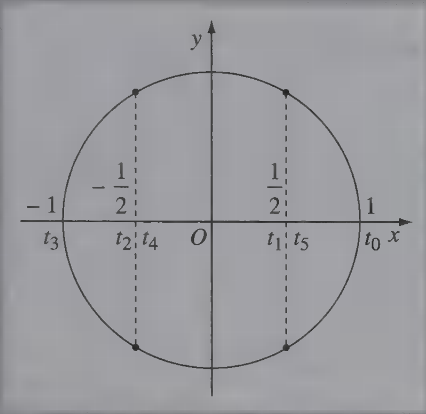
w et t sont définies sur $\mathbb{N}$.

On obtient facilement :

$t_0 = 1 = t_6$; $\qquad t_1 = \dfrac{1}{2} = t_7$; $\qquad t_2 = -\dfrac{1}{2}$;

$t_3 = -1$; $\qquad t_4 = -\dfrac{1}{2}$; $\qquad t_5 = \dfrac{1}{2}$.

La suite t est périodique, de période 6.



Pour tout naturel n :

$$t_{n+6} = \cos \frac{(n+6)\pi}{3} = \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos \frac{n\pi}{3}$$

En effet, pour tout naturel n :

$$t_{n+6} = t_n .$$

Les seules valeurs que prend t sont 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et – 1.

Pour tout naturel n :

$$\left|\cos \frac{n\pi}{3}\right| = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \left|\cos \frac{n\pi}{3}\right| = 1 ,$$

donc : $n\left|\cos \frac{n\pi}{3}\right| \geqslant \frac{1}{2} \times n$.

Pour tout naturel n, $\left|\cos \frac{n\pi}{3}\right| \geqslant \frac{1}{2}$.

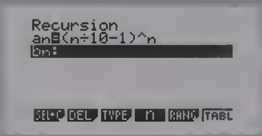
Il vient : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{n}{2}$, et on sait : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$.

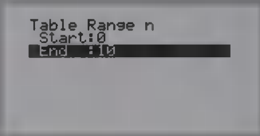
Cela prouve : **$\lim u = +\infty$.**

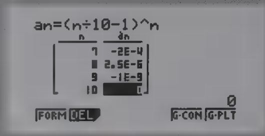
9 $u : n \mapsto \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$.

1°

n	u_n
0	1
1	– 0,9
2	0,64
3	– 0,343
4	0,129 6
5	– 0,031 25
6	0,004 096
7	– 0,000 218 7
8	0,000 002 56
9	– 0,000 000 001
10	0







Il semble que la limite de u soit 0.

2° Pour tout naturel n tel que $n \geqslant 30$:

$$\frac{n}{10} - 1 \geqslant 2 ,$$

donc, à partir du rang 30 :

$$u_n \geqslant 2^n$$

ce qui prouve :

$$\lim u = + \infty .$$

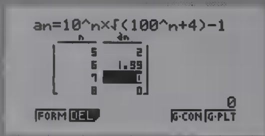
Le calcul des premiers termes d'une suite est souvent un outil précieux pour se « familiariser » avec son comportement ; il peut aussi inciter à formuler une conjecture fausse !

10 $u : n \mapsto \sqrt{n^2 + 4n} - n$.

Pour obtenir les termes de u d'indice 10^2, 10^4, …, 10^{16}, on peut programmer la suite (a_n) définie par :

$$a_n = 10^n \sqrt{100^n + 4} - 100^n ;$$

a_n est alors le terme d'indice 10^{2n} de u .
(À l'écran, l'expression de a_n est tronquée.)



1° Avec une calculatrice scientifique, on obtient les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous.

n	u_n
1	1,236 0
2	1,464 1
3	1,582 5
4	1,656 8
10	1,832 1
10^2	1,980 3
10^4	1,999 8
10^6	1,999 9
10^8	2
10^{10}	2
10^{12}	1,99
10^{14}	0
10^{16}	0

On constate qu'à partir de l'indice 12, l'affichage se stabilise sur 0.
La limite de u semble être 0.

2° a. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$, et, pour tout naturel n :

$$u_n - 2 = \sqrt{n^2+4n} - (n+2),$$

or :

$$\sqrt{n^2+4n} + n + 2 \neq 0,$$

donc : $$u_n - 2 = \frac{(\sqrt{n^2+4n})^2 - (n+2)^2}{\sqrt{n^2+4n}+n+2}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{n^2+4n}+n+2},$$

d'où, si, de plus, $n \neq 0$: $|u_n - 2| \leqslant \frac{4}{n}$.

Or la suite $n \mapsto \frac{1}{n}$ est une suite de référence de limite 0, donc la **suite u converge vers 2.**

Technique de « l'expression conjuguée ».

$\sqrt{n^2+4n}+n+2 \geqslant n > 0$,

donc : $\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}+n+2} \leqslant \frac{1}{n}$.

b. La calculatrice, pour les grandes valeurs du naturel n, néglige $4n$ devant n^2 : cela explique que l'affichage se stabilise sur 0 à partir, au moins, de l'indice 10^{12}.

En revanche, pour les valeurs « moyennes » de n (ici pour $10^2 \leqslant n \leqslant 10^6$), l'affichage permet de prévoir la limite de la suite u.

L'indice à partir duquel l'affichage se stabilise sur 0 varie avec les calculatrices : il dépend de leur « puissance de calcul ».

11 $u : n \mapsto \frac{5^n+2^n}{5^n-2^n}$.

1° • $5^0 - 2^0 = 0$ et, pour tout naturel n non nul,

$$5^n > 2^n,$$

donc :

$$5^n - 2^n > 0.$$

On en déduit que u est définie sur $\mathbb{N}^*$.

• Pour tout naturel n non nul,

$$0 < 5^n - 2^n < 5^n + 2^n,$$

donc :

$$\frac{5^n+2^n}{5^n-2^n} > 1.$$

donc :

$$u_n > 1.$$

Cela prouve que **u est minorée par 1.**

On a divisé chacun des membres de l'égalité :

$5^n - 2^n < 5^n + 2^n$

par le réel strictement positif :

$5^n - 2^n$.

CORRIGÉS

2° • Pour tout naturel n non nul,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5^{n+1} + 2^{n+1}}{5^{n+1} - 2^{n+1}} - \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n},$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(5^{n+1} + 2^{n+1})(5^n - 2^n) - (5^n + 2^n)(5^{n+1} - 2^{n+1})}{(5^{n+1} - 2^{n+1})(5^n - 2^n)},$$

or,

$$(5^{n+1} + 2^{n+1})(5^n - 2^n) = 5^{2n+1} - 5^{n+1}2^n + 2^{n+1}5^n - 2^{2n+1},$$

$$(5^n + 2^n)(5^{n+1} - 2^{n+1}) = 5^{2n+1} - 5^n 2^{n+1} + 2^n 5^{n+1} - 2^{2n+1},$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^n 5^n(-5 + 2 + 2 - 5)}{(5^{n+1} - 2^{n+1})(5^n - 2^n)},$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-6 \times 10^n}{(5^{n+1} - 2^{n+1})(5^n - 2^n)}.$$

Donc, pour tout naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n < 0$.
On en déduit que u **est strictement décroissante sur** $\mathbb{N}^*$.

• Les suites $n \mapsto 5^n + 2^n$ et $n \mapsto 5^n - 2^n$ ont toutes deux pour limite $+\infty$. Nous ne sommes pas en mesure de conclure directement. Mettons le terme dominant 5^n en facteur au numérateur et au dénominateur.
Pour tout naturel non nul :

$$u_n = \frac{5^n\left(1 + \dfrac{2^n}{5^n}\right)}{5^n\left(1 - \dfrac{2^n}{5^n}\right)} = \frac{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}.$$

On a : $0 < \dfrac{2}{5} < 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$.

Par conséquent : $\lim u = 1$ **.**

3° Nous obtenons, à 10^{-5} près :

$$u_{10} \approx 1{,}000\,21 \text{ et } u_{11} \approx 1{,}000\,08.$$

Finalement, u est décroissante, $u_{10} > 1{,}000\,1$ et $u_{11} < 1{,}000\,1$,
donc **11 est le rang à partir duquel** $u_n < 1{,}000\,1$ **.**

12 $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 0{,}3u_n + 2{,}1$.

1° Les résultats obtenus avec une calculatrice sont consignés dans le tableau ci-après.

n	u_n
12	2,999 997 343
13	2,999 999 203
14	2,999 999 761
15	2,999 999 928
16	2,999 999 978
17	2,999 999 994
18	2,999 999 998
19	3
20	3

On remarque que l'affichage se stabilise sur 3.

Il semble que la limite de u soit 3 .

2° a. Pour tout naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,,$$
$$v_{n+1} = 0{,}3u_n + 2{,}1 - 3\,,$$
$$v_{n+1} = 0{,}3u_n - 0{,}9\,,$$
$$v_{n+1} = 0{,}3(u_n - 3)\,.$$

Finalement, **pour tout naturel n , $v_{n+1} = 0{,}3v_n$.**

v est donc une suite géométrique. Plus précisément, v est la suite géométrique de raison 0,3 telle que $v_0 = u_0 - 3$, soit $v_0 = -5$.

On en déduit que, **pour tout naturel n , $v_n = -5 \times (0{,}3)^n$.**

b. D'après **2° a.**, pour tout naturel n :

donc : $u_n = 3 - 5 \times (0{,}3)^n$.

Or : $0{,}3 < 1$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 \times (0{,}3)^n = 0$

On a ainsi établi : $\mathbf{\lim u = 3}$ **.**

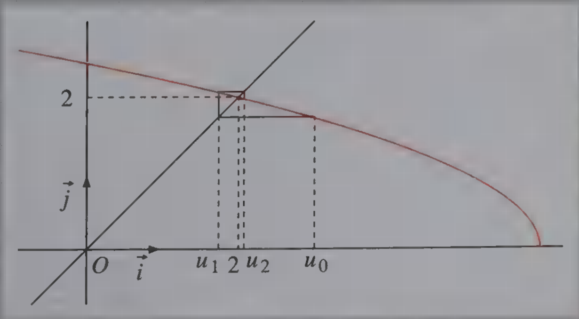
13 $u_0 = 3$ et, pour tout naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$.

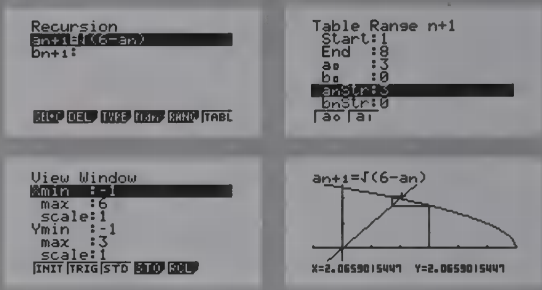
1° On trace la demi-parabole représentative de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{6 - x}$$

et la droite d'équation :

$$y = x\,.$$





La limite de u semble être 2.

2° a. • Pour tout naturel n non nul :

$$u_n - 2 = \sqrt{6 - u_{n-1}} - 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{6 - u_{n-1}} + 2 \neq 0\,,$$

donc :

$$u_n - 2 = \frac{(\sqrt{6 - u_{n-1}} - 2)(\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2)}{\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2}\,,$$

$$u_n - 2 = \frac{6 - u_{n-1} - 4}{\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2}\,,$$

d'où :

$$u_n - 2 = \frac{2 - u_{n-1}}{\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2}\,.$$

• On en déduit, pour tout naturel n non nul :

donc :
$$|u_n - 2| = \frac{|u_{n-1} - 2|}{\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2}\,,$$

or :
$$\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2 \geqslant 2\,,$$

donc :

$$\boldsymbol{|u_n - 2| \leqslant \frac{|u_{n-1} - 2|}{2}}\,.$$

b. D'après la question précédente, on obtient successivement :

$$|u_1 - 2| \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{2}$$

$$|u_2 - 2| \leqslant \frac{|u_1 - 2|}{2} \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{2^2}\,,$$

$$|u_3 - 2| \leqslant \frac{|u_2 - 2|}{2} \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{2^3}\,,$$

et, de proche en proche :

$$|u_n - 2| \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{2^n}$$

et cette inégalité est vérifiée si $n = 0$;
de plus, $u_0 = 3$, donc, **pour tout naturel** $\boldsymbol{n}$ **:**

$$|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

La suite $n \mapsto \frac{1}{2^n}$ étant une suite de référence de limite 0, cela prouve que u **converge vers 2.**

On peut démontrer que, quel que soit le choix du réel u_0, avec $u_0 \geqslant 6$, la suite u telle que, pour tout naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$ est définie sur $\mathbb{N}$ et converge vers 2 (qui est l'unique point fixe de la fonction $x \mapsto \sqrt{6 - x}$, c'est-à-dire la seule solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x \mapsto \sqrt{6 - x}$).

CORRIGÉS

Le coin des interros

ÉNONCÉS

Interro 1 | révision des ch. 1, 2. | 60 min

(Corrigé p. 235)

1 Parité, périodicité, maximum

Soit f la fonction : $x \mapsto 2\cos 6x$; démontrer que :

1° f est paire ;

2° $\dfrac{\pi}{3}$ est une période de f ;

3° le maximum de f est 5.

2 Sens de variation

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - x$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3 Minimum d'une fonction

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1}$.

Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, qui est atteint en un seul réel (préciser la valeur de ce minimum et en quel réel il est atteint).

Interro 2 | révision des ch. 2, 3. | 90 min

(Corrigé p. 237)

1 Fonctions associées

Soit f le polynôme du second degré : $x \mapsto x^2 + 6x + 7$.

1° a. Donner la forme canonique de f.

b. Du tableau de variation de la fonction $k : x \mapsto x^2$, déduire celui de f et préciser par quelle transformation géométrique on passe de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ à $\mathscr{C}_f$.

2° Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.

3° Préciser l'axe de symétrie et le sommet de $\mathscr{C}_f$.
Tracer $\mathscr{C}_f$.

4° On considère les fonctions :

$$g : x \mapsto |x^2 - 6x + 7| \quad \text{et} \quad h : x \mapsto x^2 - 6|x| + 7 .$$

Tracer $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sur deux nouveaux graphiques en expliquant leur construction.

2 Équations associées

1° Résoudre l'équation (E) :

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 .$$

2° En déduire l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :
(E_1) : $2x^2 + 5|x| - 3 = 0$.
(E_2) : $2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$.
(E_3) : $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$.
(E_4) : $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$.

Interro 3 | révision des ch. 4, 5, 6. | 60 min

(Corrigé p. 241)

1 Fonction dérivée

Justifier que, dans chacun des cas suivants, la fonction f proposée est dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer $f'(x)$, pour tout x réel.

1° $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 7\sqrt{2}$;

2° $f : x \mapsto (x^3 - 9x^2)(5x - 6)$;

3° $f : x \mapsto \dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}$.

4° $f : x \mapsto (8x + 7)^{2002}$.

2 Sens de variation

Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x - 2\sqrt{x}$.

3 Minimum

Déterminer le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x \sin x - \cos x$.

Interro 4 | révision des ch. 7, 8. | 90 min

(Corrigé p. 242)

1 Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1° Étudier les limites à gauche et à droite de f en 1.
Interpréter graphiquement ces résultats.

2° a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

3° a. Pourquoi f est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

b. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, déterminer $f'(x)$, puis étudier son signe.

c. Donner le sens de variation de f.

4° Dresser le tableau de variation de f.

5° Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

6° Tracer la courbe $\mathscr{C}$, ses asymptotes et ses tangentes horizontales.

2 Sens de variation d'une suite

u est la suite telle que $u_0 = 4$ et, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 .$$

Existe-t-il un naturel n tel que $u_n \geqslant 4{,}1$?

3 Majoration et minoration d'une suite

Minorer et majorer au mieux la suite $u : n \mapsto \dfrac{1}{n}$.

Interro 5 — révision des ch. 9, 10. — 90 min

(Corrigé p. 245)

1 Suite arithmétique

Soit u la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que :

$$u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8 \quad \text{et} \quad u_1 + u_{11} = -3 .$$

Déterminer sa raison r et son premier terme u_0 .

2 Suite géométrique

Soit u la suite géométrique de raison $-\dfrac{2}{3}$ et de premier terme u_0 tel que : $u_0 = 9$.

Calculer S , où $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{10}$.

3 Un problème concret

Pendant douze années consécutives, Monsieur Dupont place une somme de 10 000 euros le 1er janvier de chaque année au taux d'intérêt annuel de 6 %.
Monsieur Durand place une somme de 30 000 euros le 1er janvier des 1re, 4e, 7e et 10e années au même taux d'intérêt annuel de 6 %.
De combien dispose chacun au bout des douze années ?

4 Limite d'une suite

Étudier la limite éventuelle de la suite $u : n \mapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
(penser à « *l'expression conjuguée* »).

CORRIGÉS

Interro 1

(Énoncé p. 231)

1 La fonction $f : x \mapsto 3 - 2\cos 6x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1° Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3 - 2\cos(-6x) \\ &= 3 - 2\cos 6x \quad \text{(car la fonction cos est paire)} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

donc f **est une fonction paire.**

2° Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 3 - 2\cos\left[6\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3 - 2\cos(6x + 2\pi) \\ &= 3 - 2\cos(6x) \quad \text{(car la fonction cos est } 2\pi\text{-périodique)} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

donc f **est périodique de période $\frac{\pi}{3}$.**

3° • Pour tout réel X : $-1 \leqslant \cos X \leqslant 1$, donc, pour tout réel x :

$$-1 \leqslant \cos 6x \leqslant 1,$$

donc : $$-2 \leqslant -2\cos 6x \leqslant 2,$$

donc : $$1 \leqslant 3 - 2\cos 6x \leqslant 5,$$

donc : $$f(x) \leqslant 5;$$

• de plus : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 2\cos 3\pi = 3 + 2 = 5$.

On a prouvé : $\begin{cases} \text{pour tout réel } x,\ f(x) \leqslant 5, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5, \end{cases}$

c'est-à-dire : **le maximum de f est 5.**

2 $f : x \mapsto \frac{1}{x} - x$.

Soient x et x' des réels tels que : $0 < x < x'$; on a :

$$f(x') - f(x) = \frac{1}{x'} - x' - \frac{1}{x} + x = \frac{x - x'}{x'x} + x - x' = \frac{(x - x')(1 + xx')}{xx'};$$

or : $1 + xx' > 0$, $xx' > 0$ (car x et x' sont strictement positif)
et : $x - x' < 0$ (car $x < x'$),
donc : $f(x') - f(x) < 0$,
c'est-à-dire :

$$f(x) > f(x').$$

On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

si $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$,

autrement dit que **la fonction :**

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} - x$$

est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Comme somme des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -x$, toutes deux strictement décroissantes sur $]0\,;+\infty[$, f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Mais cette démonstration ne correspondait pas à la méthode exigée, qui consistait à « revenir à la définition ».

3 $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1}$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$x^2 \geqslant 0 \text{ et } x^4 \geqslant 0,$$

donc : $$x^2+1 \geqslant 1 \text{ et } x^4+1 \geqslant 1,$$

donc, la fonction racine carrée étant croissante sur $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{1} \text{ et } \sqrt{x^4+1} \geqslant \sqrt{1},$$

c'est-à-dire : $$\sqrt{x^2+1} \geqslant 1 \text{ et } \sqrt{x^4+1} \geqslant 1,$$

donc : $$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1} \geqslant 2.$$

autrement dit : 2 est minorant de f sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$f(0) = \sqrt{0^2+1} + \sqrt{0^4+1} = 1 + 1 = 2,$$

ce qui permet de conclure que f admet 2 pour minimum sur $\mathbb{R}$, et que ce minimum est atteint en 0.

D'autre part, pour tout réel x non nul :

$$x^2+1 > 1 \text{ et } x^4+1 > 1,$$

donc, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt{x^2+1} > 1 \text{ et } \sqrt{x^4+1} > 1,$$

donc : $$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1} > 2.$$

Il vient, pour tout réel x non nul, $f(x) > 2$, ce qui prouve que f **n'atteint son minimum qu'en 0.**

Interro 2

(Énoncé p. 231)

1 $f : x \mapsto x^2 - 6x + 7$.

1° a. La fonction f étant un polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9,$$

donc :

$$f(x) = (x-3)^2 - 2.$$

On a ainsi prouvé :

la forme canonique de f est $x \mapsto (x-3)^2 - 2$.

b. D'après **1° a.** : pour tout réel x, $f(x) = k(x-3) - 2$.

• Du tableau de variation de la fonction $k : x \mapsto x^2$ (qui est paire) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

on déduit alors celui de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

• De plus, $\mathscr{C}_f$ est l'image de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ par **la translation t de vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$.**

2° Pour tout réel x :

$$f(x) = (x-3)^2 - 2 = (x-3)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - 3 + \sqrt{2})(x - 3 - \sqrt{2}),$$

donc les racines de f sont $3 - \sqrt{2}$ et $3 + \sqrt{2}$

($3 - \sqrt{2} \approx 1{,}59$ et $3 + \sqrt{2} \approx 4{,}41$ à 10^{-2} près),

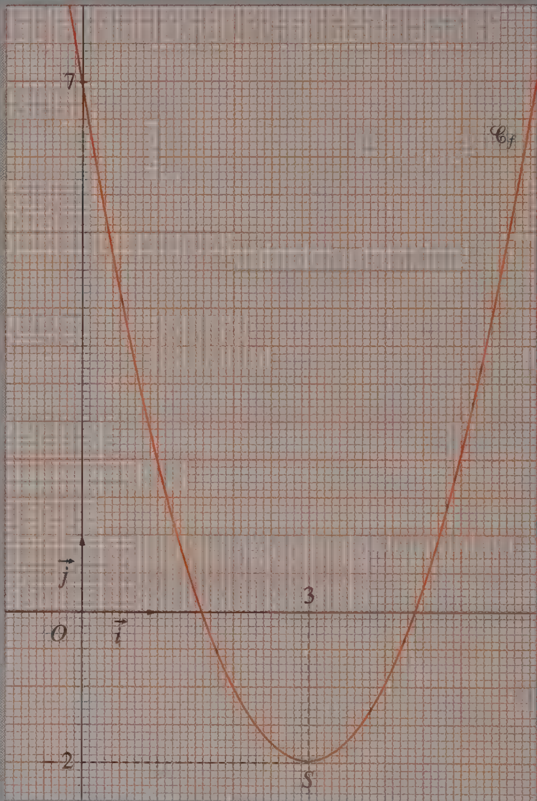
et l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est :

$$\mathbf{[3 - \sqrt{2}\,;\, 3 + \sqrt{2}]}.$$

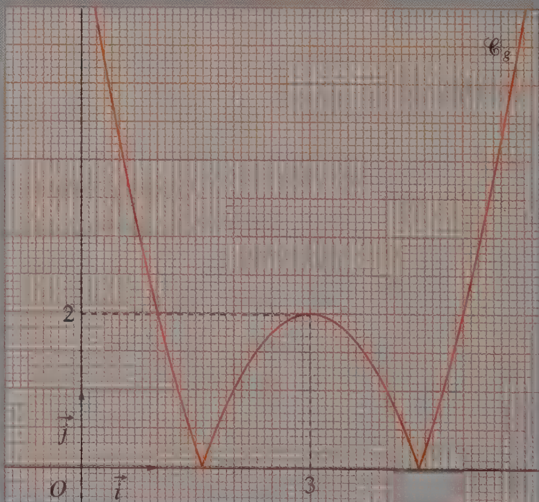
3° La parabole $\mathscr{P}$ admet la droite des ordonnées pour axe de symétrie, l'origine O pour sommet, et $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{P}$ par la translation t de vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$, donc :

• **l'axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ est la droite d'équation $x = 3$, image par t de la droite des ordonnées ;**

• **le sommet de $\mathscr{C}_f$ est le point $S(3\,;\,-2)$, image par t du point O.**



4° • $g : x \mapsto |x^2 - 6x + 7|$.
Soit Γ_1 la partie de $\mathscr{C}_f$ située dans le demi-plan d'inéquation $y \geqslant 0$, et Γ_2 celle située dans le demi-plan d'inéquation $y \leqslant 0$;
alors $\mathscr{C}_g$ **est la réunion de** Γ_1 **et de la courbe symétrique de** Γ_2 **par rapport à la droite des abscisses.**



• $h : x \mapsto x^2 - 6|x| + 7$.

Pour tout réel x : $h(-x) = (-x)^2 - 6|-x| + 7 = x^2 - 6|x| + 7 = h(x)$, donc h est une fonction paire.

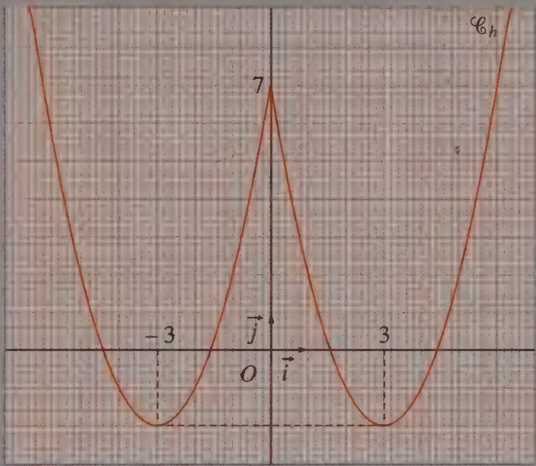
De plus, pour tout x de $[0 ; +\infty[$:

$$|x| = x ,$$

donc :

$$h(x) = f(x) .$$

Donc, en notant Γ_3 la partie de $\mathscr{C}_f$ située dans le demi-plan d'inéquation $x \geqslant 0$, $\mathscr{C}_h$ **est la réunion de Γ_3 et de la courbe symétrique de Γ_3 par rapport à la droite des ordonnées.**



2 1° (E) : $2x^2 + 5x - 3 = 0$ est une équation du second degré ; soit Δ son discriminant :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 ,$$

donc, $\Delta > 0$, ce qui prouve que (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 - 7}{4} = -3 , \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2} .$$

Finalement, **les solutions de (E) sont -3 et $\frac{1}{2}$.**

2° • (E_1) : $2x^2 + 5|x| - 3 = 0$.

Pour tout réel x :

$$(E_1) \Leftrightarrow 2|x|^2 + 5|x| - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow |x| \text{ est solution de } (E)$$

$$\Leftrightarrow |x| = -3 \text{ ou } |x| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} .$$

La valeur absolue d'un réel est positive ou nulle, donc l'équation $|x| = -3$ n'admet pas de solution.

L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\left\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right\}$.

• (E_2) : $2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$.
Si un réel x est solution de (E_2) , alors : $x \geqslant 0$.
Pour tout x de $[0 ; +\infty[$:

$(E_2) \Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2 + 5\sqrt{x} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = -3$ ou $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

La racine carrée d'un réel est positive ou nulle, donc l'équation $\sqrt{x} = -3$ n'admet pas de solution.

Donc (E_2) a pour ensemble de solutions le singleton $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

• (E_3) : $2(x^4) + 5x^2 - 3 = 0$.
Pour tout réel x :

$(E_3) \Leftrightarrow 2(x^2)^2 + 5x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow x^2 = -3$ ou $x^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ou $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

Le carré d'un réel est positif ou nul, donc l'équation $x^2 = -3$ n'admet pas de solution

$\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble des solutions de (E_3) est donc $\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

• $(E_4) = 2 \sin x^2 + 5 \sin x - 3 = 0$.
Pour tout réel x :

$(E_4) \Leftrightarrow 2 (\sin x)^2 + 5 \sin x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow \sin x = -3$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin \dfrac{\pi}{6}$.

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

L'ensemble des solutions de (E_4) est donc :

$$\left\{\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Interro 3

(Énoncé p. 232)

1 1° $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 7\sqrt{2}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.
Pour tout réel x, on a : $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 8x + 5}$.

2° $f : x \mapsto (x^3 - 9x^2)(5x - 6)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.
Pour tout réel x :
$f'(x) = (3x^2 - 18x)(5x - 6) + (x^3 - 9x^2)\times 5$,
donc :
$f'(x) = 15x^3 - 18x^2 - 90x^2 + 108x + 5x^3 - 45x^2$,
d'où : $\boldsymbol{f'(x) = 20x^3 - 153x^2 + 108x}$.

Il est également possible de développer avant de dériver :
$f(x) = 5x^4 - 45x^3 - 6x^3 + 54x^2$
$= 5x^4 - 51x^3 + 54x^2$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+4)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 - 8x}{(x^2+1)^2},$$

donc :

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}}.$$

4° $f : x \mapsto (8x+7)^{2002}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = 8 \times 2002\,(8x+7)^{2001}$$

donc :

$$\boldsymbol{f'(x) = 16\,016\,(8x+7)^{2001}}.$$

2 $f : x \mapsto x - 2\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x},$$

INTERROS • Corrigés

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \text{si } 0 < x < 1, \text{ alors } f'(x) < 0, \\ f'(1) = 0, \\ \text{si } x > 1, \text{ alors } f'(x) > 0. \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et s'annule en 1.

On en déduit que f **est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.**

3 $f : x \mapsto x^2 - x \sin x - \cos x$.

Pour obtenir le minimum de f, étudions le sens de variation de celle-ci.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 2x - x \cos x - \sin x + \sin x = 2x - x \cos x,$$

donc :

$$f'(x) = x(2 - \cos x),$$

or, $2 - \cos x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de x, autrement dit :

$$\begin{cases} \text{si } x < 0, \text{ alors } f'(x) < 0, \\ f'(0) = 0, \\ \text{si } x > 0, \text{ alors } f'(x) > 0. \end{cases}$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, ce qui prouve que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(0)$.

De plus :

$$f(0) = 0^2 - 0 \times 0 - 1 = -1,$$

ce qui permet de conclure : **le minimum de f est -1.**

Interro 4

(Énoncé p. 233)

1 Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x - 1}$.

1° • On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0^+$ donc : $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x - 1}\right) = +\infty$;

on en déduit : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

• De même, on a : $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0^-$ donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1}{x - 1}\right) = -\infty$;

on en déduit : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

On peut donc affirmer que **la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.**

2° a. • On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x-1}\right) = 0$;

on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• De même, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4}{x-1}\right) = 0$;

on en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$.

et :
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x-1}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{x-1}\right) = 0 ,$$

ce qui prouve que **la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.**

c. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$,

et le signe de $\dfrac{4}{x-1}$ est celui de $x - 1$,

donc :
$$\begin{cases} \text{si } x < 1 , \text{ alors } f(x) < x - 1 , \\ \text{si } x > 1 , \text{ alors } f(x) > x - 1 . \end{cases}$$

Finalement :

$\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$ dans le demi-plan d'inéquation $x < 1$,
$\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$ dans le demi-plan d'inéquation $x > 1$.

3° a. f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, car f **est une fonction rationnelle.**

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a :
$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{\mathbf{x^2 - 2x - 3}}{\mathbf{(x-1)^2}} ,$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 2x - 3$.

Soit g le polynôme du second degré : $x \mapsto x^2 - 2x - 3$; son discriminant Δ vérifie :
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 ,$$

donc g admet deux racines x_1 et x_2 :
$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2-4}{2} = -1 , \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2+4}{2} = 3 .$$

On en déduit : $\begin{cases} f'(-1) = f'(3) = 0\,, \\ \text{si } x < -1\,, \text{ alors } f'(x) > 0\,, \\ \text{si } -1 < x < 3\,, \text{ alors } f'(x) < 0\,, \\ \text{si } x > 3\,, \text{ alors } f'(x) > 0\,. \end{cases}$

c. Du signe de f', on déduit que **la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$, strictement décroissante sur $[-1\,;1[$ et sur $]1\,;3]$ et strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$.**

4° Voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$ ↗		-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	

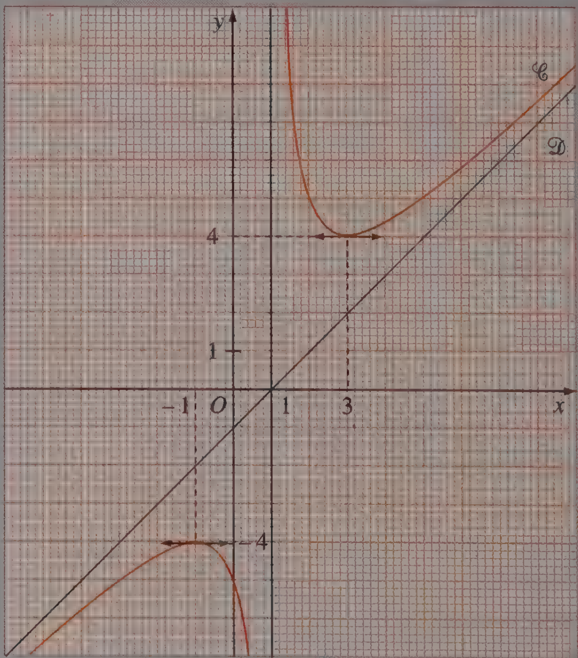
5° Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)\,,$$

c'est-à-dire : $$y - (-5) = (-3)x\,,$$

ou encore : $$\boldsymbol{y = -3x - 5\,.}$$

6°



2 $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Pour tout naturel n :

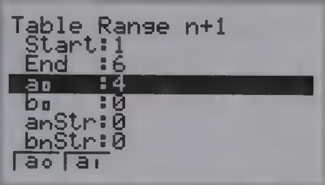
$u_{n+1} - u_n = -u_n^2$, or : $-u_n{}^2 \leqslant 0$, donc : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

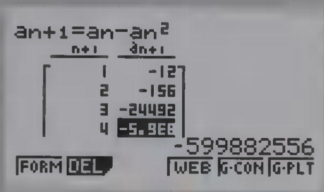
Cela prouve que u est décroissante.

De plus : $u_0 = 4$;

donc, pour tout naturel n : $u_n \leqslant 4$.

Finalement, il n'existe pas de naturel n tel que $u_n \geqslant 4{,}1$.





3 $u : n \mapsto \dfrac{1}{n}$.

u est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant 1,$$

c'est-à-dire : $0 < u_n \leqslant 1$.

Donc la suite u est minorée par 0 et majorée par 1.

La suite u, étant décroissante, est majorée par son premier terme :

$$u_1 = 1.$$

Cet encadrement est le meilleur possible :

• on ne peut pas améliorer la majoration, car $u_1 = 1$;

• on ne peut pas améliorer la minoration, car u_n est aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que n soit suffisamment grand.

Interro 5

(Énoncé p. 234)

1 u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, donc, pour tout naturel n : $u_n = u_0 + nr$.

On en déduit : $u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = 4u_0 + (4 + 6 + 8 + 10)r = 4u_0 + 28r$,

$u_1 + u_{11} = 2u_0 + (1 + 11)r = 2u_0 + 12r$.

Or : $u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8$ et $u_1 + u_{11} = -3$,

donc : $\begin{cases} 4u_0 + 28r = -8 \\ 2u_0 - 12r = -3. \end{cases}$

Le système est équivalent à : $\begin{cases} u_0 + 7r = -2 \\ -u_0 - 6r = 1{,}5\,. \end{cases}$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, on obtient : $r = -0{,}5$;
puis, d'après la première égalité : $u_0 = -2 - 7 \times (-0{,}5) = 1{,}5$.

Finalement : $\boldsymbol{u_0 = \frac{3}{2}}$ et $\boldsymbol{r = -\frac{1}{2}}$.

2 S est la somme des huit termes consécutifs de la suite géométrique u, de u_3 à u_{10} ; la raison de u est $-\frac{2}{3}$, donc :

$$S = u_3 \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^8}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}.$$

Or : $u_0 = 9$, donc : $u_3 = 9 \times (-2/3)^3$, d'où :

$$S = 9 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^8}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = -9 \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1-\frac{2^8}{3^8}}{1+\frac{2}{3}}$$

$$S = -9 \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1}{3^7} \times \frac{3^8-2^8}{3+2} = -\frac{2^3}{3^8} \times \frac{3^8-2^8}{5}$$

$$\boldsymbol{S = -\frac{10\,088}{6\,561}}.$$

3 • Placement de Monsieur Dupont

10 000 euros ont été placés pendant exactement 12 ans,
10 000 autres euros ont été placés pendant exactement 11 ans, …
enfin, 10 000 euros ont été placés pendant exactement 1 an.
Le capital C_1, en euros, de Monsieur Dupont vérifie donc :

$$C_1 = (1{,}06)^{12} \times 10\,000 + (1{,}06)^{11} \times 10\,000 + \ldots + 1{,}06 \times 10\,000,$$

$1 = (1{,}06)^0$ et il y a douze entiers compris au sens large entre 0 et 11.

c'est-à-dire :

$$C_1 = 1{,}06 \times 10\,000 \times [(1{,}06)^{11} + (1{,}06)^{10} + \ldots + 1].$$

On reconnaît à l'intérieur des crochets la somme des 12 premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme 1.

On a donc :

$$C_1 = 1{,}06 \times 10\,000 \times \frac{1-(1{,}06)^{12}}{1-1{,}06},$$

soit : $$C_1 = 10\,600 \times \frac{(1{,}06)^{12}-1}{0{,}06}.$$

Par conséquent, **au bout de douze années, Monsieur Dupont dispose de 178 821,38 euros, au centième près.**

• Placement de Monsieur Durand

30 000 euros ont été placés pendant exactement 12 ans,

30 000 euros ont été placés pendant exactement 9 ans,

30 000 euros ont été placés pendant exactement 6 ans,

30 000 euros ont été placés pendant exactement 3 ans.

Le capital C_2, en francs, de Monsieur Durand, vérifie donc :

$$C_2 = (1{,}06)^{12} \times 30\,000 + (1{,}06)^9 \times 30\,000 + (1{,}06)^6 \times 30\,000 + (1{,}06)^3 \times 30\,000,$$

c'est-à-dire :

$$C_2 = (1{,}06)^3 \times 30\,000 \times [(1{,}06)^9 + (1{,}06)^6 + (1{,}06)^3 + 1].$$

On reconnaît à l'intérieur des crochets la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique de raison $(1{,}06)^3$ et de premier terme 1.

On a donc :

$$C_2 = (1{,}06)^3 \times 30\,000 \times \frac{1-[(1{,}06)^3]^4}{1-(1{,}06)^3},$$

soit : $$C_2 = 35\,730{,}48 \times \frac{(1{,}06)^{12}-1}{0{,}191\,016}.$$

Par conséquent, **au bout des douze années, Monsieur Durand dispose de 189 336,32 euros, au centième près.**

4 $u : n \mapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Les deux suites $n \mapsto \sqrt{n+1}$ et $n \mapsto \sqrt{n}$ ayant pour limite $+\infty$, et un comportement « voisin », il est difficile de prévoir le comportement de leur différence.

La suite u est positive et, pour tout naturel n :

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \neq 0,$$

donc : $$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

soit : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$,

or : $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}$

donc, si de plus $n \neq 0$:

$$u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Finalement, pour tout naturel n non nul :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ce qui prouve : $\mathbf{\lim u = 0}$.

On appelle cela technique de « l'expression conjuguée ».
Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

CALCULATRICES ET FONCTIONS

Rappels de cours

I- Autour de la fonction $f : x \mapsto -5 + 3\sqrt{x^2+1}$ et des fonctions $|f-2|$, $\dfrac{|f-2|}{f+4}$

TI-82	CASIO GRAPH 65

Expression

TI-82

Appuyer sur [MODE] et sélectionner les modes **Func** et **Connected**.
Accéder à l'éditeur de fonctions graphiques :

[Y =]

(le curseur est alors placé à droite de **Y1=**).
Taper la formule.

CASIO GRAPH 65

Accéder au menu GRAPH :

[MENU] GRAPH [EXE]

Appuyer sur la touche [▶], le symbole **=** apparaît et le curseur est placé à droite de **Y1=** .
Taper la formule et valider par [EXE].

[(–)] [5] [+] [3] [√] [(] [X, θ, T] [x^2] [+] [1] [)]

Pour $|f-2|$, taper dans la ligne **Y2=** :

[Abs] [(] [Y] [1] [–] [2] [)]

où **Y** est obtenu par :

TI-82 : [2nd] [Y-VARS] [1] **(Function)** [1] **(Y1)**

CASIO : [VARS] [F4] **(GRPH)** [F1] **(Y)**

et la fonction valeur absolue par :

TI-82 : [2nd] [x^{-1}]

CASIO : [OPTN] [F5] **(NUM)** [F1] **(Abs)**

Pour $\dfrac{|f-2|}{f+4}$, taper dans la ligne **Y3=** :

(Y) (2) (÷) (() (Y) (1) (+) (4) ())

Copie d'écran CASIO GRAPH 65

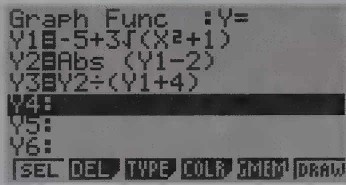


Tableau de valeurs

Pour obtenir le tableau de valeurs de la fonction f lorsque la variable varie de – 3 à 3, avec un pas de 0,5 :

sélectionner la seule zone de stockage **Y1** (la touche (ENTER) sert de bascule),

ouvrir la fenêtre de réglage de la valeur minimale de la variable et le pas avec la commande **Tbl Set** :

(2nd) (Tbl Set)

ajuster les valeurs en se déplaçant avec la touche (▼),
puis afficher la tableau avec la commande **TABLE** :

(2nd) (TABLE)

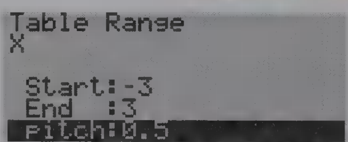
accéder à l'écran de tabulation :

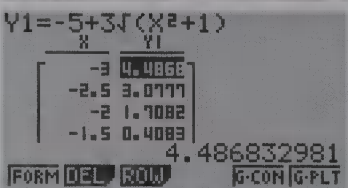
(MENU) TABLE (EXE)

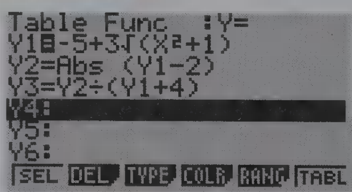
puis, après avoir sélectionné la seule zone de stockage **Y1** (SEL sert de bascule), ouvrir la fenêtre de réglage des valeurs extrémales de la variable et le pas avec **RANG**, ajuster les valeurs en se déplaçant avec la touche (▼) (en validant les valeurs modifiées), revenir à l'écran de tabulation puis afficher le tableau :

(EXIT) TABL

Copies d'écran CASIO GRAPH 65







Se placer dans la colonne Y1 pour lire davantage de chiffres significatifs.

Courbe

• Pour obtenir les courbes représentatives de f et de $|f-2|$, avec le cadrage $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-3 \leqslant y \leqslant 5$, graduations toutes les unités :
accéder à l'éditeur de fonctions graphiques, sélectionner les zones de stockage **Y1** et **Y2**,

ouvrir la fenêtre de cadrage :

WINDOW

régler les valeurs des paramètres, afficher le graphique :

GRAPH

ouvrir la fenêtre de cadrage :

Shift V-Window

régler les valeurs des paramètres, revenir à l'éditeur de fonctions et afficher le graphique :

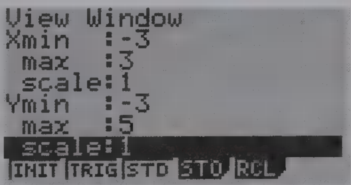
EXIT DRAW

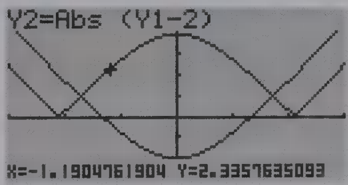
• Pour lire les coordonnées de points d'une des deux courbes, utiliser la fonction **TRACE** :

TRACE

(▶ ou ◀ pour se déplacer sur la courbe, ▲ ou ▼ pour changer de courbes.)

Copies d'écran CASIO GRAPH 65





ANNEXE

CALCULATRICES ET SUITES

Rappels de cours

TI-82	CASIO GRAPH 65
Appuyer sur (MODE) sélectionner les modes **Seq** et **Dot**.	Accéder au menu consacré aux suites : (MENU) RECUR (EXE)

I- Autour de la suite explicite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n^2}.$$

Expression

Appuyer sur (Y =)
(le curseur est alors placé à droite de **Un=**),
taper la formule
(n s'obtient par (2nd) (9)).

Définir le type « explicite » en appuyant sur (F3) (**TYPE**) , puis (F1) (an) .
Appuyer sur la touche (▶), le symbole = apparaît et le curseur est placé à droite de **an=** .
Taper la formule et valider par (EXE)
n s'obtient par (F4) (**n**).

Copies d'écran CASIO GRAPH 65

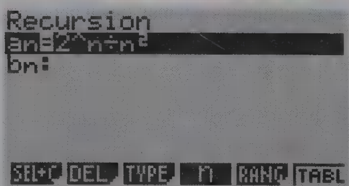


Tableau de valeurs

Pour obtenir le tableau des valeurs de u_n lorsque n varie de 1 à 12 :

ouvrir la fenêtre de réglage de la valeur minimale de la variable et du pas avec la commande **Tbl Set** :

(2nd) (Tbl Set)

ajuster les valeurs de **TblMin** et de **ΔTb1** à 1 en se déplaçant avec la touche (▼),

puis afficher le tableau avec la commande TABLE :

(2nd) (TABLE)

ouvrir la fenêtre de réglage des valeurs initiale et finale de n :

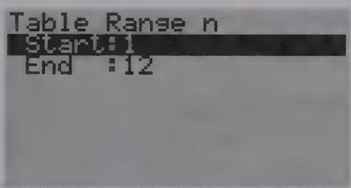
(F5) (RANG)

ajuster les valeurs en se déplaçant avec la touche (▼) (valider toute modification avec (EXE)),

revenir à l'écran de tabulation puis afficher le tableau :

(EXIT) TABL

Copies d'écran CASIO GRAPH 65



Se placer dans la colonne **an** pour lire davantage de chiffres significatifs.

Représentation graphique

Pour obtenir une représentation graphique des douze premiers termes de la suite (u_n), avec le cadrage $0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 30$ (en prenant une graduation de 5 en 5 sur l'axe vertical pour une meilleure lisibilité) :

ouvrir le menu de gestion de l'affichage :

(WINDOW)

à la première ligne, WINDOW est alors en surbrillance ;

régler les valeurs des paramètres :

nStart = 1	**Xmin = 0**	**Ymin = 0**
nMin = 1	**Xmax = 12**	**Ymax = 30**
nMax = 12	**Xscl = 1**	**Yscl = 5**

ouvrir la fenêtre de cadrage :

(Shift) (V-Window)

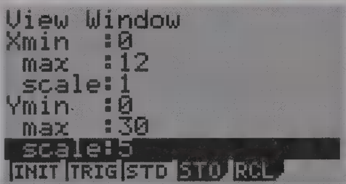
régler les valeurs des paramètres (voir la copie d'écran), puis revenir au menu RECUR et afficher le graphique :

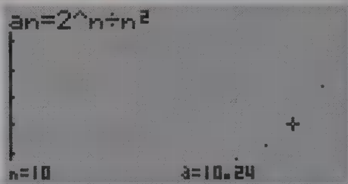
(EXIT) TABL G-PLT

remonter à la première ligne avec la touche (▲), mettre **FORMAT** en surbrillance par un appui sur la touche (▶), sélectionner le format **Time** ;
afficher le graphique : (GRAPH)

• Utiliser la fonction **TRACE** et les touches (▶) ou (◀) pour se déplacer sur les points de la représentation graphique et obtenir des valeurs approchées des ordonnées.

Copies d'écran CASIO GRAPH 65





II- Autour de la suite récurrente (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

Expression

Taper (Y =)
le curseur est alors placé à droite de **Un=**),
entrer la formule
((2nd) (7) pour **Un - 1**).

Dans le menu RECUR, définir le type « explicite » en appuyant sur (F3) (TYPE) , puis (F2) (an + 1)
Appuyer sur la touche (▶) , le symbole = apparaît ;
taper la formule, et valider par (EXE)
(**an** s'obtient par nan an).

Copies d'écran CASIO GRAPH 65

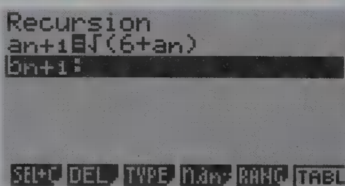


Tableau de valeurs et représentation graphique

Pour obtenir le tableau des valeurs de u_n lorsque n varie de 1 à 12, et la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n), avec le cadrage $-6 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant 5$:

• ouvrir la fenêtre de réglage de la valeur minimale de la variable et du pas avec la commande **Tbl Set**, ajuster les valeurs de **Tbl Min** à 1 et de **ΔTb1** à 1 en se déplaçant avec la touche (▼) ;

• ouvrir le menu de gestion de l'affichage :

(WINDOW)

à la première ligne, **WINDOW** est alors en surbrillance ;
régler les valeurs des paramètres :

U_nStart = – 4	**Xmin = – 6**	**Ymin = 0**
nStart = 1	**Xmax = 5**	**Ymax = 5**
	Xscl = 1	**Yscl = 1**

remonter à la première ligne avec la touche (▲), mettre **FORMAT** en surbrillance par un appui sur la touche (►), sélectionner le format Web ;

• afficher le tableau :

(2nd) (TABLE)

• afficher la représentation graphique de la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{6+x}$ et de la droite d'équation $y = x$:

(GRAPH)

Utiliser la fonction **Trace** puis la touche (►) pour obtenir une visualisation du comportement de la suite (u_n).

• ouvrir la fenêtre de réglage des paramètres de tabulation avec RANG, ajuster les valeurs suivantes :

Start : 1	**a0 : – 4**
End : 12	**anStr : – 4**

en se déplaçant avec la touche (▼) et en validant les valeurs modifiées (l'appui sur la touche (F2) change $\mathbf{a_0}$ en $\mathbf{a_1}$, utile lorsque le premier terme de la suite étudié a pour indice 1) ;

• revenir à l'écran de tabulation puis afficher le tableau :

(EXIT) TABL

• ouvrir le fenêtre de cadrage :

(Shift) (V-Window)

régler les valeurs des paramètres :

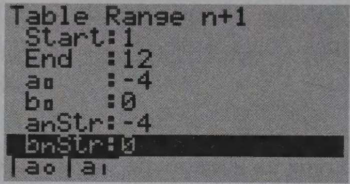
Xmin : – 6	**Ymin : 0**
max : 5	**max : 5**
scale : 1	**scale : 1**

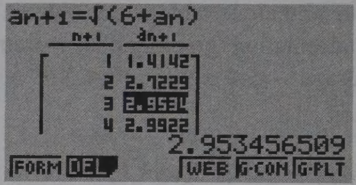
• revenir au menu RECUR et afficher la représentation graphique de la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{6+x}$ et de la droite d'équation $y = x$:

(EXIT) TABL WEB

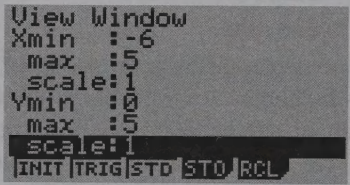
Utiliser la fonction Trace puis la touche de validation pour obtenir une visualisation du comportement de la suite (u_n).

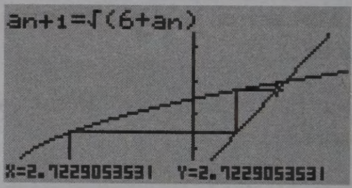
Copies d'écran CASIO GRAPH 65





Se placer dans la colonne a_{n+1} pour lire davantage de chiffres significatifs.





Imprimé en France par Hérissey à Évreux - n° 90232
Dépôt légal : 10875-08/01 - Collection 21
Édition 01 - 16/8357/2

La collection **EXERCICES RÉSOLUS**, conforme aux nouveaux programmes du lycée, s'adresse à tous ceux qui désirent progresser, voire exceller, grâce à un entraînement intensif à coups d'exercices aussi variés par leurs sujets que par leurs niveaux de difficulté.

Chaque titre vous propose :

- d'indispensables **rappels de cours** ;
- des **batteries d'exercices** minutés et de difficulté clairement signalée, conçues pour vous permettre d'acquérir aisance et rapidité ;
- leurs **corrigés entièrement rédigés**, assortis de nombreux conseils et explications complémentaires ;
- de véritables **interrogations écrites, et leurs corrigés détaillés**, pour terminer vos révisions en vous plaçant dans les conditions d'un devoir sur table.

DANS LA MÊME COLLECTION

Mathématiques 2^{nde}
Physique-Chimie 2^{nde}
Mathématiques 1^{re} S (2 tomes)
Mathématiques 1^{re} ES
Physique 1^{re} S
Chimie 1^{re} S
Mathématiques T^{erm} S (2 tomes)
Mathématiques T^{erm} ES
Physique T^{erm} S
Chimie T^{erm} S

- Nous vous proposons, par ailleurs, dans la collection **FAIRE LE PO**[...] qui permettent d'acquérir les savoir-fair[...]
- Vous y trou[...] principaux mécanismes de résolution des pro[...]ainsi que de nombreuses applications conçues pour votre évaluation.

www.hachette-education.com

HACHETTE Éducation