OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en 1^{ere} C

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur au Cameroun

Groupe WhatsApp

LES GRANDS PROFS DE MATHS

3EME EDITION

AVANT PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenue de plus en plus difficile, beaucoup d'Etats ont compris qu'en ce qui concerne le système éducatif, il faut mettre l'apprenant au centre de la construction du savoir ; il faut une école soucieuse d'outiller les apprenants afin qu'ils puissant faire face à des situations de vie réelle, complexes et diversifiées. À la place d'une école coupée de la société, il faut une école intégrée, soucieuse du développement durable, et qui prend en compte les cultures et les savoirs locaux. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert les portes à l'APC qui remplacera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeune enseignant soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateur et de jouer les premiers rôles dans ce processus.

Cet ouvrage et toute la collection de la $6^{\text{ème}}$ en T^{le} est l'œuvre d'un groupe d'enseignant dynamique et rompu à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grandprofs de maths (GPM) ». Cette $3^{\text{ème}}$ édition est le fruit de l'un de ses objectifs majeurs ; une conséquence de trois mois et demi de travail dont la partie intense s'étend du 27/07/2020 au 05/10/2020 (date de la rentrée scolaire au Cameroun.)

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette édition n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être le complémentaire de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jour qu'ont connu l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, dans toutes les leçons de cette 3ème édition, il existe une bonne corrélation entre la situation problème et une partie de l'activité d'apprentissage donc l'objectif est non seulement d'installer les ressources de la leçon, mais aussi de résoudre le problème posé dans la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, surtout *M.Pouokam Léopold Lucien* **qui a su remobilisé les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de le rentrée scolaire ; difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capitale, il s'agit de** *M. Ngandi Michel.* **Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.**

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection, rencontreront l'indulgence compréhension des utilisateurs. Toutefois, toutes éventuelles suggestions ou critiques constructives peuvent être envoyé via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr.

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille « GPM » et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via WhatsApp à l'un des administrateurs ci-dessous : M. GUELA KAMDEM Pierre (697 473 953/ 678 009 612), M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien (696 090 236/ 651 993 749), M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson (699 494 671) et M. NGUEFO TAKONGMO Amour (679985838).

NB : Toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

Liste des enseignants ayant participé au projet dans l'atelier première C sous la coordination de M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien.

Chapitres	NOMS ET PRENOMS	TELEPHONES	PAGES
1- Polynômes Équations-inéquations dans IR	SIGNING		4-14
2- Limites et continuité	BOUNOU		15-27
3- Statistiques	DONGFACK ARNAUD		28-35
4- Equations et inéquations à deux et trois inconnues,	SAGNIA NOUWO		36-46
5- Trigonométrie	ABBA BILAL		47-57
6- Dérivations.	AZEBAZE TSAMO THÉOPHILE	670 195 638	58-70
7- Représentation graphique de fonctions,	MAHAMETTE AMADOU	690039043	71-80
8- Suites numériques	AZEBAZE TSAMO THÉOPHILE	670 195 638	81-90
9- Arcs capables	NGUEFO TAKONGMO AMOUR	679 985 838	91-98
10- Espaces vectoriels réels	GIRES SAHA ET OLIVIER TIAGHO		99-108
11- Applications linéaires et matrices	JORDAN ZANG		109-119
12- Graphes	KAMTILA KARI		120-125
13- Barycentres-lignes de niveau			126-140
14- Généralités sur les fonctions numériques	KOUESSEU MADELEINE	696 367 305	141-155
15- Transformations du plan	KELIK TAYIM SERGE		156-185
16- Orthogonalité dans l'espace.	AMBASSA BELLA GABRIELLE	677 325 194	186-209
17- Géométrie analytique de l'espace	AMBASSA BELLA GABRIELLE	677 325 194	210-237
18- Sphère	AMBASSA BELLA GABRIELLE	677 325 194	238-247
19- Dénombrements	NJANKO ÉTIENNE ARNOLD	694 650 323	248-256
20- Géométrie analytique du plan,	OLIVIER KAMSI	671 906 235	257-263

⋆ ⋆ **Chapitre Un** ⋆ ⋆

Equations et Inéquations polynômiales

Motivation : Nous sommes confrontés dans notre vie quotidienne à résoudre des problèmes de partage, de répartitions de superficies, d'intérêts, de rabais ou de hausse, d'optimisation et bien d'autres. Le présent chapitre s'en va nous donner des outils mathématiques nécessaires pour mieux appréhender ce type de problèmes.

LEÇON 1 :Equations du second degré dans $\mathbb{R}$. Durée : 100 Minutes

Objectifs pédagogiques : A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Résoudre une équation du second degré
- Factoriser un trinôme du second degré
- Résoudre un problème faisant intervenir une équation du second degré

Contrôle des Pré-requis :

On considère les polynômes : $P(x) = x^2 + x - 2$, $Q(x) = x^2 - 6x + 9$ et $K(x) = x^2 + 2x + 3$

1. Détermine la forme canonique des polynômes P, Q et K.
2. Factorise si possible chacun de ces polynômes.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ et $K(x) = 0$.

Situation problème : Pour confectionner des rideaux, Marie a acheté du tissu pour $11520 francs$. Si le vendeur lui avait fait une remise de $320 francs$ par mètre, elle aurait pu obtenir 6 mètres de plus en déboursant la même somme. Déterminer le nombre de mètres tissus que Marie a acheté.

Activité d'apprentissage :

Activité 1 :

On considère le système suivant

$$(S) : \begin{cases} xy = 11520, \\ (x+6)(y-320) = 11520. \end{cases}$$

1. Montre que le système (S) est équivalent à $x^2 + 6x - 216 = 0$.
2. Donne la forme canonique de $p(x) = x^2 + 6x - 216$ puis donne sa forme factorisée.

3. Déduis les solutions de l'équation $x^2 + 6x - 216 = 0$.
4. Déduis la solution de la situation problème.

Solution :

1. Montrons que le système (S) est équivalent à $x^2 + 6x - 216 = 0$.
   On a d'après la prémière équation du système (S), $y = \dfrac{11520}{x}$ et en substituant cet expréssion dans la deuxime équation du système (S), on obtient

$$\begin{aligned}(x+6)(11520-320x) = 11520x &\iff -320x^2 + 9600x + 69120 = 11520x \\ &\iff -320x^2 - 1920x + 69120 = 0 \\ &\iff x^2 + 6x - 216 = 0\end{aligned}$$

2. La forme canonique du polynôme $p(x)$ est

$$p(x) = (x+3)^2 - 225$$

   et sa forme factorisée est

$$p(x) = (x+18)(x-12).$$

3. L'équation

$$\begin{aligned}x^2 + 6x - 216 = 0 &\iff (x+18)(x-12) = 0 \\ &\iff (x+18) = 0 \quad \text{ou} \quad (x-12) = 0 \\ &\iff x = -18 \quad \text{ou} \quad x = 12\end{aligned}$$

   Donc les solutions de l'équation $x^2 + 6x - 216 = 0$ sont -18 et 12.
4. Puisque le nombre de mètre de tissus est une quantité positive, Marie a donc acheté 12 mètres de tissus.

Activité2 :

On considère le polynôme du second degré défini par $p(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Ecrire le trinôme du second degré P sous la forme canonique.
2. En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, Réécrire cette forme canonique.
3. A quelles conditions sur Δ, le polynôme p est il factorisable ? Dans chacun de ces cas factoriser p si possible puis résoudre l'équation $p(x) = 0$.

Solution :

1. forme canonique du trinôme du second degré p est $p(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.
2. En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, la forme canonique de $p(x)$ prend la forme suivante : $p(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
3. En se basant sur la réponse à la question 2, on a trois cas de figures :

a Si $\Delta < 0$, alors le polynôme p n'est pas factorisable et l'équation $p(x) = 0$ n'admet pas de solution.

b Si $\Delta = 0$, alors le polynôme p est factorisable, sa forme factorisée est $p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et l'équation $p(x) = 0$ admet une solution réelle double qui est $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

c Si $\Delta > 0$, le polynôme p est factorisable, sa forme factorisée est $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et l'équation $p(x) = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Resumé 1.0.1. Définition

1. On appelle polynôme ou trinôme du second degré tout polynôme p de la forme $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
2. On appelle équation du second degré, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$,avec $a \neq 0$.
3. On appelle discriminant du polynôme p, le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété

La forme canonique du trinôme du second degré $p(x) = ax^2+bx+c$ est donnée par : $p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$. De cette forme canonique, on a :

1. Si $\Delta < 0$, alors l'équation $p(x) = 0$ n'admet pas de solution.
2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $p(x) = 0$ admet une solution double qui est $-\frac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $p(x) = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

METHODE :

Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ en utilisant le discrminant, on calcul le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on a :

1. Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution réelle, son ensemble solution est $S = \emptyset = \{\}$ et le polynôme associé à l'équation (E) n'est pas factorisable.
2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution réelle double $x_0 = -\frac{b}{2a}$, son ensemble solution est $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ et la forme factorisée du polynôme associé à l'équation (E) est $ax^2+bx+c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
3. Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Son ensemble solution est $S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ et la forme factorisée du polynôme associé à l'équation (E) est $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque :

➠ Lorsque le coefficient b est pair ou contient en évidence le facteur 2, on peut poser $b' = \frac{b}{2}$ et calculer le discriminant réduit $\Delta' = b^2 - ac$ du polynôme $ax^2 + bx + c$. Trois cas de figure se présentent :

1. Si $\Delta' < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution réelle, son ensemble solution est $S = \emptyset = \{\}$ et le polynôme associé à l'équation (E) n'est pas factorisable.

2. Si $\Delta' = 0$, alors l'équation (E) admet une solution réelle double $x_0 = -\frac{b'}{a}$, son ensemble solution est $S = \left\{-\frac{b'}{a}\right\}$ et la forme factorisée du polynôme associé à l'équation (E) est $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b'}{a}\right)^2$.
3. Si $\Delta' > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$. Son ensemble solution est $S = \left\{\frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}, \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$ et la forme factorisée du polynôme associé à l'équation (E) est $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

➠ Lorsque a et c sont de signes contraires l'équation admet deux racines distinctes

Exercices d'application

Exercice 1.0.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes et donner la forme factorisée des polynômes associés à chacune de ces équations :
a) $-2x^2 - \sqrt{5}x + 2 = 0$, b) $3x^2 - 6x + 3 = 0$, c) $6x^2 - 5x + 7 = 0$.

Exercice 1.0.2. On se propose de résoudre l'équation $3x^2 - (3 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

1. Vérifier que $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$.
2. Résoudre dans , l'équation $3x^2 - (3 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$.

Exercice 1.0.3. Résoudre dans chacune des équations suivantes :
a) $x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$, b) $-x^2 + |x| + 2 = 0$, c) $(x - 10)^2 - (x - 10) - 2 = 0$.

Exercice 1.0.4. Une marchandise qui coutait 51840 FCFA subit deux réductions de $x\%$ puis est vendue au prix de 36000 FCFA. Déterminer la valeur de x.

Exercice 1.0.5. Un commerçant achète n actions dans une banque A à 600000 Fcfa. Dans une autre banque B il aurait pu acheter avec la même somme 100 actions en moins mais chaque action se verrait alors augmenter de 3000Fcfa. Déterminer le nombre d'actions vendues et le prix d'une action.

LEÇON 2 : Somme et produit des racines du trinôme du second degré. Durée : 100 Minutes

Objectifs pédagogiques : A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit
- Utiliser la somme ou le produit pour déterminer une racine connaissant l'autre
- Résoudre des systèmes voire des problèmes faisant intervenir la somme et le produit des racines
- Résoudre des équations paramétriques

Contrôle des pré-requis :

- Savoir résoudre une équation du second degré c'est-a-dire déterminer les racines d'un polynôme du second degré.

- Resoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : $\begin{cases} xy = -14, \\ x + y = 48. \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 6, \\ -x + 2y = -3. \end{cases}$

Situation problème :

Monsieur X dispose d'un champ en forme rectangulaire dont il ne se souvient plus des dimensions. Néanmoins ce dernier se rappelle que l'aire du terrain est de $48dam^2$ et que l'une des diagonales mesure $10dam$. Aidez Monsieur X à retrouver les dimensions de son champ.

Activité d'apprentissage :

Activité 1 :

Soient x et y deux réels vérifiant $xy = 48$ et $x^2 + y^2 = 100$.

1. Montre que le couple (x, y) est solution des systèmes suivants : (S_1) : $\begin{cases} x + y = 14, \\ xy = 48. \end{cases}$ ou (S_2) : $\begin{cases} x + y = -14, \\ xy = 48. \end{cases}$
2. Résous dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant la substitution les systèmes (S_1) et (S_2)
3. En déduire la solution de la situation problème.

Solution :

1. On a $x^2 + y^2 = 100 \Longleftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 100)$ et comme $xy = 48$, on obtient $(x + y)^2 = 100 + 2 \times 48)$. Ceci nous conduit à $x + y = 14$ ou $x + y = -14$. Ainsi
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy = 48. \end{cases} \Longleftrightarrow \quad (S_1) : \begin{cases} x + y = 14, \\ xy = 48. \end{cases} \quad \text{ou} \quad (S_2) : \begin{cases} x + y = -14, \\ xy = 48. \end{cases}$$
2. De la prémière équation de (S_1), on obtient $y = 14 - x$, en substituant cet expréssion dans la deuxième équation de (S_1) on obtient l'équation du second degré $x^2 - 14x + 48 = 0$. $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 48 = 4$, $x_1 = 6$ et $x_2 = 8$. l'ensemble solution de (S_1) est $S = \{(6, 8), (8, 6)\}$.
De la même façon, on montre que l'ensemble solution de (S_2) est $S = \{(-6, -8), (-8, -6)\}$.
3. Soient L et l respectivement la longueur et la largeur de ce champ. on a $L \times l = 48$ et $L^2 + l^2 = 10^2$. D'après ce qui précède, la longueur et la largeur de ce champ sont respectivement $8dam$ et $6dam$.

Activité 2 :

On suppose que le trinôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racine x_1 et x_2 et on se propose de trouver une relation entre $x_1 + x_2$, $x_1 \times x_2$ et les coefficient de $p(x)$.

1. Rappeller la forme factorisée du polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$.
2. Développer cette forme factorisée puis par identification, exprimer $x_1 + x_2$, $x_1 \times x_2$ en fonction des coefficient de $p(x)$.

Solution :

1. Lorsque le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2, alors sa forme factoriée est $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Après développement de cette forme factorisée, on obtient $p(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Par identification, on obtient $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Resumé 1.0.2.

Proposition 1.0.1. *Lorsque l'équation du second degré $ax^2+bx+c = 0$ a des solutions distinctes ou confondues x_1 et x_2, leur somme $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et leur produit $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.*

Proposition 1.0.2. *Si deux nombres x_1 et x_2 ont pour somme S et pour produit P ces nombres sont des solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$ à condition que $S^2 - 4P \geq 0$.*

Remarque 1.0.1. Une équation du second degré possède :

1. Deux solutions de signes contraires lorsque $P < 0$,
2. Deux solutions positives lorsque $\Delta > 0$, $S > 0$ et $P > 0$,
3. Deux solutions négatives lorsque $\Delta > 0$, $S < 0$ et $P > 0$.

Exercices d'applications

Exercice 1.0.6. Déterminer le nombre et le signe des solutions de chacune des équations suivantes : $3x^2+4x-7 = 0$, $x^2 + 7x + 11 = 0$ et $x^2 - 7x = 0$. NB :On ne vous demande pas de trouver ces solutions

Exercice 1.0.7.
1. Déterminer deux nombres réels dont la somme 8 est et le produit 15.
2. Existe-t-il deux nombres réels dont la somme est $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ et le produit $-\sqrt{6}$?
3. Existe-t-il deux nombre réels dont la somme est 11 et le produit 31 ?

Exercice 1.0.8. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y = -13 \\ xy = -30 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}, \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \\ x + y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 3y^2 = 13 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x-1)(y-1) = 18 \end{cases}, \begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 45 \end{cases}.$$

Exercice 1.0.9. Un triangle rectangle a pour périmètre $30m$ et pour aire $30m^2$. Déterminer ses dimensions.

1.0.1 Equations paramétriques

Pour résoudre l'équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (où c dépend d'un parametre réel m), On calcul le discriminant Δ_m et la résolution d'une telle équation passe par l'étude du signe du disciminant Δ_m.

Exercice 1.0.10. Soit m un paramètre réel. Résoudre suivant les valeurs de m l'équation

$$(E_m) : -x^2 + 4x + 1 - m = 0$$

Exercice 1.0.11. Soit m un paramètre réel. On considère l'équation d'inconnue x :

$$(E_m) : 2x^2 + m - x + 2 = 0$$

Discuter suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de (E_m).

LEÇON 3 : Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$. Durée : 100 Minutes

Objectifs pédagogiques :

- Résoudre une inéquation du second degré
- Résoudre un problème d'optimisation

Pré-requis :

- Signe du premier degré : La racine (ou le zéro) du polynôme du premier degré $ax+b$ est $-\frac{b}{a}$. La règle de signe de ce polynôme est donnée par le tableau de signe ci-après

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe contraire de a	0	signe de a	

Etude du signe de $-2x+3$

Situation problème

Un brocanteur achète une caisse contenant un lot soldé de vases en verre blanc pour $360FCFA$, trois sont cassés et vend les autres cinq franc de plus par vase qu'ils ne lui ont coûté. Il gagne ainsi $15FCFA$ sur son marché ; Combien chaque vase lui avait-il coûté ?

Activité d'apprentissage :

On donne $p(x) = x^2 - 6x - 216$

1. Donner la forme canonique de $p(x)$.
2. Dresser le tableau de signe du polynôme $p(x)$.
3. Déduire de ce tableau la solution de l'inéquation $p(x) \geq 0$.
4. En déduire la solution de la situation problème.

Solution :

1. La forme canonique de $p(x)$ est $p(x) = (x-3)^2 - 225$
2. Tableau de signe du polynôme $p(x)$. On a $p(x) = (x-18)(x+12)$, ainsi, $p(x) = 0 \iff x = -12$ ou $x = 18$. Le tableau de signe de $p(x)$ est donc le suivant :

x	$-\infty$		-12		18		$+\infty$
$x-18$		-	|	-	0	+	
$x+12$		-	0	+	|	+	
$p(x)$		+	0	-	0	+	

3. Solution de l'inéquation $p(x) \geq 0$. On a $p(x) \geq 0 \iff S =]-\infty, -12] \bigcup [18, +\infty[$.

4. Soient x le nombre de vases blanc et y le prix d'une vase de verre blanc.

   On a le système (S) : $\begin{cases} (x-3)(y+5) = 375 \\ xy = 360 \end{cases}$.

   De la deuxième du système on a $y = \dfrac{360}{x}$ et en substituant cet expréssion dans la prémière équation, on obtient $5x^2 - 30x - 1080 = 375x$, ie $x^2 - 6x - 216 = 0$. De ce qui précède, on conclut qu'on a 18 vases de verre.

Resumé 1.0.3.

Définition 1.0.1. *On appelle inéquation du second degré toute inéquation faisant intervenir un trinôme du second degré.*

Exemple 1.0.1. $-2x^2 + 10x - 12 > 0$ est une inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution d'une équation du second degré 1.0.1. Pour résoudre une inéquation du second degré, on dresse le tableau de signe du trinôme associé puis on détermine l'ensemble des valeurs qui satisfont cette inéquation.

Signe du polynôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$:

Pour étudier le signe du polynôme du second degré $p(x) = ax^2+bx+c$, on calcul le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ et on a les tableaux de signes suivants selon le signe de Δ.

1. Si $\Delta < 0$, alors $p(x)$ n'est pas factorisable, il admet pas de racine, son signe est celui de a et son tableau de signe est le suivant

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

2. Si $\Delta = 0$, alors $p(x)$ est factorisable, sa forme factorisée est $p(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, il admet une racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, son signe est celui de a et son tableau de signe est le suivant

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

3. Si $\Delta > 0$, alors $p(x)$ est factorisable, il admet deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, sa forme factorisée est $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, son tableau de signe est le suivant en suppasant $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a	

Remarque 1.0.2. Lorsqu'un trinôme du second degré ax^2+bx+c est factorisable et admet deux racines distinctes alors son signe est celui de a à l'exérieur des racines et celui de a à l'intérieur des racines.

Propriété 1.0.1. *Si un polynôme ne s'annule pas sur un intervalle, alors il garde un signe constant sur cet intervalle.*

Exercices d'applications

Exercice 1.0.12. Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $3x^2 - 6x + 3 < 0$, b) $-3x^2 + 3x - 7 \leq 0$, c) $5x^2 - x + 3 < 0$, d) $3x^2 - 6x + 3 < 0$, e) $-3x^2 + 9x + 6 \geq 0$

Exercice 1.0.13. Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x^2 + x - 2}{2x - 2} \leq x + 3$, b) $\dfrac{x - 1}{x - 4} \leq \dfrac{x - 5}{2x - 5}$.

LEÇON 4 : Equations et inéquations de degré supérieur ou égal à 3. Durée : 100 Minutes

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des polynômes de degré supérieur ou égal à 3
- Résoudre une équation/inéquation bicarrée

Pré-requis :

- Savoir résoudre une équation et une inéquation du premier et second degré.
- Savoir utiliser la méthode par identification ou par division euclidienne sur des polynômes.

Situation problème : Une entreprise produit des voitures qu'elle commercialise. Le coût de fabrication (en milliers de FCFA) d'une voiture est de 5 millions de FCFA. Cet entreprise produit x voitures et la fonction qui modélise les prévision pour la vente de ces x voitures est donnée par $P_v(x) = x^3 + 4002x^2 + 8000x - 10000000$. On s'intéresse au bénéfice, c'est-à-dire à la différence entre la recette et le coût de fabrication. Lorsque cette différence est setrictement positive, on dit que la production est rentable. Déterminer la quantité de voitures à produire pour que la production soit rentable.

Activité d'apprentissage :

On considère l'inéquation $(I) : x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000 \geq 0$ et le polynôme $p(x)$ défini par $p(x) = x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000$

1. Montrer que $p(x) = (x - 1000)(x + 5000)(x + 2)$.
2. Dresser le tableau de signe du polynôme p ; puis en déduire dans $\mathbb{R}$ l'enssemble solution de (I).
3. En déduire la solution de la situation problème.

Solution :

1. Montrons que $p(x) = (x - 1000)(x + 5000)(x + 2)$.

   On a

$$\begin{aligned}(x-1000)(x+5000)(x+2) &= (x-1000)(x^2+5002x+10000)\\ &= x^3+5002x^2+10000x-1000x^2-5002000x-10000000\\ &= x^3+4002x^2-4992000x-10000000\\ &= p(x)\end{aligned}$$

2. Tableau de signe du polynôme $p(x)$. On a $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -5000$ ou $x = -2$ ou $x = 1000$. Ainsi le tableau de signe de $p(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-5000		-2		1000		$+\infty$
$x - 1000$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x + 5000$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x + 2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation $p(x) \leq 0$ a pour ensemble solution $S = [-5000, -2] \bigcup [1000, +\infty[$.

3. Solution de la situation problème. Le coût de fabrication (en milliers de FCFA) de x voitures est modélisé par la fonction par $c_p(x) = 5000000x$ et la prix de vente de x voitures est donnée par $p_v(x) = x^3 + 4002x^2 + 8000x + 10000000$. pour que la production soit rentable, il faut que l'inéquation $p_v(x) - c_p(x) \geq 0$. Ainsi on a l'inéquation $x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000 > 0$. Ainsi, la production sera rentable lorsque cet entreprise produira plus de 1000 voitures.

Resumé 1.0.4. Pour résoudre une équation faisant intervenir un polynôme $p(x)$ de degré 3, on peut utiliser le programme suivant :

1. Déterminer une racine évidente α du polynôme $P(x)$.
2. Trouver un polynôme $q(x)$ de degré 2 tel que $p(x) = (x - \alpha)q(x)$.
3. Résoudre les équations $x - \alpha = 0$ et $q(x) = 0$ puis déduire les solutions

Exercices d'applications

Exercice 1.0.14. On donne les polynômes $p(x) = x^3 - x^2 + x + 3$ et $q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 14x - 8$

1. Determiner les racines de $p(x)$ et de $q(x)$.
2. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ les inéquations $p(x) \geq 0$ et $q(x) < 0$.

Exercice 1.0.15. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^4 + 9x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ (on pourra remarquer que -4 est une solution de cette équation).

LEÇON 5 : Équations et Inéquations irrationnelles. Durée : 100 *Minutes*

Prérequis :

- Savoir résoudre une équation/une inéquation du premier et second degré.

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Résoudre une équation et inéquation irrationnelle.

Situation problème :

Monsieur KADER dispose d'un champs ayant la forme d'un triangle rectangle rectangle dont il a oublié l'une des dimensions. Il se souvient que l'un des cotés mésure $4m$ et la longueur du plus côté de ce champs est égale au double de la longueur de l'autre côté diminué de dix mètres. Aide Monsieur KADER à retrouver les dimensions de son champs.

Équations irrationnelles Activité d'apprentissage :

On considère l'équation (E) : $\sqrt{x^2+1600} = 2x - 10$.

1. Donner la contrainte de résolution sous cette équation.
2. Sous cette contrainte, résoudre alors l'équation (E) en élévant les deux membres de l'équation (E) au carré.
3. En déduire la solution de solution de la situation problème.

Resumé 1.0.5.

1. On appelle équation irrationnelle, toute équation possédant un radical (qui comporte le symbole $\sqrt{}$). Dans cette leçon, on se limitera aux équations de la forme $\sqrt{ax+b} = cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.
2. Pour résoudre une équation irrationnelle, on commence par déterminer la/les contrainte(s) et sous ces contraintes on détermine la (ou les) solution(s) qui satisfont la contrainte.
3. Soit à résoudre l'équation $\sqrt{ax+b} = cx + d$, elle se réduit au système : $\begin{cases} cx+d \geq 0 \\ ax+b = (cx+d)^2 \end{cases}$

Remarque 1.0.3. La contrainte est indispensable lorsqu'il s'agit de résoudre une équation irrationnelle

Exercices d'applications

Exercice 1.0.16. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

a) $\sqrt{4-x} = x - 2$, b) $\sqrt{7-2x} = x + 4$, c) $\sqrt{2-x} = x + 10$.

Inéquations irrationnelles

Activité d'apprentissage :

On considère l'équation (I) : $\sqrt{2-x} < x + 10$

1. Donner la contrainte de résolution sous cette inéquation.
2. Sous cette contrainte, résoudre alors l'inéquation (I) en élévant les deux membres de l'inéquation (I) au carré.

Resumé 1.0.6.

1. On appelle inéquation irrationnelle, toute inéquation possédant un radical (qui comporte le symbole $\sqrt{}$). Dans cette leçon, on se limitera aux inéquations de la forme $\sqrt{ax+b} \leq (<) cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.
2. Pour résoudre l'inéquation irrationnelle $\sqrt{ax+b} \leq cx+d$, on se réduit au système : $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ cx+d \geq 0 \\ ax+b \leq (cx+d)^2 \end{cases}$

Exercices d'applications

Exercice 1.0.17. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations :

a) $\sqrt{2-x} < x + 10$, b) $\sqrt{x-1} \leq 3 - x$

Chapitre Deux

Limites et continuité d'une fonction numérique.

Intérêt : La notion de limite permet de mettre en évidence le comportement d'une fonction dans les cas suivants :

- Lorsque la variable x est proche d'une valeur a sans pour autant l'atteindre.
- Lorsque la variable x s'éloigne infiniment de 0 (en l'infiniment grand ou en l'infiniment petit).

La continuité quant-a elle permet de résoudre des équations et au travers du théorème des valeurs intermédiaires de déterminer le nombre de solution d'une équation du type $f(x) = k$ (où f est une fonction continue et k un réel). Les notions de limites et de continuités sont donc importantes dans le processus d'étude globale et de représentation graphique d'une fonction.

Motivation : Des nombreux phénomènes naturels à l'instar de l'évolution de l'économie d'un pays, l'évolution du niveau de la mer dû au changement climatique, la croissance d'une population et bien d'autres phénomènes peuvent se modéliser au travers des fonctions mathématiques. Une fois de telles fonctions obtenues, il est donc important de pouvoir étudier leurs comportements afin de comprendre d'avantage le phénomène et de faire des prédictions. Le présent chapitre nous donne des outils indispensables pour une telle étude.

LEÇON 1 :Approche intuitive de la notion de limite. Durée : 50 Minutes

Motivation : Des nombreux phénomènes naturels à l'instar de l'évolution de l'économie d'un pays, l'évolution du niveau de la mer dû au changement climatique, la croissance d'une population et bien d'autres phénomènes peuvent se modéliser au travers des fonctions mathématiques. Une fois de telles fonctions obtenues, il est donc important de pouvoir étudier leurs comportements afin de comprendre d'avantage le phénomène et de faire des prédictions. La présente leçon nous initie donc au vocabulaire et aux notations nécessaires pour pouvoir mieux cerner le comportement d'une fonction.

Objectifs pédagogigues : A la fin de cette leçon les apprenants doivent être capable de :

- Conjecturer graphiquement ou algébriquement la limite d'une fonction.

– Calculer les limites d'une fonction à gauche ou à droite en un réel.
– Calculer les limites d'une fonction à l'infini.
– Faire le lien entre la limite et le comportement asymptotique d'une fonction.

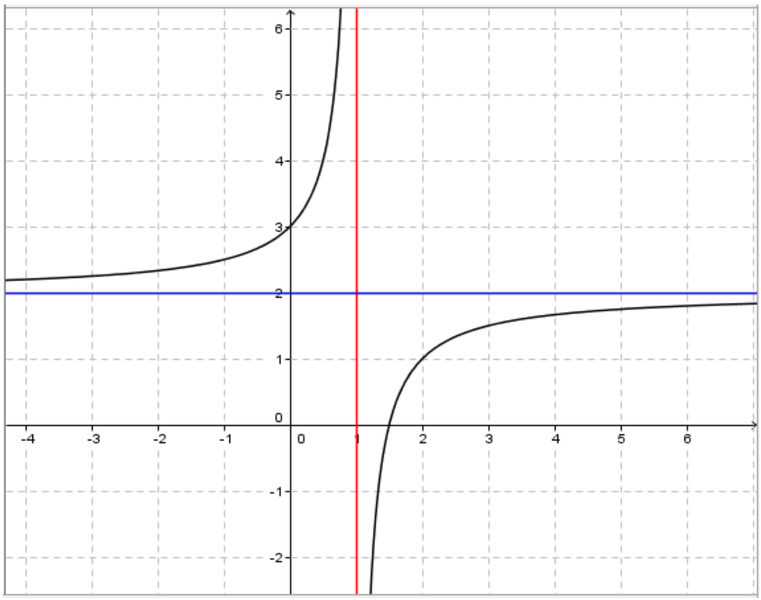
Prérequis :

– Calculer l'image directe d'un réel par une fonction continue.
– Représenter graphiquement les courbes des fonctions $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ et x^2.

Situation problème : Borel un élève de PC s'adressant à son ami Steve absent pour raison de maladie au dernier cours de mathématiques lui dit : Le prof a dit que nous verrons demain la notion de limites d'une fonction ! Thierry le grand frère de Steve qui écoutait la conversation dit : Après votre cours de demain je verrais si vous êtes capables de me montrer que la fonction f définie par $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$ n'admet pas de limites infinies en l'infiniment grand et en l'infiniment petit et qu'elle admet une unique asymptote verticale. Après avoir donné en langage mathématiques la signification du défi lancé par Thierry, aide Borel et Steve à relever ce défi.

A- Activité d'apprentissage

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$. Sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ est donnée par le graphe ci-dessous.



(a) i. Recopie et complète le tableau suivant :

x	10	30	50	100	1000	3000	10000
$f(x)$							

ii. Quel constat fais-tu ? Justifie ton constat en observant le graphe de la fonction f.

iii. Que peux-tu dire de la limite de f en l'infiniment grand ?

(b) i. Recopie et complète le tableau suivant :

x	-10	-30	-50	-100	-1000	-3000	-10000
$f(x)$							

ii. Quel constat fais-tu ? Justifie ton constat en observant le graphe de la fonction f.

iii. Que peux-tu dire de la limite de f en l'infiniment petit ?

(c) i. Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	$0,5$	$0,8$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$f(x)$							

ii. Quel constat fais-tu ? Justifie ton constat en observant le graphe de la fonction f.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2$.

(a) Recopie et complète le tableau suivant.

x	10	100	1000	10000
$h(x)$				

(b) Quel constat fais-tu entre les valeurs prises par x et celles prises par h(x) ?

Solution de l'activité

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$.

(a) i. Complétons le tableau :

x	10	30	50	100	1000	3000	10000
$f(x)$	1,88	1,96	1,97	1,98	1,99	1,999	1,9999

ii. On constate que pour des valeurs de plus en plus grandes de x, $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proche de 2. En effet en observant le graphe de f il vient que pour des valeurs progressivement grandes de x la courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = 2$.

On dit donc que f a pour limite 2 en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

iii. On peut donc dire que en l'infiniment grand, f n'admet pas de limite infinie.

(b) i. Complètons le tableau :

x	-10	-30	-50	-100	-1000	-3000	-10000
$f(x)$	2,09	2,03	2,01	2,009	2,009	2,0003	2,00009

ii. On constate que pour des valeurs négatives et de plus en plus petites de x, $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proche de 2. En effet à l'observation du graphe de f il vient que la courbe de f est suffisamment proche de la droite d'équation $y = 2$ pour des valeurs négatives et de plus en plus petites de x.

On dit donc que f a pour limite 2 en $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

iii. On peut donc dire que en l'infiniment petit, f n'admet pas de limite infinie.

(c) i. Complètons le tableau :

x	0	$0,5$	$0,8$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$f(x)$	3	4	7	12	102	1002	10002

ii. On constate que pour des valeurs de x de plus en plus proches de 1 à gauche, $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes. En effet à l'observation du graphe de f il vient que la courbe de f est suffisamment proche de la droite d'équation $x = 2$ pour des valeurs de x de plus en plus proche de 1.

On dit donc que f a pour limite $+\infty$ à gauche de 1 et on note $\lim_{x \to_< 1} f(x) = +\infty$. Du fait de cette limite, il vient que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2$.

(a) Complétons le tableau :

x	10	100	1000	10000
$h(x)$	100	10000	1000000	100000000

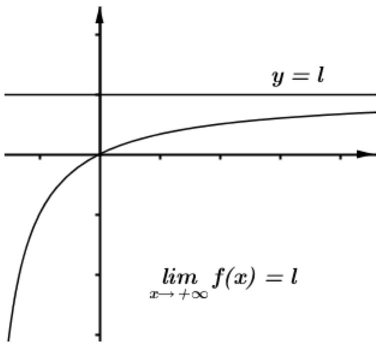
(b) On constate que $h(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes pour des valeurs de plus en plus grandes de x.

On dit dans ce cas que h a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

B- Résumé

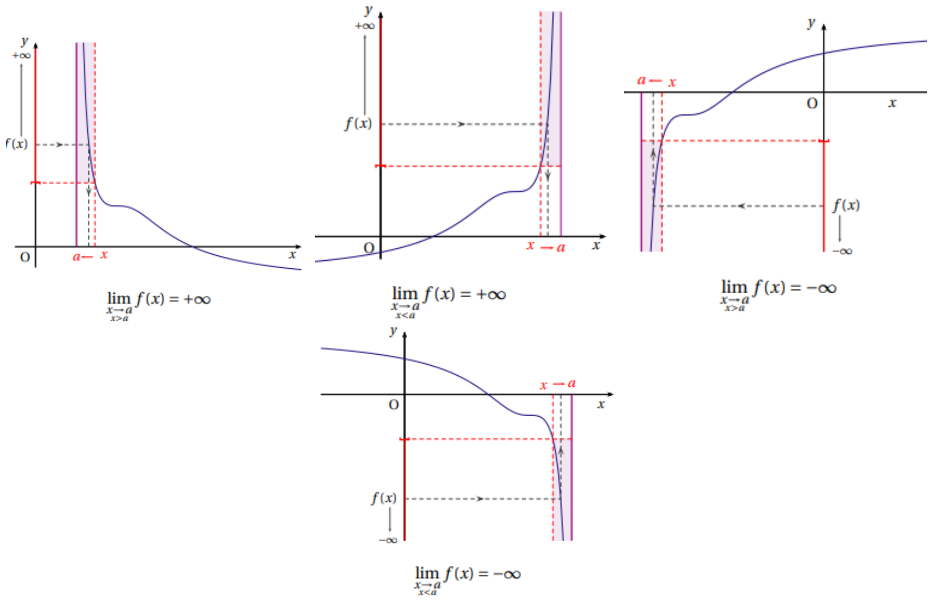
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle.

– Si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches d'un nombre réel l lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes, on dit f a pour limite l en $+\infty$. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Dans ce cas la droite (D) d'équation $y = l$ est appelé asymptote horizontale à la courbe de f.

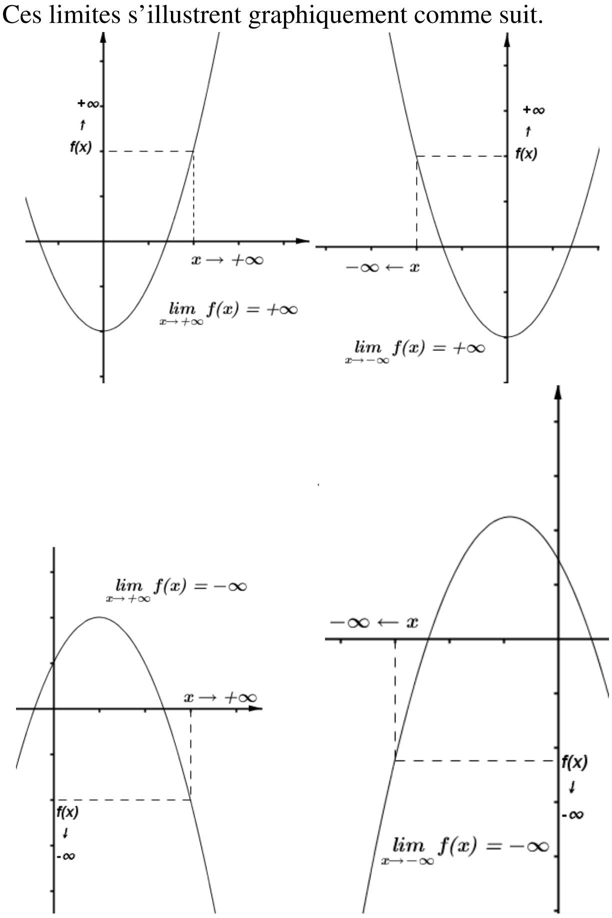


– Si $f(x)$ devient aussi proche de l que l'on veut dès que x prend des valeurs de plus en plus proche d'un nombre réel a, on dit que f a pour limite l en a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

– On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à droite et on note $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to_> a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grande que l'on veut pour x suffisamment proche de a. On dit dans ce cas que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f. On a aussi $\lim_{x \to_> a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to_< a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to_< a} f(x) = -\infty$. Ces limites s'illustrent graphiquement comme suit.



– Si l'ensemble de définition de f contient un intervalle de la forme $[b;+\infty[$, et si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On à aussi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Ces limites s'illustrent graphiquement comme suit.



– Si l'ensemble de définition de f contient des intervalles de borne $-\infty$ ou $+\infty$ et (D) une droite d'équation $y = ax + b$. On dira que la droite (D) : $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (ou en $-\infty$) si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ (ou $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$).

– Limites des fonctions usuelles.

$\lim_{x\to+\infty} k = k (k \in \mathbb{R})$	$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} ax = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} k = k (k \in \mathbb{R})$	$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$\lim_{x\to-\infty} ax = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$	$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x\to>0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$	$\lim_{x\to>0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x} =$ non définie	$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$ non définie	$\lim_{x\to<0} \frac{1}{\sqrt{x}} =$ non définie	$\lim_{x\to<0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

C- Exercices d'applications

1. En te servant du graphique de la fonction f de l'activité, détermine : $\lim_{x\to>1} f(x)$.
2. Déduire de chacune des limites suivantes, l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe de f.

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3,\quad b)\ \lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty,\quad c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\quad d)\ \lim\limits_{x\to>0} f(x) = +\infty$

$e)\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0,\quad f)\ \lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty,\quad g)\ \lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$

LEÇON 2 : Opérations sur les limites. Durée : 50 Minutes

Motivation : Des nombreux phénomènes naturels à l'instar de l'évolution de l'économie d'un pays, l'évolution du niveau de la mer dû au changement climatique, la croissance d'une population et bien d'autres phénomènes, peuvent se modéliser au travers des fonctions mathématiques. Une fois de telles fonctions obtenues, il est donc important de pouvoir étudier leurs comportements afin de comprendre d'avantage le phénomène et de faire des prédictions. La presente leçon nous donne donc les outils nécessaires pour pouvoir cerner plus aisément le comportement d'une fonction.

Objectifs pédagogiques : A la fin de cette leçon les apprenants doivent être capable de :

- Déterminer la limite de la somme, du produit, du quotient et de la composée de deux fonctions.
- Déterminer les limites d'une fonction en l'infini en utilisant les techniques de comparaison.

Prérequis :

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Calculer intuitivement la limite d'une fonction.

Situation problème : M.SIMO après être tombé malade s'est vu administrer dans un hopital une certaine concentration d'un médicament. Sur le coup des effets indésirable dû à ce médicament, M. SIMO a fait des recherches sur le net et s'est rendu compte que la diminution de la concentration C (en g/ml) dans le sang de ce médicament au cours du temps t (en heures) est donnée par : $C(t) = \frac{20t}{t^2+4}$. Il se pose donc la question de savoir après combien de temps la concentration de ce médicament sera nulle dans son corps. Aide M. SIMO à trouver une réponse à son intérrogation.

A- Activité d'apprentissage

1. On considère la fonction C définie par $C(t) = \frac{20t}{t^2+4}$.
   (a) En remarquant que $C(t)$ peut encore s'écrire comme suit : $C(t) = \frac{t^2(\frac{20}{t})}{t^2(1+\frac{4}{t^2})} = \frac{\frac{20}{t}}{1+\frac{4}{t^2}}$, calcule $\lim_{t\to+\infty} \frac{20}{t}$, $\lim_{t\to+\infty} 1 + \frac{4}{t^2}$ puis déduire $\lim_{t\to+\infty} C(t)$
   (b) Quel énoncé peux-tu formuler en réponse à l'intérogation de M. SIMO.
2. On désigne par g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$. On souhaite calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
   (a) On pose $u(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Calcule $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim_{x\to 2} v(x)$.
   (b) En remarquant que $g(x) = v \circ u(x)$, en déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
3. On souhaite déterminer en $+\infty$ la limite de la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par :
   $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
   (a) Montre que $\forall x > 0, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.
   (b) Montre que $\forall x > 0, \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   (c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}$, puis déduit $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

Solution de l'activité

1. On considère la fonction C définie par $C(t) = \frac{20t}{t^2+4}$.
   (a) Calculons les limites suivantes : $\lim_{t\to+\infty} \frac{20}{t} = 0$, $\lim_{t\to+\infty} 1 + \frac{4}{t^2} = 1$ car $\lim_{t\to+\infty} \frac{4}{t^2} = 0$ de ce qui précède, intuitivement il vient que $\lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{0}{1} = 0$
   (b) Nous pouvons répondre à M. SIMO en lui disant que en tout temps de sa vie, une certaine concentration (même infirme) de ce médicament sera présente dans son sang.
2. (a) Calculons les limites suivantes :$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to 2} v(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$.
   (b) Déduisons $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. D'après ce qui précède on a :
   $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} u(x) = 2 \\ \lim_{x\to 2} v(x) = \sqrt{2} \end{array}\right\} \text{puisque } g(x) = v\circ u(x), \lim_{x\to+\infty} g(x) = \sqrt{2}$$
3. On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
   (a) En conjuguant l'expression de h, on a :
   $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$
   (b) Montrons que $\forall x > 0, \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   $\forall x > 0, \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{x+1}$ et donc $2\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. En passant à l'inverse on a : $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq 2\sqrt{x}$ d'où $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq 2\sqrt{x}$.
   (c) Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}$, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$. Déduction de $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
   $$\left.\begin{array}{l} \forall x > 0, \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \lim_{x\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \end{array}\right\} \text{il vient que } 0 \leq \lim_{x\to+\infty} h(x) \leq 0, \text{d'où } \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

B- Résumé

1- Opérations sur les limites

1.1- Limite d'une somme de deux fonctions

Soient l et l' deux nombres réels.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Exemple : Déterminons la limite à droite de 0 de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x}$.
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to_> 0} x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x\to_> 0} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim_{x\to_> 0} f(x) = +\infty.$$

1.2 Limite du produit de deux fonctions.

Soient l et l' deux nombres réels.

Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) =$	l	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et si $\lim_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim_{x\to\alpha}(f(x)\times g(x)) =$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I*

Exemple :Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2(\frac{1}{x}-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-1 = -1\end{array}\right\} \text{donc par produit} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

1.3 Limite d'un quotient de deux fonctions.

Soient l et l' deux nombres réels.

Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0	$l\neq 0$
et si $\lim_{x\to\alpha} g(x) =$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	l'	l'	$\pm\infty$	0	0
alors $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$\begin{cases}+\infty & \text{si } l'>0\\ -\infty & \text{si } l'<0\end{cases}$	$\begin{cases}-\infty & \text{si } l'>0\\ +\infty & \text{si } l'<0\end{cases}$	*F.I*	*F.I*	$\pm\infty$

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+2}{\frac{1}{x}-2}$. Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} x^2+2 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}-2 = -2\end{array}\right\} \text{donc par quotient} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

1.4 Composition des limites

Soient f et g deux fonctions et a,b et c des réels ou $\pm\infty$, $\left.\begin{array}{l}\text{si } \lim_{x\to a} f(x) = b \\ \lim_{x\to b} g(x) = c\end{array}\right\}$ alors $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$.

2- Limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles.

2.1 Fonctions polynômes

Une fonction polynôme a même limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que son monôme de plus haut degré.

Exemple : On donne le polynôme P définie par $P(x) = 5x^3 - 3x + 1$.

On a $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$.

2.2 Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la limite du rapport du monôme de plus haut degré de son numérateur sur celui de son dénominateur.

Exemple : Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x}$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0.$

2.3 Quelques techniques pour lever l'indétermination

La factorisation

Calculons les limites suivantes : $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{3x^2-5x-12}$; $\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{x-2}$.

La conjugaison

Calculons les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x+\sqrt{x^2-3}}$

3. Limites et comparaison

On désigne par α soit un nombre réel, soit $-\infty$ ou soit $+\infty$ d'un intervalle I.

Propriété 1 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, l et l' deux réels. Si pour tout $x \in I, f(x) \leq g(x)$, si $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \alpha} f(x) = l \\ \lim_{x \to \alpha} g(x) = l' \end{array}\right\}$ alors $l \leq l'$.

Propriété 2 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, l et l' deux réels.

- Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Propriété 3 : (Théorème des gendarmes) Soient f,g et h trois fonctions définies sur un intervalle I, soit l un réel. Si pour tout $x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \alpha} f(x) = l \\ \lim_{x \to \alpha} h(x) = l \end{array}\right\}$ alors $\lim_{x \to \alpha} g(x) = l$.

C- Exercices d'applications

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$.
   (a) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Détermine $\lim_{x \to 2}(2x-5)$ et $\lim_{x \to 2}(x-2)$. Précise le signe de $x-2$ en fonction de x.
   (c) En déduire les limites suivantes :$\lim_{x \to_< 2} f(x)$ et $\lim_{x \to_> 2} f(x)$.
2. Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \to_> -2} \frac{x+7}{x^2-4}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-5x+6}{9-x^2}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{4x+3}{5+x}}$$

$$\lim_{x \to_> 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x^2-1}\right), \qquad \lim_{x \to_> 3} \frac{-2}{-x+3}, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$$

LEÇON 3 : Notion de continuité. Durée : 50 Minutes

Motivation : L'importance des fonctions continues vient de leur simplicité et de leur utilité pour décrire des situations de la vie réelle. Par exemple, on peut décrire de la plus bonne des façons la hauteur d'un poids en oscillation sur un ressort à l'aide d'une fonction sinusoïdale.

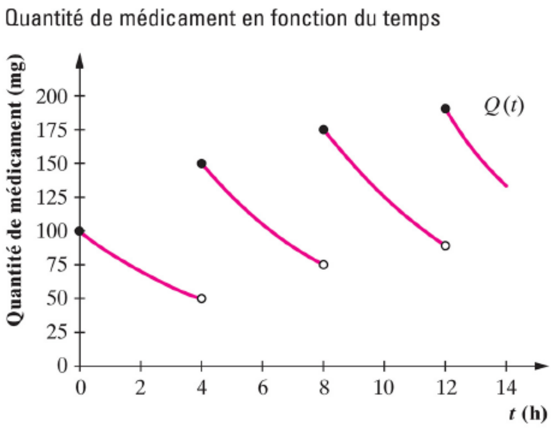
Objectif pédagogique : A la fin de cette leçon, les apprenants doivent être capable de :

– Reconnaître sur un graphique si une fonction est continue ou non.
– Etudier la continuité d'une fonction en un réel et sur un intervalle.
– Montrer qu'une fonction admet un prolongement par continuité et le définir.

Prérequis :

– Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
– Déterminer l'image directe d'un point par une fonction.
– Calculer les limites d'une fonction.

Situation problème : Un laboratoire pharmaceutique après avoir conçu un médicament pour lutter contre une pathologie indique dans sa notice que pour un patient adulte souffrant de cette pathologie, une dose de 100 mg de ce médicament doit lui être administrée après chaque 4h de temps. Il propose donc dans cette notice le diagramme suivant à titre illustratif.



Un patient du prénom de Kevin atteint de cette pathologie lit la notice en question et ne comprend pas l'illustration ainsi faite et sollicite ton aide. Que peux-tu lui dire ?

A- Activité d'apprentissage

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
   (a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   (b) Calcule $\lim_{x\to 3} f(x)$ et $f(3)$ puis compare les deux résultats obtenus.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$.
   (a) Détermine l'ensemble de définition de g.
   (b) Calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.

(c) On considère la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si } x \in D_g \\ h(1) = 3 \end{cases}$ h est-elle une fonction continue en 1 ?

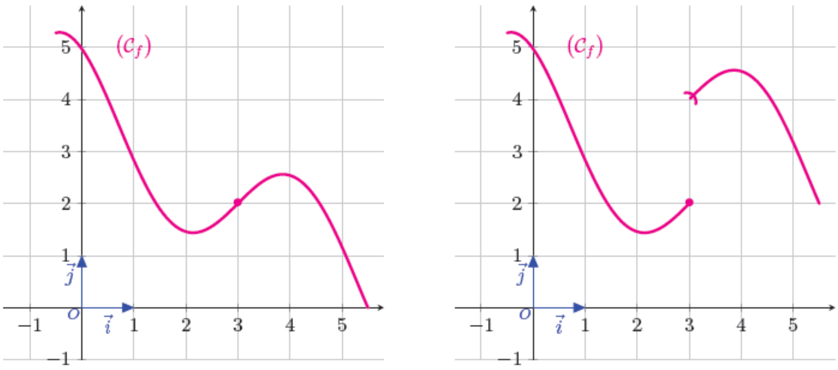
Solution de l'activité

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
   (a) Ensemble de définition de f. f existe si et seulement si $x - 2 \neq 0$ c'est dire $x \neq 2$, ainsi $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.
   (b) On a $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ et $f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$. On constate que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.
   On dit dans ce cas que la fonction f est continue au point $a = 3$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$.
   (a) Ensemble de définition de g.
   g existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$, c'est dire $x \neq 1$, ainsi
   $D_g = \mathbb{R}\backslash\{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
   (b) On a $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 2 = 3$.
   (c) La fonction h ainsi définie est continue en 1 car $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 3$.
   On dit donc que la fonction h ainsi définie est le prolongement par continuité de la fonction g.

B- Résumé

1- Définition

– Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le réel a. On dit que f est continue en a si $a \in D_f$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$. Le graphe suivant illustre le tracé d'une fonction continue au point $a = 3$ à gauche et discontinue au point $a = 3$ à droite.



– On dit que f est continue sur un intervalle I, si elle est continue en tout point de I.
– Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, a un réel tel que a n'appartient pas au D_f. On suppose que f admet une limite finie l en a. Alors la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \text{a} \\ l & \text{si } x = a. \end{cases}$ est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.

2- Propriétés

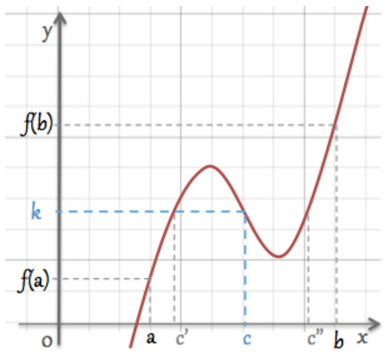
Les propriétés suivantes sont admises.

Propriété 1 :

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors $f+g$ de même que $f\times g$ sont continues sur I.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur I et $\forall x\in I, g(x)\neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g\circ f$ est continue en a.

Propriété 2 : (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a<b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$. En particulier si $f(a).f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a;b[$.



C- Exercices d'applications

1. Dans chacun des cas suivant étudier la continuité de f en x_0.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}, x_0=-2 \qquad\qquad f(x)=\begin{cases} x^2+4 & \text{si } x\leq 2\\ 3x+2 & \text{si } x>2.\end{cases} \quad x_0=2$$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<0\\ x-3 & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$ Détermine la valeur de a afin que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. On donne la fonction $f(x)=\frac{|x^2-4x-3|}{x-1}$.
   (a) Ecrire $f(x)$ sans barres de valeur absolue.
   (b) La fonction f admet-elle une limite finie en 1 ?
   (c) Définir un prolongement par continuité de f en 1.
4. Retour à la situation problème.

⋆ ⋆ **Chapitre Trois** ⋆ ⋆

SÉRIES STATISTIQUES REGROUPÉES EN CLASSES

LEÇON 1 : Généralités. Durée : 50 Minutes

Objectifs pédagogiques :

1. Calculer la moyenne, déterminer la classe modale, le mode et la médiane d'une série regroupée en classes.
2. Calculer l'écart-moyen, la variance et l'écart-type d'une série regroupée en classes.
3. Interpréter dans les situations contextuelles la signification des différents paramètres (de position et de dispersion).

Prérequis :

Savoir définir les notions telles que : Population, Individu, Effectif, Effectif total,Caractère,Classe et Fréquence.

1. **Population** : C'est l'ensemble faisant l'objet de l'étude statistique.
2. **Individu** : C'est un élément de la population.
3. **Caractère** : C'est un point commun aux individus de la population. Ici nous travaillerons sur les valeurs à caractères continus regroupée par intervalles (Taille, durée .....etc).
4. **Effectif total** : C'est le nombre total d'individus.
5. **Effectif** : C'est le nombre d'individus ayant la même valeur de caractère.

Situation problème

Dans le cadre d'un contrôle de qualité d'un produit pharmaceutique, un laboratoire d'analyse médicale veut contrôler la précision d'une méthode calorimétrique de dosage du calcium sérique. pour cela les spécialistes ont effectué 36 dosages du calcium selon les concentrations différentes proposées ; il se pose le problème de concentration moyenne pour pouvoir commercialiser le produit. Comment pouvons nous utiliser ces données pour résoudre ce problème ?

Activité d'apprentissage

On a mesuré la fluorescence de la chlorophylle (en millivolts) dans un océan. Une série de 80 mesures a donné.

Fluorescence où Tension en mv [a ;b[	[15 ;20[	[20 ;25[	[25 ;30[	[30 ;35[	[35 ;40[	[40 ;45[
Effectifs (n_i)	8	13	21	20	14	4
$c_i = \dfrac{a+b}{2}$						
$n_i \times c_i$						
$n_i \times c_i^2$						
$n_i \lvert \overline{x} - c_i \rvert$						

1. Déterminer la classe modale et le mode de cette série statistique.
2. Après avoir compléter le tableau ci-dessus calculer le moyenne, l'écart-type et l'écart-moyen de cette série statistique.

Solution

1. La classe modale est l'intervalle [25 ;30[, car c'est celle qui a le plus grand effectif. Le mode est de : 27,5
2. Complétons le tableau

Fluorescence [a ;b[	[15 ;20[	[20 ;25[	[25 ;30[	[30 ;35[	[35 ;40[	[40 ;45[	Total
Effectifs (n_i)	8	13	21	20	14	4	80
$c_i = \dfrac{a+b}{2}$	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	
$n_i \times c_i$	140	292,5	577,5	650	525	170	2355
$n_i \times c_i^2$	2450	6581,25	15881,25	21125	19687,5	7225	72950
$n_i \lvert \overline{x} - c_i \rvert$	95,5	90,1875	40,6875	61,25	112,875	52,25	452,75

La moyenne est de :

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i \times c_i \\ \overline{x} &= \frac{2355}{80} \\ &= 29,4375 \end{aligned} \tag{3.1}$$

L'écart-type est de :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{V} \\ &= 6,73 \end{aligned} \tag{3.2}$$

L'écart-moyen est de :

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i \lvert \overline{x} - c_i \rvert \\ &= 5,659 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Resumé 3.0.7. Soit [a ;b[une classe.

1. On appelle centre de cette classe le réel $C = \dfrac{a+b}{2}$
2. On appelle amplitude de cette classe le réel $A = b - a$

NB :

Étant donnés que les modalités sont des variables discrètes, les modes et les classes modales seront définis à partir des effectifs et non des densités. Autrement dit

- **La Classe modale** sera la classe qui a le plus grand effectif et **le mode** est le centre de la classe modale.

1. On appelle effectif cumulé croissant d'une modalité le nombre d'individu dont l'effectif est inférieur ou égal à cette modalité.
2. On appelle effectif cumulé décroissant d'une modalité le nombre d'individu dont l'effectif est supérieur ou égal à cette modalité.
3. On appelle médiane d'une série statistique la modalité qui correspond à la moitié de l'effectif total. La classe médiane est la classe qui contient la médiane.
4. La moyenne d'une série statistique est le réel $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i \times c_i$, où n_i est l'effectif de centre c_i.
5. L'écart moyen d'une série statistique est le réel positif $e_m = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i\,|\overline{x} - c_i|$. L'écart-moyen permet de mesurer la dispersion d'une série.
6. La variance d'une série statistique est le réel positif $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i\,(\overline{x} - c_i)^2$. La formule de **KEONIG** $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i \times c_i^2 - \overline{x}^2$ permet de calculer plus facilement la variance.
7. L'écart type d'une série statistique est le réel positif $\sigma = \sqrt{V}$.
8. L'intervalle $]\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma[$ est appelé **intervalle moyen**. Le pourcentage d'observations contenues dans cette intervalle donne une mesure de la concentration des observations autour de la moyenne.

Exercices d'applications

On considère une série statistique dont les fréquences sont données par le tableau suivant :

Classes	[0 ;3[	[3 ;5[	[5 ;7[	[7 ;10[
Fréquence	10%	25%	35%	30%

1. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.
2. Sachant que l'effectif total de la population est 60,dresser le tableau des effectifs de cette série ; puis déduire le classe modale et son mode.

LEÇON 2 : Représentation Graphique et détermination de la Médiane Durée : 50 minutes

Objectifs pédagogiques

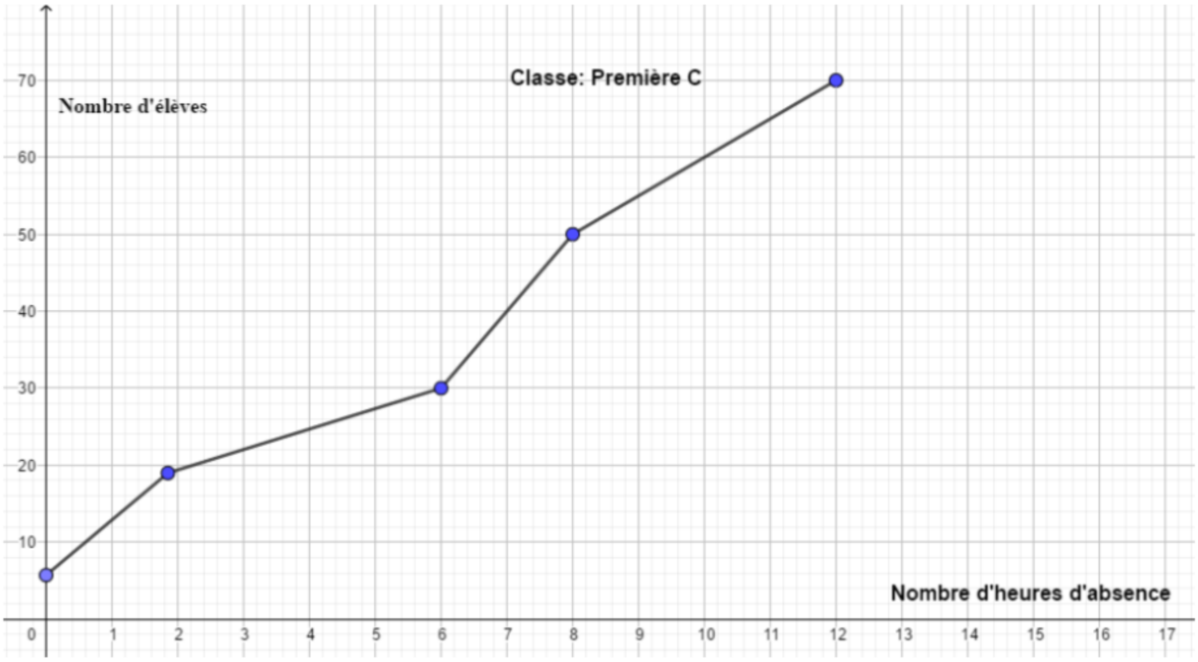
1. Construire et interpréter un histogramme .
2. Construire et interpréter la courbe des effectifs où des fréquences cumulées.
3. Déterminer le valeur exacte de la médiane graphiquement et par interpolation linéaire.

Prérequis

1. Savoir définir un repère orthogonal et y placer les points.
2. Savoir représenter les points suivant une échelle.

Situation problème

Suite à des nominations au Ministère des Enseignements Secondaires, Mr Toukam enseignants de Français au Lycée classique de Bafoussam vient d'être Nommé Surveillent Général dans ce même Lycée. Pour mener à bien son travail de discipline, il aimerait connaitre l'état disciplinaire des élèves de la classe de première C. le seul document mis à sa disposition est un graphe produit par son prédécesseur. Aide Mr Toukam à reconstituer le tableau des absences dans cette salle de classe.



Activité d'apprentissage

A l'issu d'une compétition d'athlétisme, l'on a enregistré les résultats du saut-en longueur regroupés en classes dans le tableau ci-dessous.

Longueur en mètre (m)	[0 ;5[	[5 ;7[	[7 ;10[	[10 ;12[	[12 ;14[	[14 ;16[	Total
Effectifs (n_i)	6	8	10	3	1	1	29
Amplitude							
Densité							
$Hauteur = Densit \times 10$							
Effectifs cumulés croissants (ECC_i)							
Effectifs cumulés décroissants (ECD_i)							

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Dans un repère orthogonal, représente des rectangles juxtaposés dont en abscisses on a les bases qui sont les classes et en ordonnées les hauteurs classes. (Échelle 1cm pour 2 unités sur l'axe des abscisses et 1cm pour

5 unités en ordonnées).

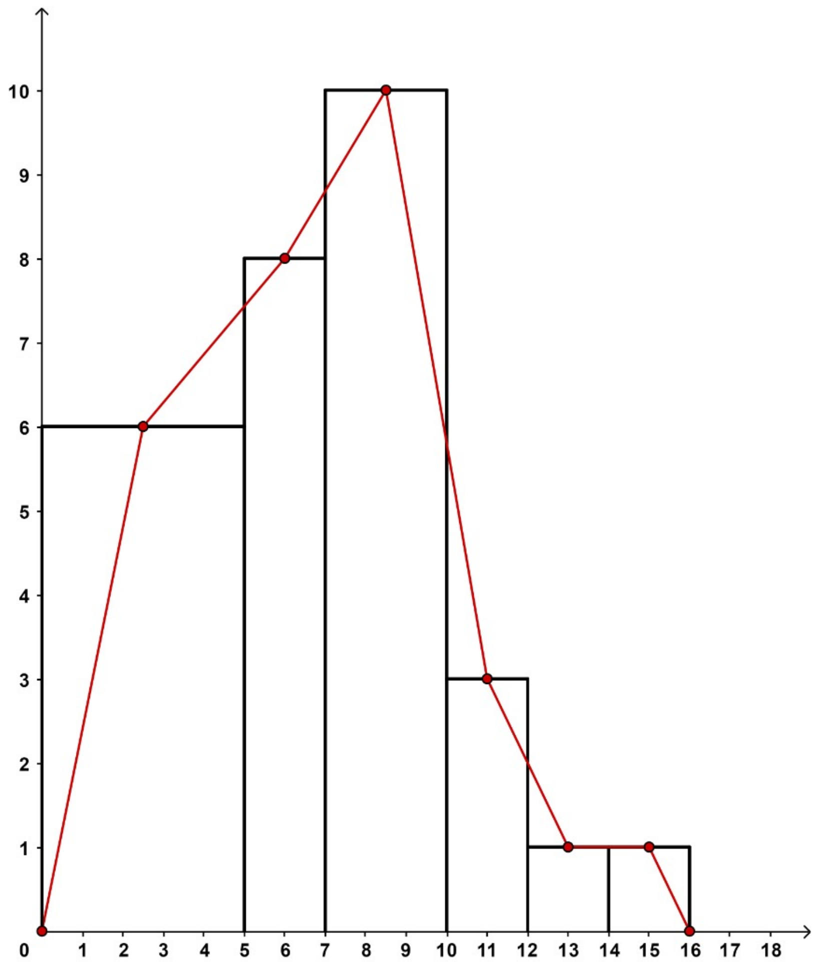
3. Dans un repère orthogonal, place les points $A_i(x_i; ECC_i)$ et $B_i(x_i; ECD_i)$; puis relier ces points par des segments de droites.(Échelle : 1cm pour 2 unités en ordonnées et 1 cm pour 1 unités en abscisses)

Solution

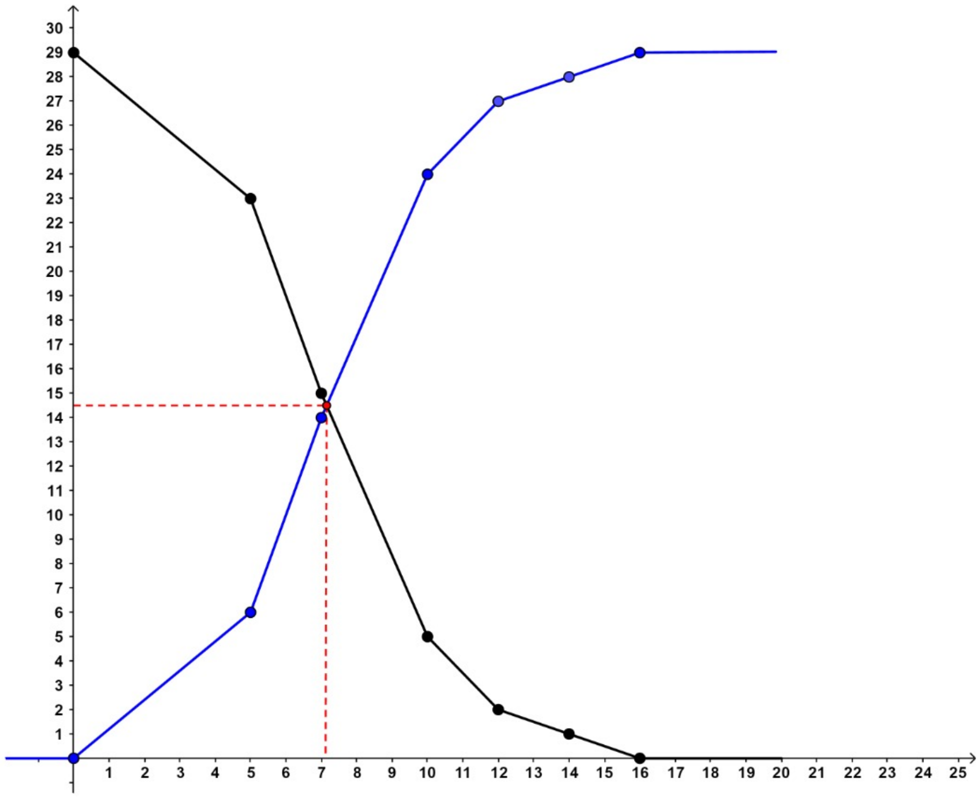
1. Complétons le tableau suivant

Longueur en mètre (m)	[0 ;5[	[5 ;7[	[7 ;10[	[10 ;12[	[12 ;14[	[14 ;16[	Total
Effectifs (n_i)	6	8	10	3	1	1	29
Amplitude	5	2	3	2	2	2	
Densité	1,2	4	3,33	1,5	0,5	0,5	
$Hauteur = Densit \times 10$	12	40	33,3	15	5	5	
Effectifs cumulés croissants (ECC_i)	6	14	24	27	28	29	
Effectifs cumulés décroissants (ECD_i)	29	23	15	5	2	1	

2. Représentation graphique



3. Représentation graphique



Resumé 3.0.8.

1. L'histogramme d'une série statistique est un ensemble de rectangles juxtaposés dont les bases sont les amplitudes des classes et les hauteurs sont proportionnelles aux densités de ces classes.
2. Le polygone des effectifs est une ligne brisée obtenue en joignant les milieux des segments supérieurs de chaque rectangles de l'histogramme.
3. Le polygone des effectifs cumulés croissants (resp décroissants) est une ligne brisée joignant les points ayant pour abscisse la borne supérieure (resp la borne inférieure) de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé de la classe.
4. A l'aide du polygone des ECC où des ECC , on détermine la médiane d'une série statistique. En effet la médiane est l'abscisse du point de l'effectif cumulé croissant où décroissant dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total $\left(\dfrac{N}{2}\right)$.
   La valeur exacte de la médiane se détermine par **Interpolation linéaire** : on utilise les points alignés de l'un des polygones des effectifs cumulés.
   $A(x_A; y_A)$, $M(M_e; \dfrac{N}{2})$ et $B(x_B; y_B)$ et la relation $\dfrac{x_A - M_e}{y_A - \dfrac{N}{2}} = \dfrac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$ puis on tire le médiane M_e.

Remarque :

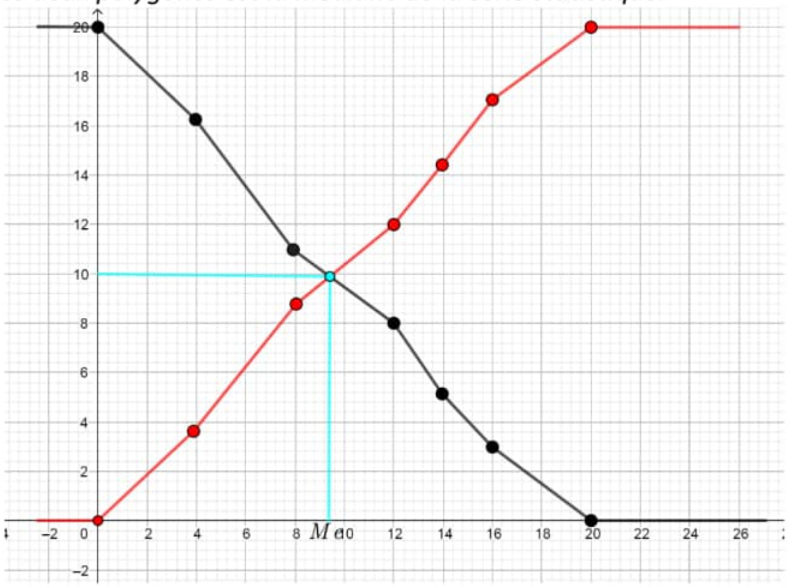
On peut aussi remplacer les effectifs par les fréquences et on obtient le polygone des fréquences cumulés. Pour calculer le médiane on remplace $\dfrac{N}{2}$ par 50 où 0,5.

Exemple : *Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants de la série suivante.*

Classes	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;14[$	$[14;16[$	$[16;20[$	*Total*
Effectifs	*38*	*50*	*32*	*24*	*26*	*30*	*200*
ECC	*38*	*88*	*120*	*144*	*170*	*200*	
ECD	*200*	*162*	*112*	*80*	*56*	*30*	

NB : *L'abscisse du point de rencontre des deux polygones est la médiane de la série statistique.*

- *EN rouge, on a le polygone des ECC*
- *En Noire, On a le polygone des ECD*



Exercices d'applications

Une enquête sur le nombre de dents saines de chaque personne d'un groupe de personnes de 40 ans a donné la série suivante :

30 ;32 ;0 ;12 ;30 ;27 ;30 ;29 ;18 ;27 ;30 ;27 ;29 ;31 ;17 ;28 ;29 ;26 ;25 ;31 ;32 ;29 ;24 ;30 ;31 ;30 ;15 ;32 ;25 ;29 ;31 ;26 ;18 ;24 ;13 ;15 ;10.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous .

Nombre de dents saines	[0 ;15[	[15 ;28[	[28 ;35[	Total
Effectifs n_i				
Centre c_i				
$n_i \times c_i$				
c_i^2				
$n_i \times c_i^2$				

2. Calculer la moyenne , la variance et l'écart-type de cette série.
3. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées décroissantes de cette série.
4. Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série.
5. Donner la classe médiane par lecture graphique et déterminer la médiane par interpolation linéaire.

Solution

1. Complétons le tableau suivant :

Nombre de dents saines	[0 ;15[	[15 ;28[	[28 ;35[	Total
Effectifs n_i	4	16	20	40
Centre c_i	7,5	21,5	31,5	
$n_i \times c_i$	30	344	630	1004
c_i^2	56,25	462,25	992,25	
$n_i \times c_i^2$	225	7396	19845	27466

2. Calcul des paramètres suivants :

La moyenne est de :

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i \times c_i \\ \overline{x} &= \frac{1004}{40} \\ &= 25,1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

La variance est de :

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i \times c_i^2 - \overline{x}^2 \\ \overline{x} &= \frac{27466}{40} - (25,1)^2 \\ &= 56,64 \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'écart-type est de :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{V} \\ &= 7,52 \end{aligned} \quad (3.6)$$

3. Tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées décroissantes

Nombre de dents saines	[0 ;15[	[15 ;28[	[28 ;35[	Total
Effectifs n_i	4	16	20	40
ECC	4	20	40	
Fréquence $\%$	10	40	50	
FCD	10	50	100	

4. Tracer du polygone des ECC de cette série

5. La classe médiane est l'intervalle [28 ;35[.

   Détermination de la médiane par interpolation linéaire.

   $M_e = 28$

MODULE XIX : RELATIONS ET OPERATIONS DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE : SYSTEMES D'EQUATIONS DANS $\mathbb{R}^2$ ET $\mathbb{R}^3$

Leçon 1 : EQUATIONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^2$: SUBSTITUTION

INTERET : Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vies et aussi communiquer des informations comportant des nombres.

MOTIVATIONS : dans la vie courante certains problèmes se résolvent à l'aide de la résolution d'un système linéaire.

PRE-REQUIS : (réponds au tableau et on note les réponses)

- on donne $3x - 7y - 1 = 0$. Exprimer y en fonction de x.

Durée :50 minutes

Situation problème (Les apprenants notent dans leurs cahiers)

Dans un champ de bataille muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, les soldats du camp ennemi sont situés sur une ligne droite dont l'équation est $2x + 4y - 1 = 0$. Le commandant en chef veut connaitre la position de chacun de ces soldats afin de programmer l'assaut.

Aidez-le.

Activité d'apprentissage

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, considérons l'équation

$(E): 2x + 3y - 1 = 0$.

a. Fixons y et exprimons x en fonction de y.

b. Donnons l'ensemble solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{R}^2$.

c. Que représente cet ensemble pour la droite (E) ?

Solution de l'activité d'apprentissage

a. Exprimons x en fonction de y.

Posons $y = \beta$, alors on obtient $(E): 2x + 3\beta - 1 = 0$. Ainsi $x = -\frac{3}{2}\beta + \frac{1}{2}$

b. Donnons l'ensemble solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble solution est $S = \left\{\left(-\frac{3}{2}\beta + \frac{1}{2}; \beta\right);\ \beta \in \mathbb{R}\right\}$

c. Cet ensemble représente l'ensemble des points situés sur la droite d'équation(E): $2x + 3y - 1 = 0$.

RESUME :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ une équation du type (E): $ax + by + c = 0$, on :

-Fixe l'une des inconnues. Par exemple, Posons $y = \beta$;

-Exprime ensuite l'autre inconnue en fonction de l'inconnue fixée. Ainsi $= -\frac{b}{a}\beta - \frac{c}{a}$, $(a \neq 0)$.

- Donne l'ensemble solution ; $S = \left\{\left(-\frac{b}{a}\beta - \frac{c}{a}\ ; \beta\right);\ \beta \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque:

-Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $y = -\frac{c}{b}$; ainsi $S = \left\{\left(t; -\frac{c}{b}\right);\ t \in \mathbb{R}\right\}$

- Si $b = 0$ alors $x = -\frac{c}{a}$; ainsi $S = \left\{\left(-\frac{c}{a}\ ; t\right);\ t \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice d'application :

1. Aidez le commandant en chef à programmer son assaut.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

(E_1): $-x + 2y + \frac{1}{3} = 0$; (E_2): $-x - \frac{1}{4} = 0$; (E_3): $y + 9 = 0$

LEÇON 2 : SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ CRAMER

INTERET : Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie et aussi communiquer des informations comportant des nombres.

MOTIVATIONS : Dans la vie courante certains problèmes se résolvent à l'aide de la résolution d'un système linéaire

PRE-REQUIS : (réponds au tableau et on note les réponses)

-Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

Durée : 50 minutes

Situation problème (Les apprenants notent dans leurs cahiers)

Sur sa parcelle de terrain, Abena fait l'élevage des poules et des chèvres. Il dispose en tout de 20 têtes et de 54 pattes. Mais ne sait pas exactement le nombre d'animaux de chaque espèce. Son fils qui est à l'université lui a communiqué le système suivant par téléphone avant une défaillance du réseau téléphonique : $\begin{cases} 2x + 4y = 54 \\ x + y = 20 \end{cases}$ où x représente le nombre de poules et y le nombre de chèvres.

Aidez-le à retrouver rapidement le nombre d'animaux de chaque espèce.

Activité d'apprentissage

A) Soit le système suivant : (S): $\begin{cases} 4x - y = 12 & (E_1) \\ x + y = 3 & (E_2) \end{cases}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (S) par substitution
2. Calculer les déterminants suivants : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$
3. Calculer $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ puis comparer le résultat à la solution de la question 1.

B) Considérons maintenant le système (S_1): $\begin{cases} x - y = 2 & (E_1) \\ 2x - 2y = 4 & (E_2) \end{cases}$

1. Montrer que (E_1) et (E_2) sont équivalents.
2. Montrer que : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

C) Considérons maintenant le système (S_1): $\begin{cases} x - y = 2 & (E_1) \\ 2x - 2y = 0 & (E_2) \end{cases}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (S) par combinaison linéaire.

2. Calculer les déterminants suivants : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$, : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

3. Que peut-on conclure de tout ce qui précède?

Solution de l'activité d'apprentissage

A) Soit le système suivant : (S): $\begin{cases} 4x - y = 12 & (E_1) \\ x + y = 3 & (E_2) \end{cases}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant (S): $\begin{cases} 4x - y = 12 & (E_1) \\ x + y = 3 & (E_2) \end{cases}$

par substitution; $(E_1) \Leftrightarrow y = 4x - 12$;

y dans $(E_2) \Leftrightarrow x + (4x - 12) = 3 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{5} = 3.$

Ainsi $y = 4(3) - 12 = 0$. $\underline{S = \{(3;0)\}}$

2. Calculer les déterminants suivants :

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times = 4 \times 1 - 1 \times (-1)$ =5 :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \times 1 - 3 \times (-1) = 15$$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times (12) = 0$

3. Calculer $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ puis comparer le résultat à la solution de la question 1.

$$\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right) = \left(\frac{15}{5}; 0\right) = (3; 0)$$

-On constate que $S = \left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$

B) Considérons maintenant le système (S_1): $\begin{cases} x - y = 2 & (E_1) \\ 2x - 2y = 4 & (E_2) \end{cases}$

3. Montrons que (E_1) et (E_2) sont équivalents.

$$(E_1): x - y = 2 \Leftrightarrow 2(x - y) = 2 \times 2 \Leftrightarrow 2x - 2y = 4 \Leftrightarrow (E_2)$$

4. Montrons que : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0,$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 4 \times (-1) = -4 + 4 = 0,$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$

C) Considérons maintenant le système (S_1): $\begin{cases} x - y = 2 & (E_1) \\ 2x - 2y = 0 & (E_2) \end{cases}$

4. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (S) par combinaison linéaire.

$$-2 \times (E_1) + (E_2) \Leftrightarrow \ 0 = -4 \ \ impossible$$

Donc $S = \emptyset$

5. Calculer les déterminants suivants : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$, : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0,$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 0 \times (-1) = -4,$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 2 = -4$

6. De tout ce qui précède, on peut conclure qu'on peut résoudre un système de deux équations à deux inconnues comme dans le résumé suivant.

RESUME :

Définition : *On appelle système linéaire de deux équations dans* R^2 *tout système de deux équations de premier degré dans* $\mathbb{R}^2$ *de la forme :*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Où a, b, c, a', b', c' *sont des nombres réels;* x *et* y *étant des inconnues.*

La résolution d'un tel système se fait par substitution, combinaison, graphiquement et par la méthode de Cramer. Bien que toutes ces méthodes restent valables ici, nous allons rappeler tout de même la méthode du déterminant (ou méthode de Cramer).

a) Méthode du déterminant (ou méthode de Cramer)

Pour résoudre le système linéaire de deux équations de premier degré dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant la méthode du déterminant, on procède comme suit :

♠ Calculer le déterminant du système : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

♠ Calculer le déterminant de l'inconnue x : $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

♠ Calculer le déterminant de l'inconnue y : $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Ces calculs étant faits, trois cas de figures se présentent :

- Si $\Delta \neq 0$, alors le système est de Cramer (admet un seul couple solution) et son ensemble solution est $S = \left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta};\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$

-Si $\Delta = 0$ et ($\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$), alors les deux équations sont incompatibles et l'ensemble solution du système est $S = \emptyset$

- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$, alors les deux équations sont compatibles et l'ensemble solution du système est $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c\}$

Exemple : *Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :*

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (1) - 2 \times (1) = 1 - 2 = -1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 7 \times (1) = -4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 2 \times 3 = 1$$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système de Cramer (admet un seul couple solution) et son ensemble solution est $S = \left\{\left(\frac{-4}{-1};\frac{1}{-1}\right)\right\}$.

$$S = \{(4; -1)\}$$

Exercices d'application

1. *Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :*

$(S_1): \begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ -2x - y = 6 \end{cases}$ $(S_2): \begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ -x - 3y = 6 \end{cases}$

$(S_3): \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -x - 3y = 6 \end{cases}$ $(S_4): \begin{cases} (m^2 + 2)x + 3y = 12 \\ -m^2x - 3y = 6 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

2. *Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants avec paramètre:*

$(S_1): \begin{cases} mx - 3y = 5 \\ 4x + (m + 7)y = 15 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$ $(S_2): \begin{cases} 2x - my = m - 1 \\ (5 - m)x - 3y = 11 - 5m \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

3. Utiliser les inconnues auxiliaires pour *Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants*

$(S_1): \begin{cases} 11\sqrt{x} + 16y^2 = 531 \\ 13\sqrt{x} + 19y^2 = 629 \end{cases}$ $(S_2): \begin{cases} \frac{3}{x-1} + 2(y - 5) = 5 \\ \frac{-2}{x-1} + 7(y - 5) = 5 \end{cases}$

$(S_3): \begin{cases} 5xy + 3x = 44 \\ 2xy - 5y = -1 \end{cases}$ $(S_4): \begin{cases} 3(2x + 3y) - 5(3x + 4y) = -1 \\ (5(2x + 3y) - 8(3x + 4y) = -1 \end{cases}$

LEÇON 3: SYSTEME LINEAIRE DE DEUX EQUATIONS DANS $\mathbb{R}^3$

INTERET : Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie et aussi communiquer des informations comportant des nombres.

MOTIVATIONS : dans la vie courante certains problèmes se résolvent à l'aide de la résolution d'un système linéaire

PRE-REQUIS : (réponds au tableau et on note les réponses)

Durée : 50 minutes

Situation problème (Les apprenants notent dans leurs cahiers)

Aminata se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25frs, 60 frs et 80 frs. Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640 frs. Ayant raconté cela au téléphone à son amie cette dernière voudrait déterminer le nombre de fruits de chaque variété.

Activité d'apprentissage

Considérons le système suivant (S) : $\begin{cases} x+y-z=2 & (L_1) \\ 2x-y+z=-1 & (L_2) \end{cases}$

1. Posons $z=\alpha \in \mathbb{R}$ .Exprimer le système en fonction de α.
2. Trouver les valeurs de x et y en fonction de α.
3. Donner l'ensemble solution du système suivant en fonction de α.
4. Que peut-on conclure ?

Solution de l'activité d'apprentissage

1. Posons $z=\alpha \in \mathbb{R}$ .Exprimons le système en fonction de α

$$(S) : \begin{cases} x+y=2+\alpha & (L_1) \\ 2x-y=-1-\alpha & (L_2) \end{cases}$$

2. Trouvons les valeurs de x et y en fonction de α

$$2(L_1)-(L_2) \Rightarrow 3y=2(2+\alpha)-(-1-\alpha)$$

$$\Rightarrow 3y=4+2\alpha+1+\alpha$$

$$\Rightarrow y=\frac{3\alpha+5}{3}$$

$$(L_1) + (L_2) \Rightarrow 3x = (2 + \alpha) + (-1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow 3x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{3\alpha+5}{3}$

3. Donner l'ensemble solution du système suivant en fonction de α.

$$S = \left\{\left(\frac{1}{3}\,;\frac{3\alpha + 5}{3}\,;\alpha\right);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

4. On peut conclure que pour résoudre un système de deux équations à trois inconnus on procède comme dans le résumé suivant :

RESUME :

Définition: *On appelle système linéaire de deux équations dans* $\mathbb{R}^3$ *tout système de la forme*

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d & (L_1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (L_2) \end{cases}$$

Où $a, b, c, d, a', b', c', d'$ *sont des réels non nuls ; x, y et z sont des inconnues réels.*

Pour résoudre un système linéaire deux équations dans R^3, on fixe une inconnue ; ce qui nous permet d'avoir un système de deux équations dans R^2 qu'on connait bien résoudre.

Exercices d'application *Résoudre dans* R^3 *les systèmes*

$$(S_1)\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 12 \\ x + 3y + z = 6 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x + 3y = 6 \\ -x - 2y + 3z = -8 \end{cases}$$

LEÇON 4 : SYSTEME LINEAIRE DE TROIS EQUATIONS DANS $\mathbb{R}^3$: pivot de Gauss

Durée : 50 minutes

INTERET : Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie et aussi communiquer des informations comportant des nombres.

MOTIVATIONS : Dans la vie courante certains problèmes se résolvent à l'aide de la résolution d'un système linéaire

PRE-REQUIS : (réponds au tableau et on note les réponses)

-Savoir faire les opérations sur des nombres réels.

Situation problème (Les apprenants notent dans leurs cahiers)

Dans une partie du parc Golden cohabitent exclusivement des rhinocéros, des taureaux et des oies tous normaux. On y compte 300 pattes, 100 têtes et 65 cornes.

Déterminer le nombre d'animaux de chaque espèce dans ce parc.

Activité d'apprentissage

Considérons le système suivant (S) : $\begin{cases} x + y - 2z = 7 \quad (L_1) \\ 2x - y + z = 0 \ (L_2) \\ 3x + y + z = 8 \ (L_3) \end{cases}$

1. Vérifier que $2(L_1) - (L_2)$ donne :$(L'_2): 3y - 5z = 14$.
2. Vérifier que $3(L_1) - (L_3)$ donne : $(L'_3): 2y - 7z = 13$.
3. Vérifier que $-2(L'_2) + 3(L'_3)$ donne : $(L''_3): z = -1$.
4. Résoudre le système : $\begin{cases} (L_1) \\ (L'_2) \\ (L''_3) \end{cases}$

La technique utilisée dans cette activité est appelée le pivot de gauss.

Solution de l'activité d'apprentissage

1. A l'aide de la première équation (L_1), éliminons x dans la deuxième équation (L_2).

$$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \quad (L_1) \\ 2x - y + z = 0 \ (L_2) \\ 3x + y + z = 8 \ (L_3) \end{cases}$$

$$2(L_1) - (L_2) \Leftrightarrow 3y - 5z = 14$$

$(L'_2) : 3y - 5z = 14$

2. A l'aide de la première équation (L_1), éliminons x dans la troisième équation (L_3).

$$3(L_1) - (L_3) \Leftrightarrow 2y - 7z = 13$$

Appelons l'équation obtenue (L'_3).

3. A l'aide de l'équation (L'_2), éliminons y dans l'équation (L'_3). Appelons l'équation obtenue (L''_3).

$$\begin{cases} 3y - 5z = 14 \\ 2y - 7z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 10z = 28 \\ -6y + 21z = -39 \end{cases}$$

$$2(L_1) - 3(L_3) \Leftrightarrow 11z = -11 \Leftrightarrow z = -1 (L''_3)$$

4. Résoudre le système : $\begin{cases} x + y - 2z = 7 \ (L_1) \\ 3y - 5z = 14 \ (L'_2) \\ z = -1 (L''_3) \end{cases}$

$$3y - 5(-1) = 14 \Leftrightarrow y = 3$$

$$x + 3 - 2(-1) = 7 \Leftrightarrow x = 2$$

$$S = \{(2; 3; -1)\}$$

RESUME :

Définition : *On appelle système linéaire de trois équations dans $\mathbb{R}^3$ tout système de la forme :*

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \quad (L_1) \\ a'x + b'y + c'z = d' \ (L_2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' \ (L_3) \end{cases}$$

Où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d' sont des réels non nuls ; x, y et z sont des inconnues réels.

La résolution d'un système linéaire de trois équations dans $\mathbb{R}^3$ se fait via la substitution ou la méthode du pivot de GAUSS. Nous allons dérouler ici la méthode du pivot de GAUSS.

La méthode du pivot de GAUSS consiste à triangulariser le système (S) ci-dessus. C'est-à-dire le rendre équivalent à un système (S') ci-après

$$(S') : \begin{cases} ax + by + cz = d \ (L_1) \\ \alpha y + \beta z = \lambda (L'_2) \\ \gamma z = \mu \ (L''_3) \end{cases}$$

Remarque :

-Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble solution.

-Lorsqu'on remplace une équation d'un système par la combinaison linéaire des équations du système, On obtient un système équivalent au système initial.

La méthode du pivot de GAUSS se déroule comme suit :

I- Fixer une des trois équations qu'on appelle pivot (supposons que notre pivot ici est (L_1))

II- Utiliser le pivot pour éliminer l'inconnue *x* dans les équations (L_2) et (L_3); on obtient ainsi les équations (L_2') et (L_3') respectivement qui ne dépendent que des inconnues *y* et *z*.

III- On fixe une des équations (L'_2) et (L'_3) (supposons qu'on a fixé (L'_2) puis on l'utilise pour éliminer l'inconnue y dans l'équation (L'_3)); ce nous conduit à l'équation (L''_3) qui ne dépend que de z.

IV- Le système triangulaire (S') est donc le système formé par $(L_1), (L'_2)$ et L''_3 dans cet ordre pour ce cas de figure.

Exercices d'application

1. Résoudre par substitution, puis par la méthode du pivot de Gauss le système :

$$a)\ \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} \\ y - 2z = \sqrt{2} \\ -2x + z = \sqrt{2} \end{cases}$$

2. Dans un théâtre, le prix d'une place d'orchestre est de 180 francs, celui d'une place de corbeille est 150 francs et celui d'une place de balcon est de 80 francs. Lorsque la salle est pleine, la recette des places d'orchestre est le double de la recette des places de corbeille. La somme des nombres de places d'orchestre et de corbeilles est le double du nombre des places de balcon. Le théâtre peut contenir 120 places. Quel est le nombre de places de chaque catégorie ?

CHAPITRE : TRIGONOMETRIE

Motivation : La trigonométrie nous donne les outils nécessaires pour le calcul des longueurs dans les triangles rectangles. Mais plus encore elle a des applications dans plusieurs domaines de la vie tels que la cartographie, la construction, la topographie, la physique, etc.…

LECON 1 : FORMULES DE TRANSFORMATION

Durée : 50minutes

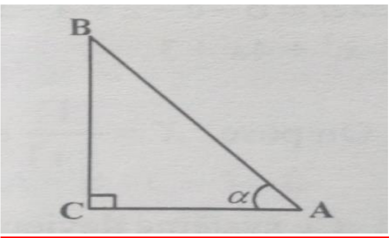
Compétences à acquérir :

_ Exprimer $cos\ (a+b)$, $cos\ (a-b)$, $sin\ (a+b)$, et $sin\ (a-b)$ à l'aide de $cos\ a$, $cos\ b$, $sin\ a$ et $sin\ b$.

_ Exprimer $tan\ (a+b)$ en fonction de $tan\ a$ et $tan\ b$.

_ Calculer sur des exemples bien choisis des valeurs exactes du cosinus, du sinus et de la tangente de certains réels ;

Prérequis :



Compléter : $\tan\alpha = -$; $\cos(-\alpha) = \cdots \ldots$; $\sin(-\alpha) = \cdots \ldots$

Situation problème :

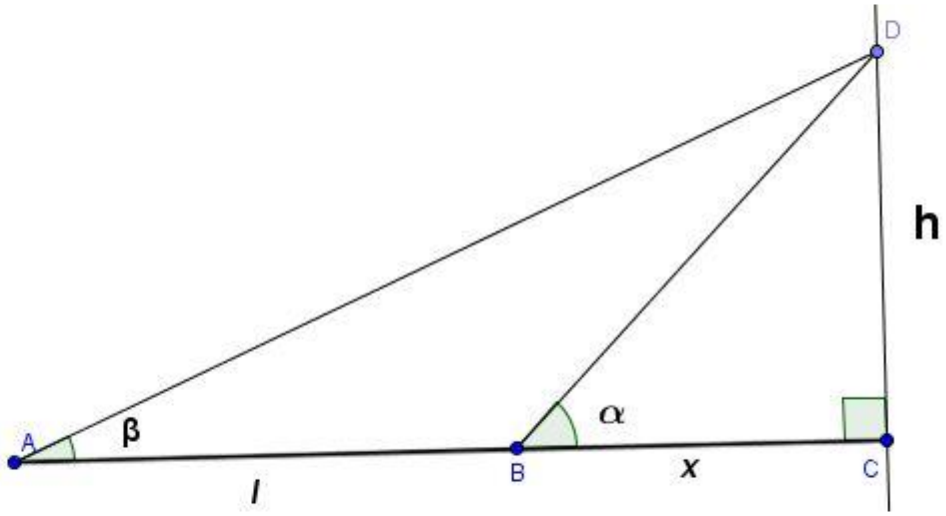
Abali, jeune topographe veut mesurer la hauteur h d'une colline. Il dispose d'un théodolite, instrument permettant la mesure d'angles. Il effectue deux mesures aux points A et B distants de 10 mètres et obtient les mesures des angles α et β de la figure ci-dessous.

mes $\alpha = 29°$ et **mes** $\beta = 27°$. On note x la distance en mètre entre B et C.

Abali dispose du manuel de topographie dans lequel il est écrit la formule suivante :

$h = l \times \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ où h est la hauteur recherchée en **m**, et l la distance en m, entre deux points d'observation.

Abali retrouve sur un extrait de la table trigonométrique les lignes trigonométriques de α et β et pas celles de $\beta - \alpha$. Aider-le à calculer la hauteur de cette colline.



Activités d'apprentissage :

1) Utiliser le triangle $\boldsymbol{BCD}$ pour exprimer $\boldsymbol{tan\ \alpha}$ en fonction de $\boldsymbol{h}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{x}$ et en déduire $\boldsymbol{h}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$.
2) Utiliser $\boldsymbol{ACD}$ pour exprimer $\boldsymbol{\tan\beta}$ en fonction de $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{x}$.
3) En déduire que $\boldsymbol{h = l \times \frac{\tan\ \alpha \tan\beta}{tan\ \alpha - \tan\beta}}$
4) En rapprochant cette nouvelle formule de $\boldsymbol{h}$ à celle qui se trouve dans le manuel de topographie, aide Abali à trouver une formule qui l'arrange autrement dit, exprimer $\boldsymbol{\sin(\beta-\alpha)}$ en fonction de $\boldsymbol{\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta}$ **et** $\boldsymbol{\cos\beta}$
5) Déduire-en une formule de $\boldsymbol{\sin(\beta+\alpha)}$

Solution de l'activité d'apprentissage:

1) Expression de $\boldsymbol{tan\ \beta}$ en fonction de **h** et $\boldsymbol{x}$ **:**

   $\boldsymbol{tan\ \beta} = \frac{h}{x}$ ainsi $\boldsymbol{h = x \times tan\ \beta}$

2) Expression de $\boldsymbol{\tan\beta}$ en fonction de $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{\tan\beta = \frac{h}{x+l}}$$

3) On a : $\boldsymbol{h = x \times tan\ \alpha \Leftrightarrow x = \frac{h}{tan\ \alpha}}$;

$$\boldsymbol{\tan\beta = \frac{h}{x+l} \Leftrightarrow \mathbf{h = (x+l)\tan\beta}}$$

Par suite : $\mathbf{h} = \boldsymbol{(\frac{h}{tan\ \alpha} + \mathbf{l})\tan\beta}$;

$\mathbf{h} - \boldsymbol{\frac{h \times \tan\beta}{tan\ \alpha} = l \times \tan\beta}$;

$\boldsymbol{\left(\frac{tan\ \alpha - \tan\beta}{tan\ \alpha}\right)} h = \boldsymbol{l \times \tan\beta}$;

$$h = \boldsymbol{\frac{l \times tan\ \alpha \times \tan\beta}{tan\ \alpha - \tan\beta}}$$

4) Expression de $\boldsymbol{\sin(\beta-\alpha)}$ en fonction de $\boldsymbol{\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta}$ **et** $\boldsymbol{\cos\beta}$

   $h = \boldsymbol{\frac{l \times tan\ \beta \times \tan\alpha}{tan\ \beta - \tan\alpha}} \Leftrightarrow$

Première C (GPM3)

$$h=\frac{l\times\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\ ;$$

$$h=\frac{l\times\sin\beta\times\sin\alpha}{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}$$

$\boldsymbol{h=l\times\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}}$ **cela dit** $\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\times\cos\alpha-\cos\beta\times\sin\alpha$

5) Pour tout x réel , $\sin(-x)=-\sin x$

On obtient : $\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\times\cos\alpha+\cos\beta\times\sin\alpha$

Résumé :

Propriété : Etant donnés deux réels α *et* β, on a :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\sin\ \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\sin\ \beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\sin\ \beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\sin\ \beta$$

Propriété 2:

Formule de duplication : Pour tout réel α, on a :

$$\cos 2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=2cos^2\alpha-1=1-2sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$$

Propriété 3:

Formule de linéarisation : Pour tout réel α, on a :

$$cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\ ;\qquad sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Application :

Retrouver $\cos\frac{\pi}{12}$ à l'aide des formules ci-dessus.

Solution : On remarque que $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$

D'où $\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)=2cos^2\frac{\pi}{12}-1.$

D'où $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=2cos^2\frac{\pi}{12}-1$ soit $cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}$ D'où $\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **ou** $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **or** $\frac{\pi}{12}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ c'est dire que $\cos\frac{\pi}{12}>0$ donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Rappel 1 : Pour tout réel x et pour tout entier relatif k on a :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos\,(x + 2\pi k) = \cos x$$

$$\sin\,(x + 2\pi k) = \sin x$$

$$\cos\,(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\,(\pi - x) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\,(-x) = \cos x$$

$$\sin\,(-x) = -\sin x$$

$$\cos\,(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin\,(x + \pi) = -\sin x$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Rappel 2 : pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad et \quad x \neq \frac{-\pi}{2} + k\pi$ (k$\in \mathbb{Z}$),

on a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

$\tan\,(x + \pi k) = \tan x$; $\qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Pour $x = y$, on obtient :

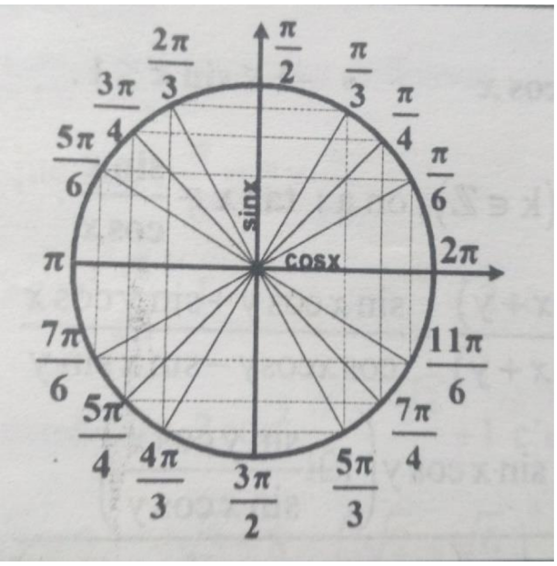
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan\,(-x) = -\tan x$$

Rappel 3 : tableau et cercle des valeurs remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

Cercle trigonométrique



Exercices d'applications :

Exercice :…………. Page (Excellence 1ere C)

LECON 2 : EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Durée : 50 minutes

Compétences à acquérir:

_ *Résoudre chacune des équations suivantes dans un intervalle quelconque de* $\mathbb{R}$ *:*

$\boldsymbol{\sin x = \alpha}$, $\boldsymbol{\cos x = \alpha}$, $\boldsymbol{\tan x = \alpha}$ ***et*** $\boldsymbol{a\cos X + b\sin X = c}$

_ *Résoudre l'équation du type* $\boldsymbol{a\cos X + b\sin X = c}$ *dans un intervalle de* $\mathbb{R}$

_ *Résoudre une inéquation où* $\boldsymbol{\sin x, \cos x, \tan x}$ *et* $\boldsymbol{a\cos X + b\sin X}$ *est comparé à un réel donné*

Prérequis :

_ Formules trigonométriques et cercle trigonométrique ;

_ Valeurs exactes des sinus, cosinus et tangentes de certains réels remarquables.

Situation problème :

Votre frère est électricien auto. Un client lui confie une batterie complément déchargée. Cette batterie est chargée à $\mathbf{10}$ volts et la relation entre la charge et le temps $\boldsymbol{t}$ en seconde est : $\boldsymbol{u(t) = 10\sqrt{2}\sin t}$.

A quel temps de l'intervalle $\left[\mathbf{0}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ le client trouvera satisfaction.

Activités d'apprentissage:

1) Montrer que $\boldsymbol{(t) = 10 \iff \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
2) A l'aide du cercle trigonométrique, retrouver $\boldsymbol{t}$.

Solution :

1) Montrer que $(t) = 10 \iff \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$u(t) = 10 \iff 10\sqrt{2}\sin t = 10$; $\sin t = \frac{10}{10\sqrt{2}}$ ainsi $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) A l'aide du cercle trigonométrique, retrouver t.

$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; sur le cercle trigonométrique $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est l'ordonnée de : $\frac{\pi}{4}$ *et* $\frac{3\pi}{4}$.

Ainsi : $\sin t = \sin\frac{\pi}{4}$ ou $\sin t = \sin\frac{3\pi}{4}$

$t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ or $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $t = \frac{\pi}{4}$.

Résumé:

I. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

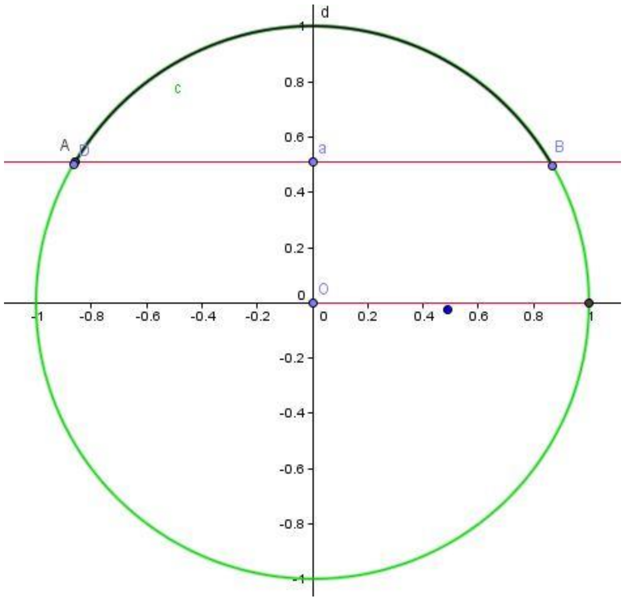
1) Equation du type : $\boldsymbol{\sin x = \alpha}$

Propriété:

_ Si $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{-1},\ \mathbf{1}]$, alors il existe un réel $\boldsymbol{\beta}$ tel que : $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$.

D'où : $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\beta} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} \end{cases}$, **(k∈ ℤ)**

_ Si $\boldsymbol{\alpha} \notin [\mathbf{-1},\ \mathbf{1}]$, alors l'équation $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$ n'admet pas de solution dans ℝ.



Exemple : résoudre dans ℝ, puis dans $[\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \sin x = -1{,}5$; $(E_2) : \sin x = \frac{1}{2}$; $(E_3) : \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$;

$(E_4) : \sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$; $(E_5) : \sin x = \frac{1}{5}$.

Solution

- $(E_1) : \sin x = -1{,}5$; $\boldsymbol{S} = \emptyset$ dans ℝ et $[0, 2\pi]$
- $(E_2) : \sin x = \frac{1}{2}$; $\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi};\ \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi};\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ et $\boldsymbol{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}};\ \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right\}$ d'après le cercle trigonométrique.
- $(E_3) : \sin\ (x + \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$;

  $\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}\ ; (\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{k})\boldsymbol{\pi};\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ **et** $\boldsymbol{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}};\ \boldsymbol{\pi}\right\}$
- $\sin 3x = \sin\ (2x + \frac{\pi}{4})$;

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi};\ \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{k\pi};\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ **et** $\boldsymbol{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}};\frac{\mathbf{9}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}};\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}};\frac{\mathbf{11}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}};\frac{\mathbf{19}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}};\frac{\mathbf{27}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}};\frac{\mathbf{35}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}\right\}$

- $(E_5) : \sin x = \frac{1}{5}$; comme $\frac{1}{5} \in [-1; 1]$, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $sin\gamma = \frac{1}{5}$

  c'est-à-dire $\sin x = sin\gamma$

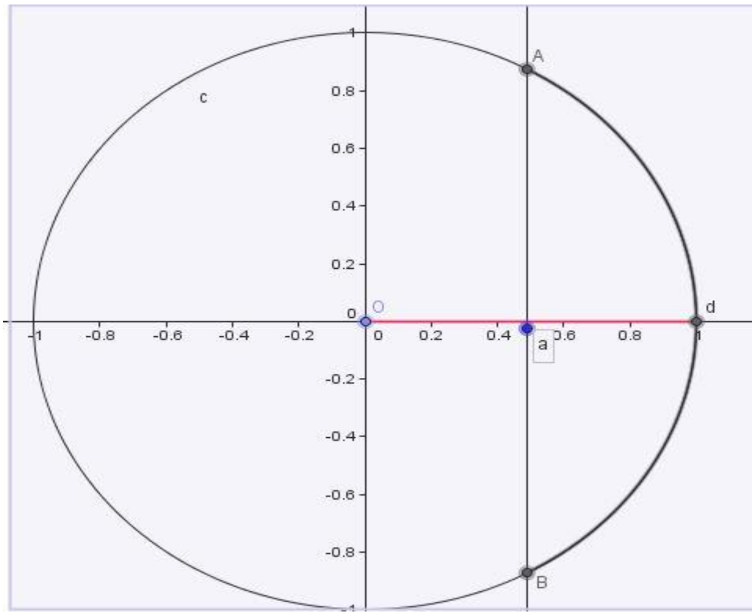
$$\text{d'où} \begin{cases} x = \gamma + 2k\pi \\ x = \pi - \gamma + 2k\pi \end{cases} ; \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \text{ et } sin\gamma = \frac{1}{5}.$$

2) *Equation du type : $\cos x = \alpha$*

_ si $\boldsymbol{\alpha} \in [-\mathbf{1}, \ \mathbf{1}]$, alors il existe un réel $\boldsymbol{\beta}$ tel que : $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$.

D'où : $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \ \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta} \ \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} \\ \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\beta} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} \end{cases}$, **(k**$\in \mathbb{Z}$**)**

_ si $\boldsymbol{\alpha} \notin [-\mathbf{1}, \ \mathbf{1}]$, alors l'équation $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.



Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$, puis $]-\boldsymbol{\pi}; \ \boldsymbol{\pi}]$chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \cos x = 3$; $(E_2) : \cos x = \frac{1}{2}$; $(E_3) : \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; (E_4) :

$\cos 2\text{x} = \cos\,(x - \frac{\pi}{3})$

Solution :

- $(E_1) : \cos x = 3$; $S = \emptyset$ dans $\mathbb{R}$ et $[0, 2\pi]$
- $(E_2) : \cos x = \frac{1}{2}$; $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \ \frac{-\pi}{3} + 2k\pi; \ \text{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ et $S_{]-\pi;\,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \ \frac{\pi}{3}\right\}$

3) *Equation du type : $\tan x = \alpha$*

Propriété :

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\boldsymbol{\beta}$ tel que $\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{tan}\,\boldsymbol{x} = \ \mathbf{tan}\,\boldsymbol{\beta} \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{k\pi}$, **k**$\in \mathbb{Z}$ avec

$\boldsymbol{x} \neq \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k\pi}$, **(k**$\in \mathbb{Z}$**).**

Exemple : résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$(E_1) : \tan x = \sqrt{3}$; $(E_2) : \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

Solution :

(E_2): $\tan(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$;

Contrainte : $x \epsilon D$, le domaine de résolution $\Leftrightarrow$

$x+\frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$ d'où $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2\pi}{3} + \boldsymbol{k\pi};\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

4) EQUATIONS DU TYPE : $a\cos x + b\sin x = c$ où a, b et c sont des réels.

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux réels non tous nuls. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

$(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{a}\cos \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\sin \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$. On pose $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

$(\boldsymbol{E})$ *devient alors*: $\frac{a}{r}\cos x + \frac{b}{r}\sin x = \frac{c}{r}$

Il existe $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ tel que : $\cos\boldsymbol{\mu} = \frac{a}{r}$ **et** $\sin\boldsymbol{\mu} = \frac{b}{r}$,

ainsi $(\boldsymbol{E}) \Leftrightarrow \cos\boldsymbol{\mu}\cos\boldsymbol{x} + \sin\boldsymbol{\mu}\sin\boldsymbol{x} = \frac{c}{r} \Leftrightarrow \cos(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) = \frac{c}{r}$

- ✓ **Si** $\left|\frac{c}{r}\right| \leq \mathbf{1}$, alors $(\boldsymbol{E})$ *admet des solutions réelles.*

  Dans ce cas, ***il existe*** $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}$ tel que : $\cos\boldsymbol{\varphi} = \frac{c}{r}$, d'ou $\cos(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) = \cos\boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow$

  $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\mu} + 2\boldsymbol{k\pi} \\ \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\mu} + 2\boldsymbol{k\pi} \end{cases}$, **(k**$\in \mathbb{Z}$**)**

- ✓ **Si** $\frac{c}{r} \notin [-\mathbf{1}; \mathbf{1}]$, alors $(\boldsymbol{E})$ *n'admet pas des solutions* dans $\mathbb{R}$

Exemple : résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

(E) : $\cos x + \sin x = \sqrt{6}$

Solution :

(E) : $\cos x + \sin x = \sqrt{6}$;

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\frac{c}{r} = \sqrt{3} \notin [-1; 1]$ Donc l'ensemble solution $S = \emptyset$ dans $\mathbb{R}$

Exercices d'applications

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos\boldsymbol{x} = \sin\frac{\pi}{7}$; $\cos 2\boldsymbol{x} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\boldsymbol{x}\right) = \cos\left(\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}\right)$;

$\tan 2\boldsymbol{x} + \tan(\boldsymbol{x} - \frac{3\pi}{4}) = \mathbf{0}$.

LECON 3 : INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Durée : 50 minutes

Compétences à acquérir:

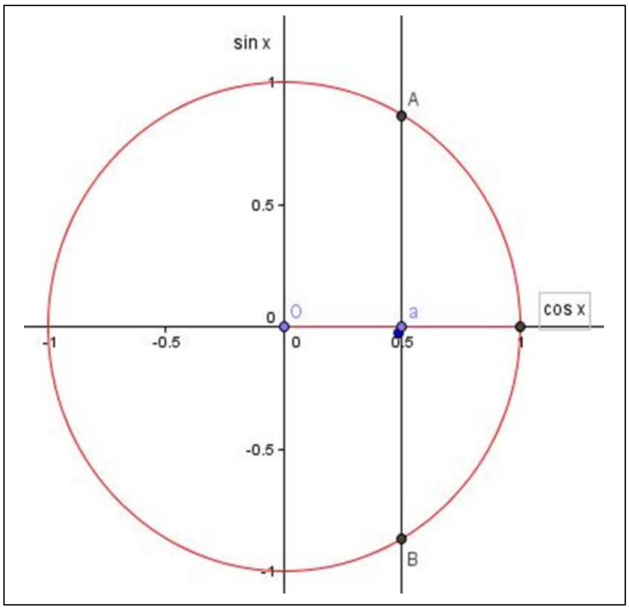
Résoudre une inéquation où $\boldsymbol{\sin x, \cos x, \tan x}$ *et* $\boldsymbol{a\cos X + b\sin X}$ *est comparé à un réel donné*

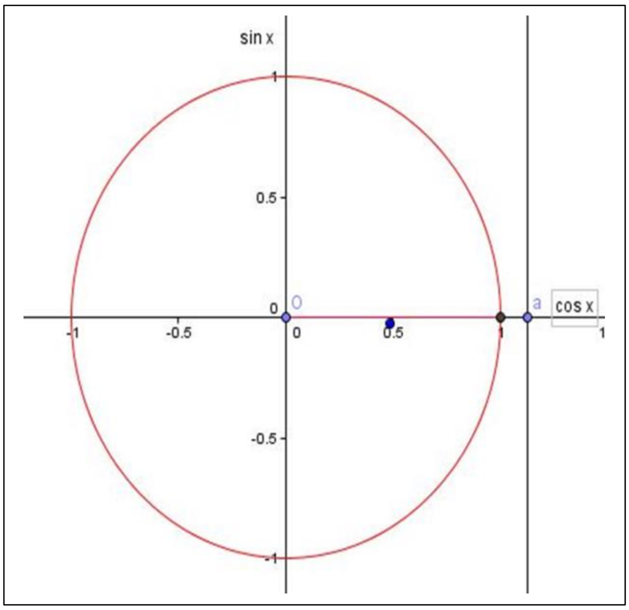
RESUME :

$(\boldsymbol{O, I, J})$ est un repère orthonormé direct et **(C)** le cercle trigonométrique. Soit **a, b** et **c** des nombres réels. Soit **(D)** la tangente à **(C)** en **I.**

1) Inéquation du type $\cos x < a, \cos x \geq a$:

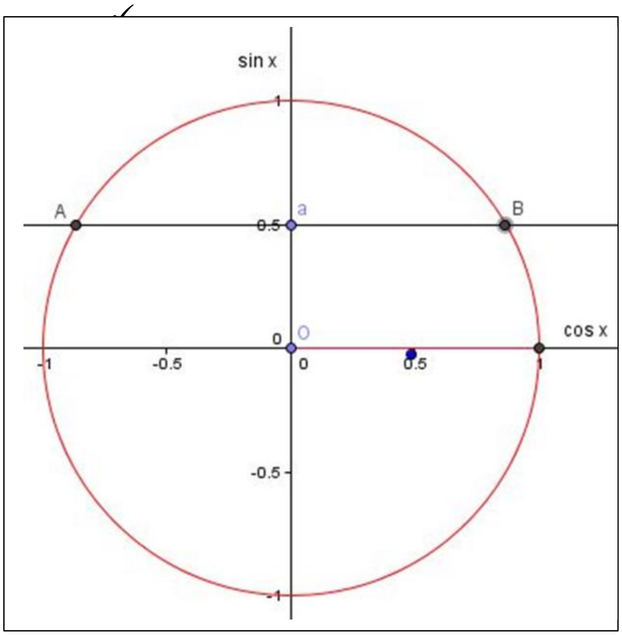
- ✓ Si $\boldsymbol{a} \notin [\boldsymbol{-1; 1}]$, alors l'ensemble des solutions de (I) est $\emptyset$ $\boldsymbol{ou}$ $\mathbb{R}$ **(illustration 1)**
- ✓ Si $\boldsymbol{a} \in [\boldsymbol{-1; 1}]$, alors il existe deux réels $\propto, \boldsymbol{\beta}$ dans l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$ tels que $\mathbf{sin} \propto = \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{a}$: l'un des arcs de **(C)** d'extrémités **A** et **B** contient tous les points $\boldsymbol{M(x)}$ tel que $\boldsymbol{x}$ soit solution de (I). **A(**$\propto$**)** et B(β) les intersections de la parallèle à l'axe des ordonnées passant le point de coordonnées (a, 0) et (C) le cercle trigonométrique **(illustartion 2)**

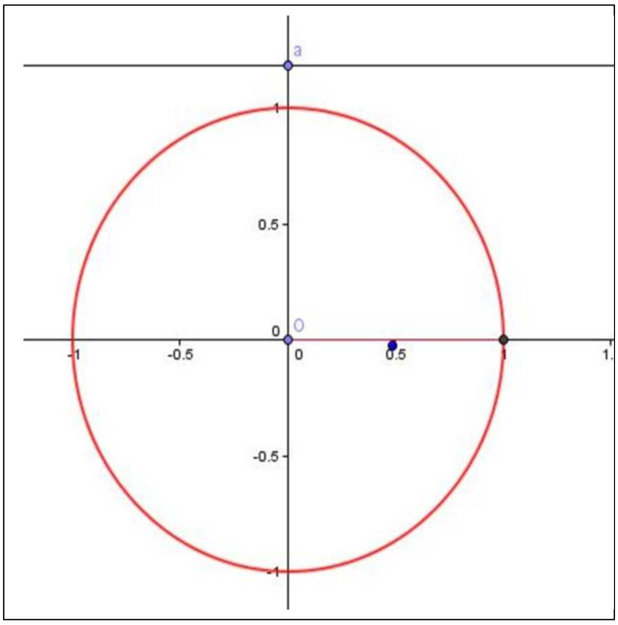




2) Inéquation du type $\sin x < b, \sin x \geq b$:

- ✓ Si $a \notin [-1; 1]$, alors l'ensemble des solutions de (I) est $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$
- ✓ Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe deux réels $\propto, \beta$ dans l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$ tels que $\sin \propto = \cos\ \beta = b$: l'un des arcs de (C) d'extrémités A et B contient tous les points $M(x)$ tel que x soit solution de (I). A($\propto$) et B(β) les intersections de la parallèle à l'axe des abscisses passant le point de coordonnées (0, b) et (C) le cercle trigonométrique.





3) Inéquation du type $\tan x < c, \tan x \geq c$:

- ✓ Il existe deux réels $\propto, \boldsymbol{\beta}$ dans l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$ tels que $\tan \propto\ = \tan\ \beta = c$, et de plus, les points A($\propto$) et B(β) sont symétriques par rapport à O.
- ✓ Soit T le point de (D) tel que $\overline{IT} = c$. La droite (OT) coupe le cercle (C) aux points A($\propto$) et B(β) sont symetriques par rapport à O.
- ✓ Les points A, B, J et J'($\frac{-\pi}{2}$) partagent le cercle (C) en quatre arcs dont deux contiennent les points M(x) tels que x soit solution de (I).

Exemple : Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

$(I_1) : \sin(2x) > -\frac{1}{2}$; $(I_2) : \cos(x) + \sin(x) \leq -\frac{1}{2}$

Solution :

$(I_1) : \sin(2x) > -\frac{1}{2}$; en posant $X = 2x$; $(I_1) \Leftrightarrow \mathbf{\sin} \boldsymbol{X} > -\frac{1}{2}$

$\mathbf{\sin}\boldsymbol{X} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{\sin}\boldsymbol{X} = \mathbf{\sin}(-\frac{\pi}{6})$

$$X = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou\ X = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

Dans $]-\pi;\ \pi]$ on obtient $X = -\frac{\pi}{6} ou\ X = \frac{-5\pi}{6}$

$\sin(2x) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ <\ 2x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, k ∈ ℤ

Soit $-\frac{\pi}{12} + k\pi\ <\ x < \frac{7\pi}{12} + k\pi$, k ∈ ℤ

L'ensemble des solutions dans ℝ est la reunion des intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi\right[$ avec k ∈ ℤ

Exercices d'applications

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes : $\mathbf{\cos}(\frac{x}{3}) \leq \mathbf{\sin}(\frac{x}{3})$ **;** $\mathbf{\cos}^2 x \geq \boldsymbol{cos}\ 2x$ **;** $\mathbf{2\cos}^2 x - 9\boldsymbol{cos}\ 2x \geq -4$

CHAPITRE : DERVATION

Leçon 1 : DERIVABILITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN REEL.

Durée : 50 minutes

A/ Objectifs pédagogiques :

- Etudier la dérivabilité d'une fonction f en un nombre réel θ par la limite en θ du taux d'accroissements $\frac{f(x)-f(\theta)}{x-\theta}$;
- Calculer le nombre dérivé d'une fonction dérivable en un réel θ ;
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'une fonction f en un réel θ ;
- Donner une approximation d'une fonction f en un nombre réel θ par une fonction affine.

B/ Motivation :

Plusieurs problèmes dans la vie courante se résolvent en s'appuyant sur le taux d'accroissements d'une fonction tels que la vitesse, l'accélération de certains mobiles ; les problèmes d'optimisation ; etc…. Cette leçon permettra de mieux aborder ces types de situations.

C/ Contrôle des pré-requis

Considérons les fonctions numériques suivantes :

$f:x\mapsto -3x^2+2$; $g:x\mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ et $h:x\mapsto \frac{\sin x}{x-1}$

Evaluer les limites de f et g en 1 ; puis la limite de h en 0.

D/ Situation problème

Lors d'une expérience au laboratoire en classe de première C, un groupe d'élève dirigé par le chef de classe **Hélène Sandra**, utilise **l'électrocardiographe** pour détecter la courbe (C_f) de battement du cœur d'une souris en fonction du temps t (en s). Les membres du groupe remarquent tous qu'il s'agit de la fonction $f:t\mapsto t+\sin 2t$ et que cette souris n'a pas un rythme constant de battements à la seconde.

Peuvent-ils trouver la vitesse de battement du cœur de cette souris à l'instant π seconde ?

NB : Ces élèves ont préalablement eu une séance de TP avec le professeur de SVT sur l'utilisation de ***l'électrocardiographe****.*

E/ Activités d'apprentissage

Une voiture roule sur une piste avec une vitesse non constante V. On note par $d(t)$ sa distance parcourue en fonction du temps t (en s).

1) Exprimer en fonction de $d(t)$ et t la vitesse moyenne de cette voiture entre deux instants rapprochés t et t_0 ;
2) a) Que devient $d(t)$ lorsque t se rapproche de plus en plus de t_0 ?

   b) Comparer V et $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$.
3) Evaluer $\lim\limits_{t \to \pi} \frac{f(t)-f(\pi)}{t-\pi}$ où f est la fonction $f : t \mapsto t + \sin 2t$.

F/ Résumé du cours

1/ Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$, avec $a\ ;\ b \in IR$; soit θ un élément de $]a\ ;\ b[$.

On dit que f est dérivable en θ si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(\theta)}{x-\theta}$ admet une limite finie lorsque x tend vers θ.

NB : Cette limite finie désigne le nombre dérivé de f en θ et notée $f'(\theta)$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to \theta^-} \frac{f(x)-f(\theta)}{x-\theta} = \lim\limits_{x \to \theta^+} \frac{f(x)-f(\theta)}{x-\theta} = f'(\theta)$

Rappel : La fonction $h : x \mapsto \frac{f(x)-f(\theta)}{x-\theta}$ est appelée taux de variation de f en θ.

Remarque :

r_1) si $\lim\limits_{x \to \theta^-} \frac{f(x)-f(\theta)}{x-\theta}$ est finie alors on l'appelle nombre dérivé de f à gauche en θ et on la note $f_g'(\theta)$.

r_2) si $\lim\limits_{x \to \theta^+} \frac{f(x)-f(\theta)}{x-\theta}$ est finie alors on l'appelle nombre dérivé de f à droite en θ et on la note $f_d'(\theta)$.

r_3) si $f_g'(\theta) \neq f_d'(\theta)$ alors la fonction f n'est pas dérivable en θ.

r_4) si $f'_g(\theta) = f'_d(\theta) = l \in \mathbb{R}$ alors la fonction f n'est pas dérivable en θ.

2/ Propriété et interprétation graphique :

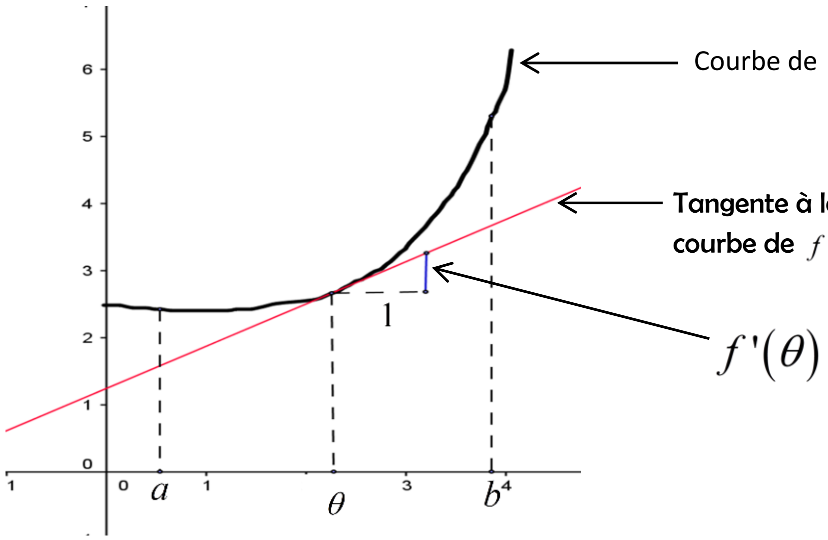
Propriété :

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$, avec $a\ ;\ b \in IR$ et dérivable en un réel θ de $]a\ ;\ b[$ alors $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\theta+h)-f(\theta)}{h}=f'(\theta)$.

Interprétation graphique :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$, avec $a\ ;\ b \in IR$. La fonction f est dérivable en un réel θ de $]a\ ;\ b[$ lorsque sa courbe admet en θ une unique tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.

Le nombre dérivé $f'(\theta)$ est la pente de cette tangente comme le montre le schéma suivant :



NB : D'après ce qui précède, la tangente à la courbe de la fonction en x_0 admet pour équation : $y=f'(\theta)(x-\theta)+f(\theta)$.

Ainsi pour tout nombre réel λ pris au voisinage de θ (très proche de θ), le nombre $f'(\theta)(\lambda-\theta)+f(\theta)$ est une valeur approchée de l'image $f(\lambda)$ de λ : on dit que la fonction numérique f est approximée au voisinage de θ par la fonction affine $g : x \mapsto f'(\theta)(x-\theta)+f(\theta)$.

G/ Exercice(s) d'application

On donne la fonction numérique $f : x \mapsto |2x-3|$ définie sur $]0\ ;\ 10[$.

1) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue ;
2) Montrer que f est dérivable en 2 et donner une équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 2 ;
3) En déduire une valeur approchée de $f(1{,}9998)$;
4) Justifier que f n'est pas dérivable en $1{,}5$.

H/ Conclusion

Exercice 1 : Mme **Aicha** est au volant d'une voiture et aborde une piste sur un plan incliné de pente 15% avec une vitesse instantanée $V(t)$ en fonction du temps t (en s).

Sa distance parcourue $d(t)$ en fonction du temps t est donnée par la relation $d(t) = -0,5gt^2 + 5t$; $(en\ m)$ en supposant qu'elle entame son voyage au pied de ce plan incliné ; où $g = 9,8\ m^2/s$ est la pesanteur au lieu du mouvement.

1) Montrer que la boite à vitesse de Mme Aicha indique une vitesse initiale de $5\ m/s$.
2) Trouver la vitesse V_1 de Mme Aicha après 10 secondes de parcours.
3) Exprimer $V(t)$ en fonction du temps t (en s).

Autres exercices à faire : Les exercices no [(1 ; 4 et 5 page 270)] du Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

Jeu Bilingue : Traduire cette phrase en français

« If $f(x)$ is differentiable at a, then $f'(a)$ exists and we have $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ » .

Leçon 2 : OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

Durée : 50 minutes

A/ Objectifs pédagogiques:

- Etudier la dérivabilité globale d'une fonction numérique f sur un intervalle ;
- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction numérique f .

B/ Motivation :

Plusieurs problèmes dans la vie courante se résolvent en s'appuyant sur les fonctions dérivables tels que les problèmes d'optimisation ; etc…. Cette leçon permettra de mieux aborder ces types de situations.

C/ Contrôle des pré-requis

1. Ecrire l'expression $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$ sans radical au dénominateur ;
2. En utilisant la division Euclidienne, factoriser le polynôme x^3-8 ; Puis simplifier l'expression $\frac{(x^3-8)(x+1)}{x-2}$.

D/ Situation problème

Paul et Isabelle sont deux élèves de la classe de première C.

De retour des olympiades en mathématiques, ils indiquent avoir utilisé respectivement les formules $\frac{g'}{g^2}$ et $-\frac{g'}{g^2}$ pour la détermination de la dérivée de la fonction $\frac{1}{g}$ où g est une fonction numérique.

Qui des deux enfants a eu raison ?

E/ Activité d'apprentissage

Activité 1 :

1- On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ et θ un nombre réel. En remarquant que $\forall \theta \in$ IR ; $x^2-\theta^2=(x-\theta)(x+\theta)$; exprimer le nombre dérivé $f'(\theta)$ en fonction de θ ;

2- Dans chacun des cas suivants où f est une fonction numérique et θ un nombre réel, exprimer $f'(\theta)$ en fonction de θ tout en précisant la condition d'existence de $f'(\theta)$:

i) $f : x \mapsto ax$; $a \in$ IR ii) $f : x \mapsto \sqrt{x}$; 3i) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$;

3- En remarquant que : $\forall n \in \mathrm{IN}$; $x^n - \theta^n = (x-\theta)\left(x^{n-1} + \theta x^{n-2} + \theta^2 x^{n-3} + \ldots + \theta^{n-2}x + \theta^{n-1}\right)$ avec θ un nombre réel ; exprimer le nombre dérivé $g'(\theta)$ en fonction de θ où g est la fonction numérique $g : x \mapsto x^n$; $n \in \mathrm{IN}^*$.

Activité 2 :

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I de IR avec g ne s'annulant pas sur I. On rappelle que : $\forall x \in I$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$;

1- Justifier que :

$$\forall \theta \in I;\ \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(\theta)}{x-\theta} = \frac{1}{g(x)g(\theta)}\left(\frac{[f(x)-f(\theta)]g(\theta) - [g(x)-g(\theta)]f(\theta)}{x-\theta}\right)$$

2- En déduire l'expression de $\left(\frac{f}{g}\right)'(\theta)$;

3- Pour $f = 1$, que vaut $\left(\frac{1}{g}\right)'(\theta)$?

F/ Résumé du cours

1/ Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.

Dans ce cas la fonction qui, à tout nombre réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f.

NB : on la note f' ou $f^{(1)}$ ou $\frac{df}{dx}$ (lorsque la variable est x) ou $\dot{f}$ (beaucoup plus en sciences physiques).

2/ Dérivation des fonctions usuelles :

Soit f une fonction numérique admettant pour fonction dérivée f'. Le tableau récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles est le suivant :

Expression de f	Domaine de définition de f	Expression de f'	Domaine de dérivabilité de f
$f(x) = a$; $(a \in \mathrm{IR})$	IR	$f'(x) = 0$	IR
$f(x) = ax$; $(a \in \mathrm{IR})$	IR	$f'(x) = a$	IR

$f(x)=x^2$	IR	$f'(x)=2x$	IR
$f(x)=x^3$	IR	$f'(x)=3x^2$	IR
$f(x)=x^n\ ;\ (n\in \mathrm{IN}^*)$	IR	$f'(x)=nx^{n-1}$	IR
$f(x)=ax^n\ ;\ (a\in \mathrm{IR}\ ;\ n\in \mathrm{IN}^*)$	IR	$f'(x)=anx^{n-1}$	IR
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{IR}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathrm{IR}\setminus\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}\ ;\ (n\in \mathrm{IN}^*)$	$\mathrm{IR}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{IR}\setminus\{0\}$
$f(x)=\cos x$	IR	$f'(x)=-\sin x$	IR
$f(x)=\sin x$	IR	$f'(x)=\cos x$	IR
$f(x)=\tan x$	$\mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in Z\right\}$	$f'(x)=1+\tan^2 x$ ou $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in Z\right\}$
$f(x)=\cos(ax+b)\ ;\ (a\ ;b\in \mathrm{IR})$	IR	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$	IR
$f(x)=\sin(ax+b)\ ;\ (a\ ;b\in \mathrm{IR})$	IR	$f'(x)=a\cos(ax+b)$	IR

3/ Propriétés sur les fonctions dérivables :

i) Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR et α un réel alors les fonctions αu ; $u+v$ et $u\times v$ sont aussi dérivables sur I et on a :

- $(\alpha u)'=\alpha(u)'$;
- $(u+v)'=u'+v'$;
- $(u\times v)'=u'v+v'u$

ii) Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR avec v ne s'annulant pas sur I alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont aussi dérivables sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2} \text{ et } \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

3i) Si v et u sont deux fonctions dérivables respectivement sur des ensembles I et $v(I)$ alors la fonction $u\circ v$ est aussi dérivable sur I et on a :

$$(u\circ v)'=v'\times u'\circ v$$

4i) Toute fonction polynôme est dérivable sur IR ;

5i) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition.

Remarque : Le mot dérivé vient du latin **derivare** qui signifie « Détourner un cours d'eau». Ce mot a été introduit pour la première fois par le mathématicien Franco-Italien Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de '**provenir**') d'une autre fonction.

G/ Exercice(s) d'application

Dans chacun des cas suivants où f est une fonction numérique. Définir clairement la fonction dérivée f' de f.

i) $f : x \mapsto 2x+3+\sqrt{x+1}$ ii) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$; 3i) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x+3}$;

H/ Conclusion

Exercices à faire :

Les exercices no [(26 et 31 page 273)] du Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

Jeu Bilingue : Traduire en français

«Suppose we have the function $f(x)=4x^3+x^2+3$. After applying the rules of differentiation, we end up with the following result : $f'(x)=12x^2+2x$.»

Leçon 3 : DERIVATION ET VARIATIONS D'UNE FONCTION NUMERIQUE.

Durée : 100 minutes

A/ Objectifs pédagogiques :

- Déterminer les extrema d'une fonction numérique sur un intervalle I de IR donné ;
- Préciser les variations d'une fonction numérique sur un intervalle I de IR donné ;
- Dresser le tableau de variations d'une fonction numérique sur un intervalle I de IR donné ;
- Résoudre les problèmes d'optimisations dans les situations concrètes de vies.

B/ Motivation :

Plusieurs problèmes dans la vie courante se résolvent en s'appuyant sur les variations d'une fonction tels que les problèmes d'optimisation (Maximisations des bénéfices ; Minimisations des charges ou dépenses ; etc….). Cette leçon permettra de mieux aborder ces types de situations.

C/ Contrôle des pré-requis

- Donner le signe du polynôme $p(x)=2x^2+3x-2$;
- Préciser l'expression $g'(x)$ de la dérivée de la fonction $g:\ x\mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

D/ Situation problème

Lors d'une course de Rallye en Espagne, la boite à vitesse du pilote **OWEN** lui indique une vitesse instantanée $V:\ t\mapsto \dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ (où t est en secondes et V en m/s) et le pilote décide faire au maximum 20400 secondes sur le parcours de cette course.

Son coéquipier **SANGO**, ayant fait les études en sciences physiques lui souffle à l'oreille que sa vitesse initiale vaut $4\ m/s$ et l'accélération instantanée de son véhicule est la dérivée de sa vitesse instantanée.

Peux-tu indiquer au pilote **OWEN** sa vitesse minimale tout au long de son parcours ainsi que l'intervalle de temps où sa vitesse reste croissante ?

E/ Activités d'apprentissage

On considère la fonction $f:\ x\mapsto \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ définie sur $IR\setminus\{-1\}$.

1- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$;

2- Montrer que : $\forall x\in IR\setminus\{-1\}$; $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$;

3- **a)** En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$;

b) Quelle est la valeur minimale de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$?

c) Quelle est la variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$?

4- Sur quel intervalle de temps la vitesse du véhicule d'**Owen** reste croissante ?

F/ Résumé du cours

1/ Définitions

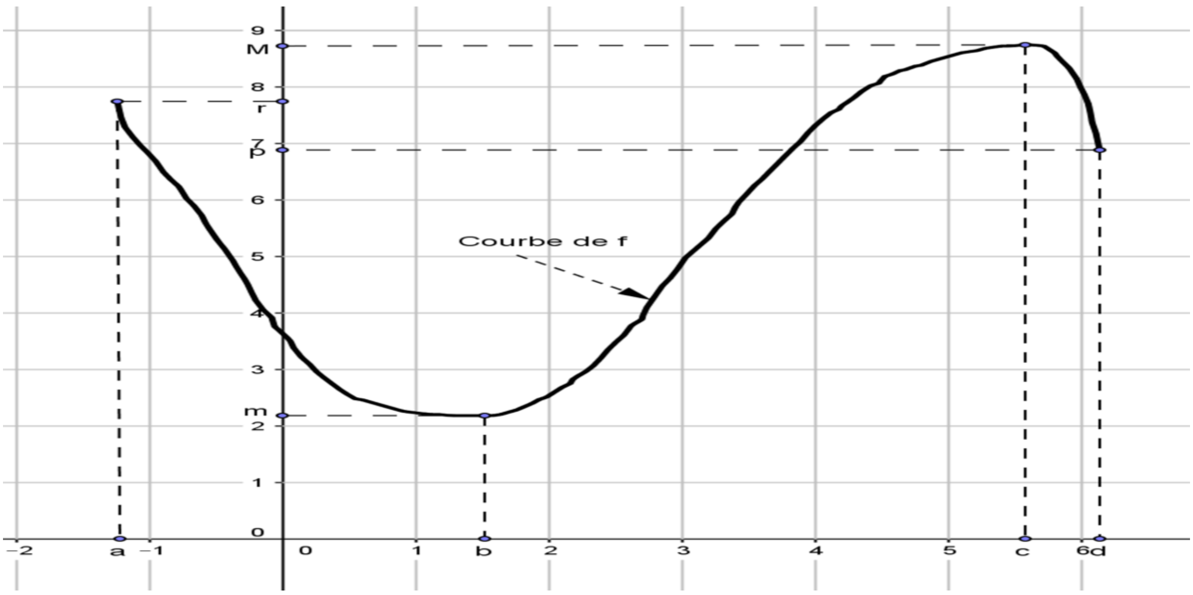
- On appelle extremum (pluriel. **extrema**) d'une fonction numérique f, l'image par f du réel θ où la fonction dérivée f' de f s'annule en changeant de signe : on dit que f atteint cet extremum en θ.
- Soit D_f le domaine de définition d'une fonction numérique f et I un intervalle de D_f :
    - On appelle maximum relatif de f sur I (s'il existe), un nombre réel M tel que : $\forall x \in I\ ;\ f(x) \leq M$.

      NB : si $I = D_f$, alors M devient le maximum de f.
    - On appelle minimum relatif de f sur I (s'il existe), un nombre réel m tel que : $\forall x \in I\ ;\ f(x) \geq m$.

      NB : si $I = D_f$, alors M devient le minimum de f.

Attention !!! Le maximum relatif et le minimum relatif d'une fonction numérique f ne sont pas toujours des extrema de f.

Illustration



2/ Variations d'une fonction dont la dérivée a un signe connu sur un intervalle donné

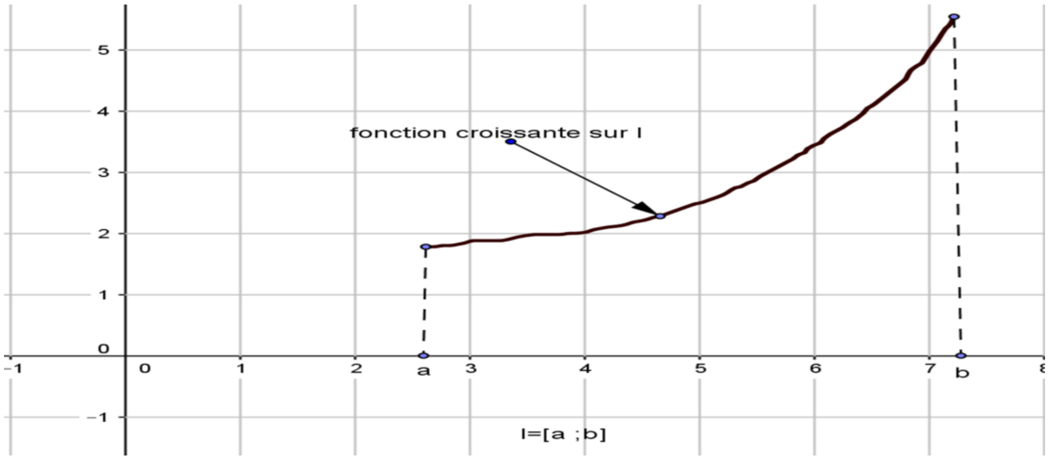
Propriétés

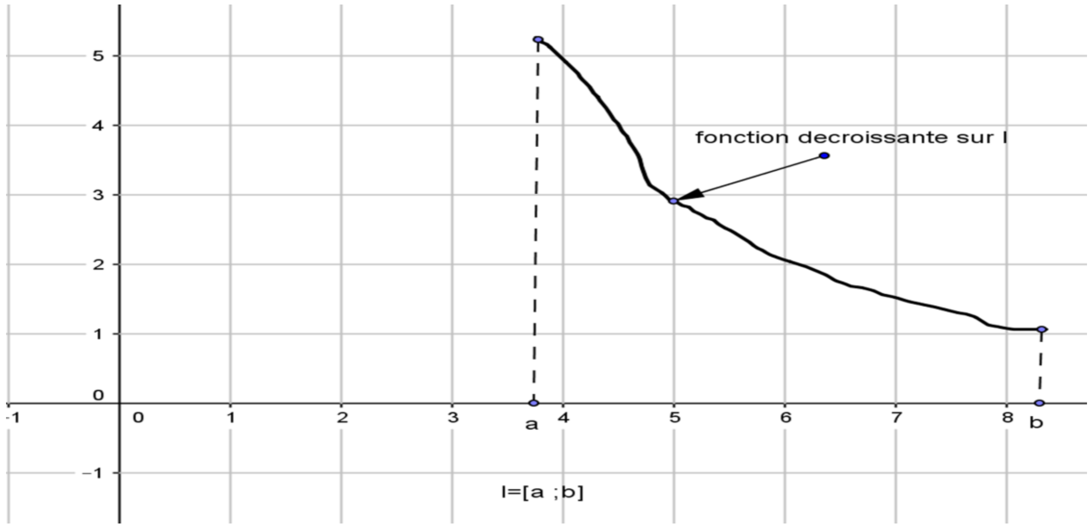
Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de IR, de fonction dérivée f' sur I telle que $\forall x \in I$, le réel $f'(x)$ ait un signe constant.

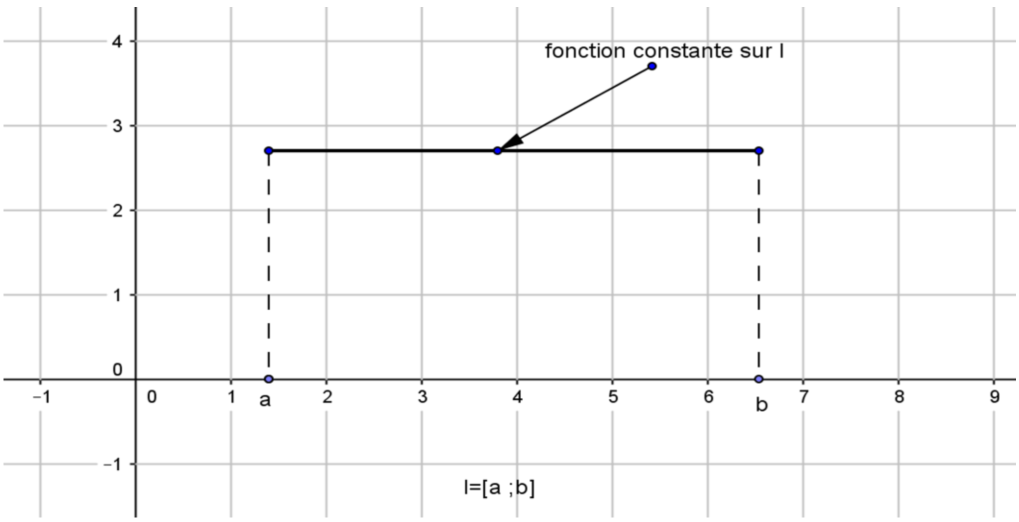
P1) Si l'on a : $\forall x \in I\ ;\ f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est croissante sur I ;

P2) Si l'on a : $\forall x \in I$; $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est décroissante sur I ;

P3) Si l'on a : $\forall x \in I$; $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I ;







P4) Si l'on a : $\forall x \in I$; $f'(x) \geq 0$ (**resp**. $f'(x) \leq 0$) et que l'ensemble des réels x de I tels que $f'(x) = 0$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide, alors la fonction f est strictement croissante (**resp**. strictement décroissante) sur I ;

P5) Si l'on a : $\forall x \in I$; $f'(x)=0$, alors la fonction f est constante sur I ;

P6) Si f et g sont deux fonctions numériques dérivables sur un intervalle I non vide de IR , admettant sur I pour fonctions dérivées respectives f' et g'. Alors, la fonction $f-g$ est constante sur I si et seulement si l'on a : $f'=g'$.

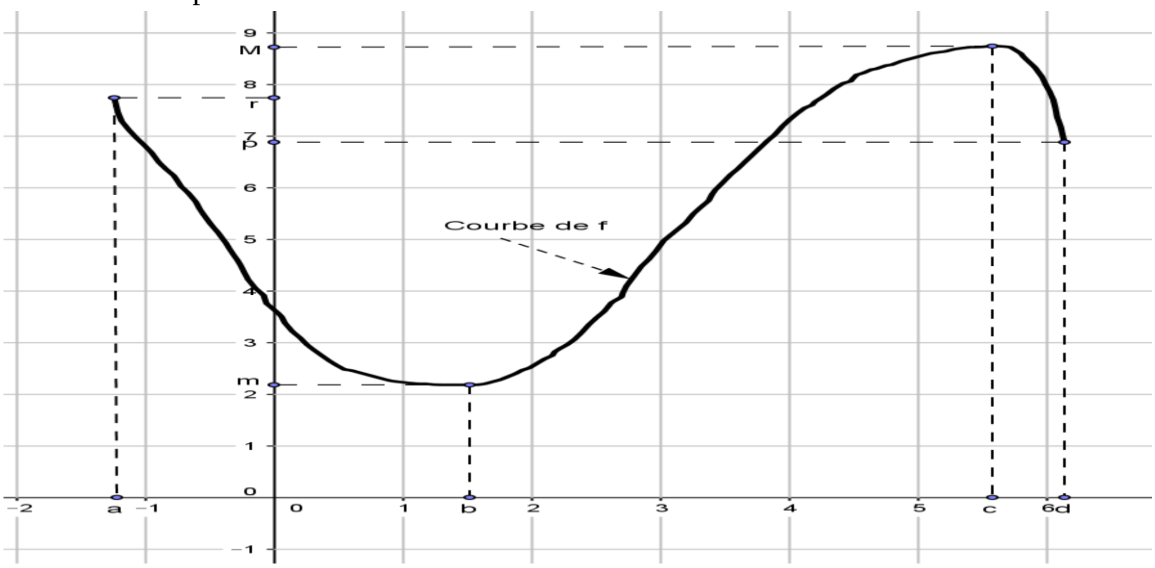
3/ Dérivée d'une fonction dont on connait le sens de variations sur un intervalle donné.

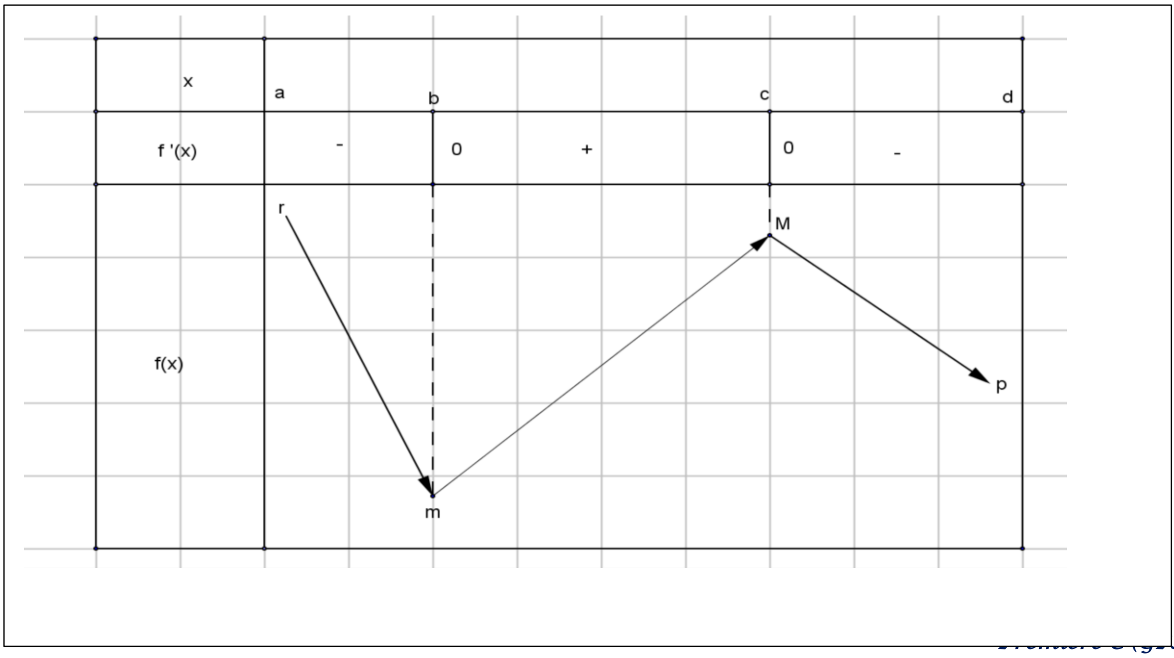
Propriétés

- Si la fonction f est croissante (**resp**. décroissante) sur I ; alors on a : $\forall x \in I$; $f'(x) \geq 0$ (**resp**. $f'(x) \leq 0$).
- Si la fonction f est constante sur I alors la fonction dérivée f' est nulle sur I ; on a : $\forall x \in I$; $f'(x)=0$.

Remarque : Le tableau de variation d'une fonction numérique est un tableau faisant ressortir le signe de sa fonction dérivée ; les variations de cette fonction ; les éventuelles extrema et les limites aux bornes de l'intervalle d'étude.

Voici un exemple illustratif





G/ Exercice d'application

On considère la fonction $h: \ x \mapsto \dfrac{4x^2+4x+9}{x+1}$ définie sur $\mathrm{IR} \setminus \{-1\}$.

1- Déterminer les limites de h aux bornes de son domaine de définition ;

2- Montrer que : $\forall x \in \mathrm{IR} \setminus \{-1\}$; $h'(x) = \dfrac{(2x-1)(2x+5)}{(x+1)^2}$;

3- En déduire les extremums de h ;

4- Dresser le tableau de variation de h sur $\mathrm{IR} \setminus \{-1\}$

H/ Conclusion

Exercices à faire :

Les exercices no [(3c ; 3d page 264) ; (3e ; 3f page 267) ; (46 et 49 page 275)] du Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

Jeu Bilingue : Réponds la question suivante en anglais

«Quelles informations pouvons-nous avoir de la dérivation d'une fonction f ?»

RP :

- The derivative of any given function f tells us the rate of change of f for any given real number x, (which is equivalent to telling us the slope of the graph of f for any given real number x) ;
- When the derivative of any given function f is positive on a set I, the function f is increasing on a set I
- When the derivative of any given function f is negative on a set I, the function f is decreasing on a set I.

Bibliographie :

- Livre de l'enseignant (programme officiel) ;
- Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

CHAPITRE: REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION NUMERIQUE.

Leçon 1 : ASYMPTOTE A LA COURBE D'UNE FONCTION
DUREE : 50 minutes.

INTERET : Savoir étudier et représenter une fonction numérique et l'utilisé pour la résolution des certains problèmes de la vie courante

MOTIVATION : ☹ Dans la vie courante certains problèmes se résolvent à l'aide du graphique d'une fonction, par exemples la vitesse maximale; la hauteur maximale (ou minimale) ; le niveau de fréquence des battements cardiovasculaire par minute…

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Déterminer par leurs équations les asymptotes parallèles aux axes.
- Montrer qu'une droite est une asymptote oblique à la courbe d'une fonction.

PRE-REQUIS

1-) Comment calcule-t-on les limites en infini d'une fonction rationnelle ?

La limite en infini d'une fonction est égale à la limite en cet infini du quotient des monômes de plus degrés du numérateur et du dénominateur.

2-)Calcules limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction $f: x \to \frac{2x+1}{-x+3}$. La fonction définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$.$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2, \lim_{x\to+\infty} f(x) = -2, \lim_{x\to3^+} f(x) = -\infty \; et \; \lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$

SITUATION PROBLEME

Un planeur perd de l'altitude lors d'un vol. Sa hauteur en kilomètre par rapport au sol est inversement proportionnelle au temps mis en minute pendant la descente. Après une minute ; il est à 1 km du sol.

Ce planeur atterrirait-il ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère la fonction numérique h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ et de représentation graphique (C) dans un repère orthogonal $(O;I;J)$

1- Calculer les limites de h à gauche et à droite en 0 puis en $+\infty \; et -\infty$.
2- Etudier les variations et tracer la courbe représentative de h.
3- Suppose $h(x)$ le niveau en altitude du planeur à un instant x. Ce planeur atterrirait-il ?

SOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1- Calculons les limites de h à gauche et à droite en 0 puis en $+\infty \; et -\infty$.

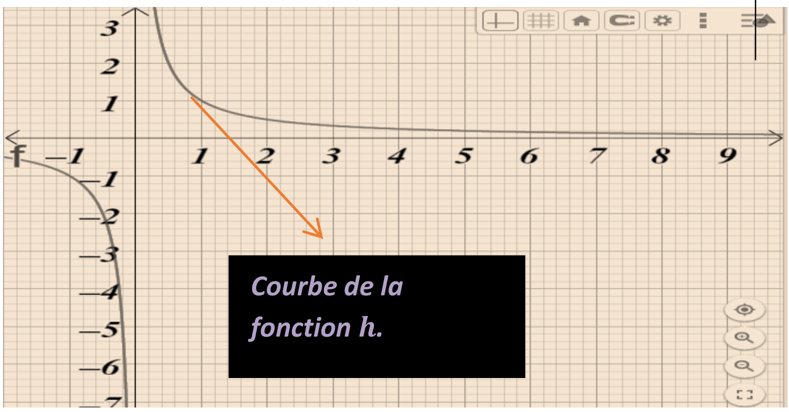
$\lim_{x\to0^-} h(x) = -\infty \; et \lim_{x\to0^+} h(x) = \infty$. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 \; et \; \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

2- Etudions et traçons la courbe l représentative de h.

La fonction dérivée de h est définie par $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	||	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$



Le tracé de la fonction h.

3- Le planeur n'atterrirait jamais.

RESUME

Soit f une fonction de courbe représentative dans un repère du plan donné.

1- Pour tout nombre réel a, lorsque $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ *et* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$; la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la coube de la fonction f.

2- Lorsque $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$ *et ou* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$; on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction f en cet infini.

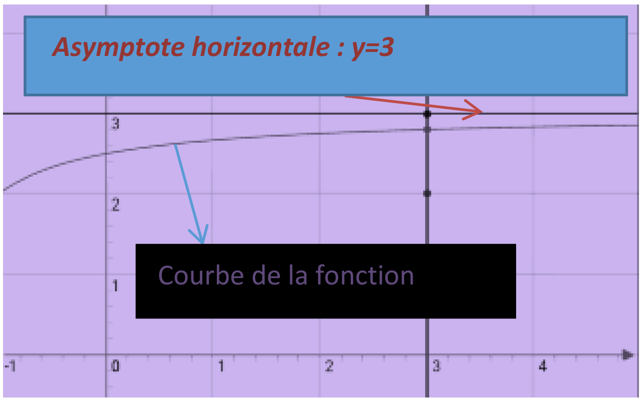


Illustration graphique d'une asymptote horizontale

3- Etant donnée une droite d'équation $y = ax + b$, lorsque $\lim_{x\to -\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ *et* $\lim_{x\to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$; alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de la fonction f en infini

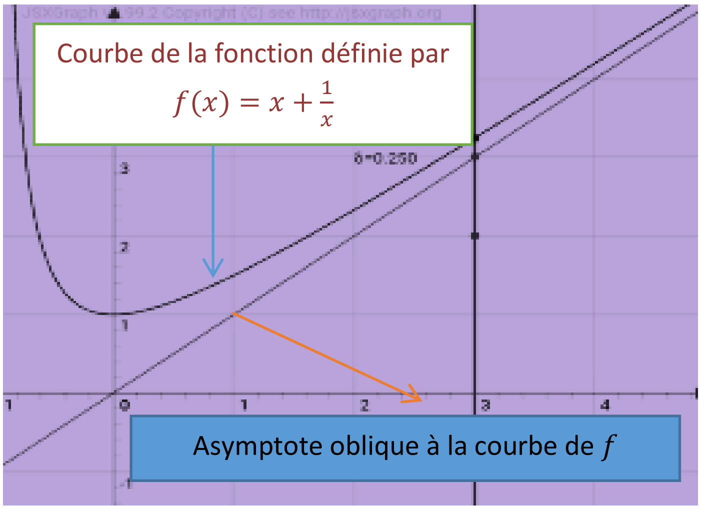


Illustration graphique d'une asymptote oblique.

EXERCICE D'APPLICATION ☹

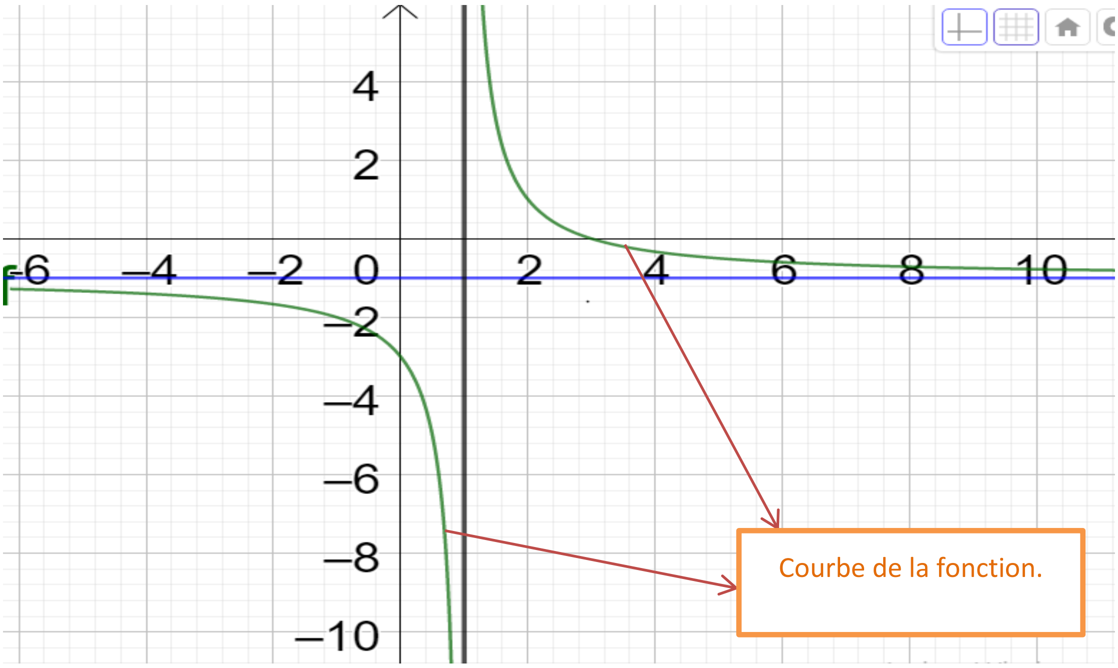
1- Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques définies par : $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$ et $h(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$. Déduire les asymptotes à la courbe de chacune de ces fonctions.

2- On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x^2+3x-5}{x-2}$

2-a Calculer les limites de g à gauche et à droite en 2. Déduire l'asymptote à la courbe de g.

2-b Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 7$ est asymptote à la courbe de g.

3- Déterminer en justifiant sa réponse, les équations des asymptotes à la courbe de la fonction f ci-contre.



LEÇON 2: REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION POLYNOME. DUREE : 50 minutes

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

Savoir étudier et représenter la courbe d'une fonction polynôme.

PRE-REQUIS

1- Comment peut-on déterminer un polynôme défini par la donnée de trois valeurs et de leurs images respectives ?
Un nombre a *image de* b *par* f *signifie* $f(b) = a$ *puis; on pose un systeme*)
2- Comment calcule-t-on les limites en infini des fonctions polynômes ?
Est égale à la limite en cet infini de son monôme de plus degré.
3- Que signifie sens de variation d'une fonction ? Et comment peut-on donner le sens de variation d'une fonction définie par son expression ?
Dire si elle est croissante ou décroissante. Il faut la dériver, étudier le signe de la dérivée puis donner le sens de variation.

SITUATION PROBLEME :

YATOUMA ne peut arroser son jardin situé en amont du château d'eau qui alimente son quartier que, lorsque ce château est rempli à pleine capacité. La quantité d'eau dans ce château d'eau varie selon le moment de la journée. Le château est rempli à 18750 littres, à 8 heure et est vide à 4 heure du matin et à 20heure.

Aider- le à déterminer l'heure de début de l'arroge.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE.

On veut étudier et représenter la courbe de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dans un repère orthogonal$(O; I; J)$. La représentation graphique de f passe par le point $A(8; 18750)$ et rencontre l'axe des abscisses en 4 *et* 20.

1- Justifier que le triplet $(a; b; c)$ est solution du système : $\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 18750 \end{cases}$, puis montrer que $f(x) = -390{,}625x^2 + 9375x - 31250$.
2- Calculons la dérivée et étudier les sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4-Construire sur l'intervalle $[-4; 22]$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (on prendra1cm pour 2 unités sur l'axe des abscisses et et 1cm pour 5000 unités sur l'axe des ordonnées)

5-.On suppose pour la suite que, $f(x)$ est la capacité d'eau en litre dans le château à un moment x (en heure) de la journée. A quel moment YATOUMA peut débuter l'arroge ?

SOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE.

1- Montrons que $f(x) = -390{,}625x^2 + 9375x - 31250$.

Nous avons de l'énoncé $\begin{cases} f(20) = 0 \\ f(4) = 0 \\ f(8) = 18750 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 18750 \end{cases}$

$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 18750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 384a + 16b = 0 \\ c = -16a - 4b \\ 48a + 4b = 18750 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -24a \\ c = 80a \\ -48a = 18750 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 9375 \\ c = -31250 \\ a = -390{,}625 \end{cases}$$

Donc $f(x) = -390{,}625x^2 + 9375x - 31250$.

2- Calculons la dérivée et étudions le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f étant une fonction polynôme alors elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = -781{,}25x + 9375$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \implies x = 12$. Ainsi ; nous avons :

- $\forall x \in]-\infty; 0]$, $f'(x) \leq 0$; donc f est décroissante sur cet intervalle.

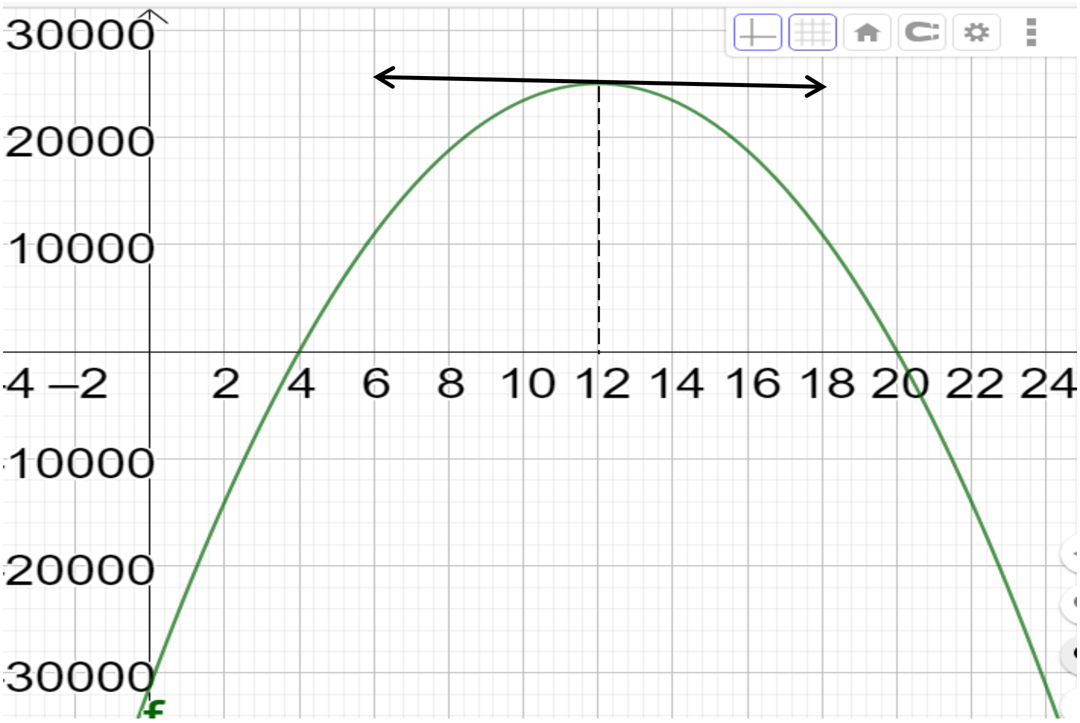
$-$ $\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur cet intervalle.

3- Dressons le tableau de variations de f.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-390{,}625x^2) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) == -\infty$

x	$-\infty$	12	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	25000	↘ $+\infty$

4- Construire la courbe représentative de la fonction f.



5- **Le château d'eau est à pleine capacité de 25000 L à midi. Donc il doit commencer l'arroge à 12 heure.**

RESUME ☹

Pour étudier une fonction, on peut procéder comme suit :

-On détermine son ensemble définition

-On calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

-On étudie la dérivabilité et on calcule sa dérivée

- on étudie le signe de la dérivée, le sens de variation et on dresse le tableau de variation.

- On cherche les points particuliers comme les éléments de symétrie, les points de rencontre avec les axes du repère, la table des valeurs, la tangente à la courbe de la fonction…

Pour représenter la courbe d'une fonction : on place les points particuliers, on trace la tangente et la courbe représentative de la fonction dans un repère orthogonal donné.

EXERCICE D'APPLICATION ☹

A- Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^2 - 3x - 4$

1- Etudier le sens de variation de la fonction f, puis dresser son tableau de variation

2- Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0. Puis étudier les positions relatives de la courbe de $f$et de (T)

3- Déterminons les points de rencontre de la courbe de $f$avec les axes du repère.

4- Tracer la tangente et la courbe dans le repère sur l'intervalle $[-5; 6]$.

B- Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction numérique h définie par $h(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

1-Etudier le sens de variation de la fonction h, puis dresser son tableau de variation

2-Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction h au point d'abscisse -1. Puis étudier les positions relatives de la courbe de $h$et de (T)

3-Déterminons les points de rencontre de la courbe de $h$avec les axes du repère.

4-Tracer la tangente et la courbe dans le repère.

C- Après son succès au BEPC de la session 2020, GAYANIMA a reçu 5000 F de son père et veut placer cette somme dans une des micros banques de sa localité, avec un intérêt composé mensuel puis ; retirer son intérêt au bout de deux mois pour préparer sa rentrée scolaire 2020-2021. Proposer à GAYANIMA ,un graphique permettant de lire son bénéfice au bout de deux mois en fonction du taux choisis.

LECON 3: REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION RATIONELLE.
Durée : 100 minutes

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

Savoir étudier et représenter la courbe de toute fonction de forme : $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ et $x \to \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

PREREQUIS.

1- Quand dit-on deux grandeurs x *et* y sont inversement proportionnels ?
   Il existe un réel k tel que $xy = k$
2- Etudier les positions relatives de la courbe de la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2$ et la droite d'équation : $y = 3$ sur l'ensemble des réels.
   Pour, $x \leq -1$ *et* $x \geq 1$, $g(x) - 3 \geq 0$ la courbe de g est en dessus de la droite et pour $-1 \leq x \leq 1$
   $g(x) - 3 \leq 0$, la courbe de g est en dessous de la droite.

SITUATION PROBLEME

Pour transporter ses sacs d'oignons du champ à la maison. YATADI loue un camion à $8000\ F$ l'heure et doit payer un manœuvre à $2000\ F$ l'heure pendant toute la durée de charge à la décharge. La durée des opérations de charge et de décharge est inversement proportionnelle au nombre de manœuvres recrutés et chaque manœuvre mettrait 2heures pour les opérations de charge et de décharge.

Sachant que le camion met deux heures du temps en route pour arriver à la maison. Combien de manœuvres doit-il recruter pour une dépense minimale ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère la fonction f définie par $f(x) = 4000\ \frac{(x^2+5x+4)}{x}$.

1-a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f.

1-b) Etudier le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

1-c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 4000x + 20000$ est une asymptote oblique à la courbe de f en infini. Etudier leurs positions relatives.

1-d) Déterminer les points de rencontre de la courbe de f avec les axes du repère.

1-e) Représenter les extremums, les asymptotes puis la courbe de la fonction de f (on prendra un manœuvre pour 1cm pour une unité sur (OI) et 1cm pour 5000 unités sur (OJ)).

2-a) Soit t' est un réel inversement proportionnel à x. Justifier que, si $t' = 2$ *et* $x = 1$ alors $t' = \frac{2}{x}$.

2-b) Déduire que si x est le nombre de manœuvres alors la durée totale des opérations est $\frac{2}{x} + 2$ et la dépense en fonction de x manœuvres est $f(x)$.

2-c) Quel est le nombre de manœuvre(s) pour une dépense minimale ?

SOLUTION DE DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1-a) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et déduisons-en l'existence d'une asymptote à la courbe de f.

La fonction est définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(4000x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(4000x) = +\infty$.
$\lim_{x\to0^-}(f(x)) = \lim_{x\to0^-} \frac{16000}{x} = -\infty$ et
$\lim_{x\to0^+}(f(x)) = \lim_{x\to0^+} \frac{16000}{x} = +\infty$.
Nous déduisons que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

1-b) Le sens de variation de f et son tableau de variation.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.$f'(x) = 4000\ \frac{(x^2-4)}{x^2}$ et nous avons le tableau de variation.

x	$-\infty$		-2		0		2	
$f'(x)$		$+$	|		||	$-$	|	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4000	$\searrow$	|| $+\infty$	$\searrow$	380000	$\nearrow$

1-c) Montrons que la droite (D) est asymptote oblique à la courbe de f en infini.

$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (4000x + 20000)) = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - (4000x + 20000)) = 0$.

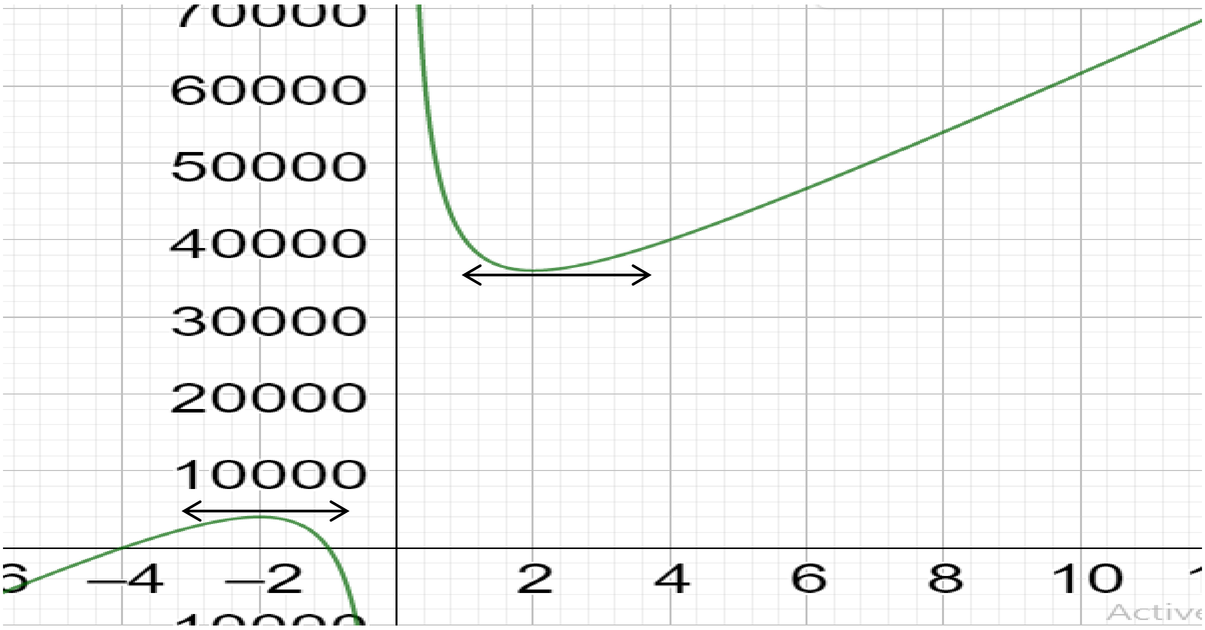
Donc la droite (D): $y = 4000x + 20000$ est une asymptote oblique à la courbe de f en infini.

-Etudions les positions relatives de la courbe de f et de la droite(D)

On a $f(x) - (4000x + 20000) = \frac{16000}{x}$. Ainsi la courbe est au-dessus de la droite sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et est au-dessous de la droite sur $]0; +\infty[$.

La courbe de f rencontre l'axe des abscisses en -1 et -4 et ne coupe pas l'axe des ordonnées.

1-d) La courbe .



2-a) Justifions que, si $t' = 2$ et $x = 1$ alors $t' = \frac{2}{x}$.

Les réels non nuls x et t' sont inversement proportionnels signifie que $xt' = k$, quel que soit réel k; pour $x = 1$ et $t' = 2$ on a $k = 2$ alors $t' = \frac{2}{x}$.

2-b) Déduisons que si x est le nombre de manœuvres alors la durée totale des opérations est $\frac{2}{x} + 2$ et la dépense en fonction de x manœuvres est $f(x) = 8000(\frac{2}{x} + 2) + 2000x(\frac{2}{x} + 2) = 4000\,\frac{(x^2+5x+4)}{x}$.

2-c) **Monsieur YATADI doit recruter 2 manœuvres pour une dépense minimale 38000 F.**

RESUME

b) Pour étudier une fonction, on procéder comme suit :

-On détermine son ensemble définition

-On calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

-On étudie la dérivabilité et on calcule sa dérivée

- on étudie le signe de la dérivée, le sens de variation et on dresse le tableau de variation.

- On cherche les points particuliers comme les éléments de symétrie, les points de rencontre avec les axes du repère, la table des valeurs, la tangente à la courbe de la fonction.

c) Pour représenter la courbe d'une fonction rationnelle :On places les points extremums ;les points de rencontre avec les axes du repère ,on trace les tangentes ,les asymptotes et la courbe de la fonction.

EXERCICE D'APPLICATION

A- On donne la fonction homographique h définie par $h(x) = \frac{-x+2}{x-1}$.

A-a) Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition, puis en déduire les asymptotes à la courbe de h.

A-b) Etudier le sens de variation de h puis dresse son tableau de variation

A-c) Montrer que le point $Q(1;-1)$ est centre de symétrie à la courbe de h.

A-d) Représenter la courbe de h

B-Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $j(x) = \frac{-x^2-3x+4}{x+1}$

B-a) Calculer les limites de j aux bornes de son ensemble de définition, puis en déduire l'asymptote à la courbe de de la fonction j.

B-b) Etudier le sens de variation de j puis dresse son tableau de variation.

B-c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 2$ est asymptote à la courbe de la fonction.

B-d) Montrer que le point $Q(-1;-1)$ est centre de symétrie à la courbe de la fonction j.

B-d) Représenter la droite et la courbe de j.

CHAPITRE : SUITES NUMERIQUES.

LEÇON 1 : GENERALITES SUR LES SUITES NUMERIQUES.
Durée : 100 minutes

A/ Objectifs pédagogiques :

- Reconnaitre une suite numérique ;
- Calculer les termes d'une suite numérique ;
- Repérer graphiquement les termes consécutifs d'une suite récurrente ;

B/ Motivation

Plusieurs problèmes dans la vie courante se résolvent en s'appuyant sur les suites numériques tels que la gestion des comptes bancaires à taux d'intérêt simple ; le calcul de la somme des entiers naturels consécutifs ; etc…. Cette leçon nous permettra de mieux aborder ces types de situations.

C/ Contrôle des pré-requis

Considérons les fonctions numériques suivantes $f : x \mapsto \sqrt{x}+1$ et $g : x \mapsto f(x)+1$. Soit l'expression littérale $A = x+\sqrt{x+2}$.

1- Déterminer la valeur numérique de A lorsque $x=2$; puis $x=7$.
2- Calculer $f(4)$; puis $g(4)$.

D/ Situation problème

Sandra, élève en classe de première scientifique voudrais connaitre le nombre entier <u>représentant le 502-ieme multiple de 3 positif non nul à partir de 12.</u>

Peux-tu lui indiquer ce nombre ?

E/ Activité d'apprentissage

On considère l'ensemble $A = \{3n \ ; n \in \mathrm{IN}\}$

1) De quel ensemble s'agit-il ?
2) Ecris en extension cet ensemble ;
3) Ecris en extension le sous-ensemble B de A ayant pour plus petit élément 12 ;
4) Quel écart existe entre deux éléments consécutifs de l'ensemble B ?
5) Désignons par p_1 le premier élément de B ; p_2 le second élément de B ; ainsi de suite jusqu'au n-ième élément p_n de B .
   a) Compléter les pointilles par les p_i qui conviennent ; puis additionner ses égalités membre à membre ;

$$p_2 = \cdots + 3 \ ;$$

$$p_3 = \cdots + 3 \ ;$$

$$\cdots = p_3 + 3 \ ;$$

•

• ;

•

$$\cdots = p_{n-2} + 3 \ ;$$

$$p_n = p_{n-1} + 3 \ ;$$

b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $p_n = 12 + 3(n-1)$

6) Quelle réponse peux-tu donner à Sandra ?

F/ Résumé du cours

1/ Définition :

On appelle suite numérique toute application U d'une partie I de IN vers IN. On la note $(U_n)_{n\in I}$ ou tout simplement (U_n) lorsque $I = \text{IN}$.

NB : soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique définie sur une partie I de IN ; alors :

- Si I est une partie finie de IN, alors $(U_n)_{n\in I}$ est dite suite finie.
- Si $\forall n \in I$ on a $U_n = a$ avec $a \in \text{IN}$, alors $(U_n)_{n\in I}$ est dite suite constante.
- Si $\forall n \in I$ on a $U_n \geq 0$ (resp. $U_n \leq 0$), alors $(U_n)_{n\in I}$ est dite suite à termes **positifs** (resp. **négatifs**).
- Pour tout $k \in I$, U_k est appelé terme de la suite $(U_n)_{n\in I}$ de rang k et U_n est appelé terme général de la suite $(U_n)_{n\in I}$.
- Si p est le plus petit élément de I alors U_p est appelé premier terme de la suite $(U_n)_{n\in I}$; U_{p+1} le second terme ; U_{p+2} le troisième terme, ainsi de suite….

Exemple : Les applications $(U_n) : n \mapsto \sqrt{n-1} + 5$ et $(V_n) : n \mapsto \dfrac{2n+1}{n+1}$ sont des suites numériques définies respectivement sur IN^* et IN.

2/ Opérations sur les suites numériques

Soient $(U_n)_{n\in I}$ et $(V_n)_{n\in I}$ deux suites numériques toutes définies sur une partie I de IN ; soit α un nombre réel. Alors :

i) La suite somme $(U+V)_{n\in I}$ est définie comme suit :

$\forall n \in I$ on a $(U+V)_n = U_n + V_n$;

ii) La suite produit $(U \times V)_{n\in I}$ est définie comme suit :

$\forall n \in I$ on a $(U \times V)_n = U_n \times V_n$;

iii) La suite produit par un réel $(\alpha U)_{n\in I}$ est définie comme suit :

$\forall n \in I$ on a $(\alpha U)_n = \alpha \times U_n$.

Remarque : L'addition et la multiplication par un réel munissent l'ensemble des suites numériques définies sur I d'une structure d'espace vectoriel réel.

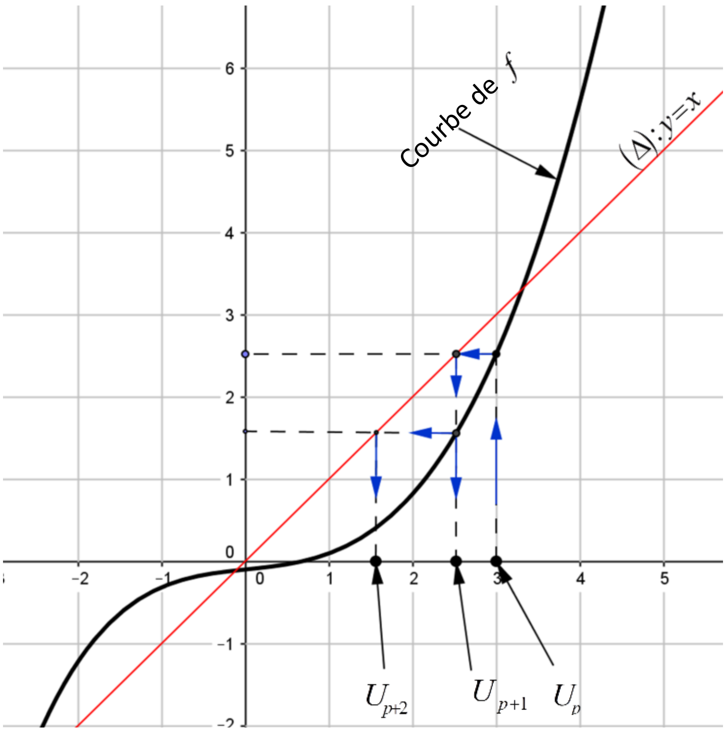
3/ Calcul et représentation graphique des termes d'une suite numérique

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique définie sur une partie I de $\mathbb{N}$. Ainsi :

- Lorsqu'il existe une fonction numérique f telle que $\forall n \in I$; $U_n = f(n)$ alors on dit que $(U_n)_{n\in I}$ est définie de manière explicite. Par conséquent l'image par f de l'entier k de I correspond au terme U_k de rang k de la suite.

Exemple : Les suites $(U_n): n \mapsto \sqrt{n-1}+5$ et $(V_n): n \mapsto \dfrac{2n+1}{n+1}$ sont définies de façon explicite avec pour fonctions associées respectives $f: x \mapsto \sqrt{x-1}+5$ et $g: x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.

- Lorsqu'il existe une fonction numérique f telle que $\forall n \in I$; $U_{n+1} = f(U_n)$ alors on dit que $(U_n)_{n\in I}$ est définie de manière récurrente.
  Par conséquent l'image par f d'un terme quelconque de la suite de rang k correspond au terme de la suite de rang suivant $k+1$.
  La droite $(\Delta): y = x$ (appelée première bissectrice) nous permet de placer les termes d'une telle suite sur un même axe du repère comme la montre la figure ci-dessous :



G/ Exercice d'application

On donne les suites $(U_n): n \mapsto \sqrt{n-2}+3$ et $(V_n): n \mapsto \dfrac{n+3}{n-1}$.

1. Sur quelle partie de IN chacune de ces suites est-elle définie ?
2. Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites ;
3. Indiquer les fonctions associées de chacune de ces suites ;
4. On considère la fonction numérique $g : x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$ définie sur $]1 ; +\infty[$.
   a) Préciser les variations de cette fonction ;
   b) Tracer correctement sa courbe représentative dans un repère orthonormé ;
   c) Placer sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (W_n) telle que : $W_0 = 2$ et $W_{n+1} = \frac{W_n + 3}{W_n - 1}$.

H/ Conclusion

Exercices à faire : Les exercices no [(1 ; 2 ; 3 page 475)] du Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

Jeu Bilingue : Traduire les mots suivants en français

Common ratio; sequence of number; successive terms;

LEÇON 2 : SUITES ARITHMETIQUES.

Durée : 100 minutes

A/ Objectifs pédagogiques :

- Reconnaitre une situation de progression arithmétique de nombres ;
- Déterminer le terme général d'une suite arithmétique ;
- Déterminer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique.

B/ Motivation

Plusieurs problèmes dans la vie courante se résolvent en s'appuyant sur les suites arithmétiques tels que la gestion des comptes bancaires à taux d'intérêt simple ; le calcul de la somme des entiers naturels consécutifs ; etc…. Cette leçon nous permettra de mieux aborder ces types de situations.

C/ Contrôle des pré-requis

Soit l'expression littérale $A=(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$.

1. Réduire l'expression A ;
2. Calculer A pour $n=5200$;
3. Pour tout entier naturel n, compare les nombres $3n+1$ et $4n$;

D/ Situation problème

ELSA née le 23 avril 2019 est la fille de M. Ambroise. Dans le coffre-fort chez M. Ambroise, on trouve 50 000 FCFA et il décide qu'après l'anniversaire de sa fille de l'an 2020, une somme de 20 000 FCFA sera désormais déposée dans son coffre-fort chaque 1er Janvier de l'année. Tout l'argent du coffre-fort lui permettra d'offrir à ELSA une bourse d'études en Italie s'élevant à 5 190 000 FCFA.
A partir de quelle date M. Ambroise pourra-t-il réaliser ce projet ?

E/ Activités d'apprentissage

Désignons par U_n la somme d'argent disponible dans le coffre-fort de **M. Ambroise** le 1er Janvier de l'année (2020+n).

1. Que vaut U_0 et U_1 ?
2. Pour tout entier naturel n, que vaut la différence $U_{n+1}-U_n$?
3. Compléter les pointilles par les U_i qui conviennent ; puis additionner ses égalités membre à membre :

$$U_1=\cdots+20000\ ;$$
$$U_2=\cdots+20000\ ;$$
$$\cdots=U_2+20000\ ;$$
$$\bullet$$
$$\bullet \qquad ;$$
$$\bullet$$
$$\cdots=U_{n-2}+20000\ ;$$
$$U_n=U_{n-1}+20000\ ;$$

4. Justifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $U_n = 50000 + 20000n$
5. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $50000 + 20000n \geq 5190000$.

F/ Résumé du cours

1/ Définition :

Soit r un nombre réel et I une partie de IN.

On appelle suite arithmétique (ou progression arithmétique) de raison r, toute suite $(U_n)_{n\in I}$ dont la différence $U_{n+1} - U_n$ soit égale à r pour tout entier naturel n.

Autrement dit : $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique (ou progression arithmétique) de raison r si $\forall n \in I$ on a $U_{n+1} = U_n + r$.

NB : Si l'ensemble I contient les nombres entiers naturels $n-1$, n, $n+1$ et $(U_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique alors $U_n = \dfrac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$ (On dit que U_n est la moyenne arithmétique des termes U_{n-1} et U_{n+1} qui l'encadrent).

Exemple : Les suites $(U_n) : n \mapsto n$ et $(V_n) : n \mapsto 2n+1$ sont arithmétiques.

2/ Propriétés sur les suites arithmétiques

i) Soit r un nombre réel et p le plus petit entier naturel de I.

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p alors : $\forall n \in I$ on a $U_n = U_p + (n-p)r$.

Par conséquent : $\forall n\ ;\ k \in I$ on a $U_{k+1} + U_{n-2+k} = U_k + U_{n-1+k}$ $\quad (*)$

NB : Pour $p = 0$ on a $\forall n \in I\ ;\ U_n = U_0 + nr$.

ii) Soit r un nombre réel et p le plus petit entier naturel de I.

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p alors la somme S_n des n premiers termes consécutifs de cette suite est donnée par la relation :

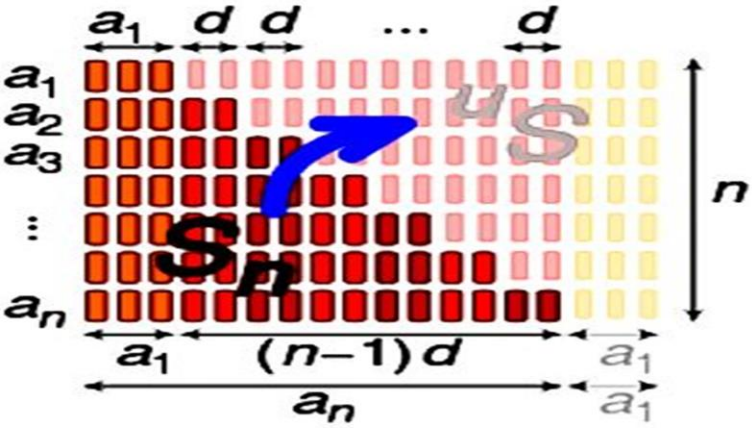
$$\forall n \in I\ ;\ S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \ldots + U_{p+n-1} = \frac{n(U_p + U_{p+n-1})}{2}.$$

Car en utilisant la relation $(*)$ ci-haut, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned} S_n &= U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \ldots + U_{n-3+p} + U_{n-2+p} + U_{n-1+p} \\ S_n &= U_{n-1+p} + U_{n-2+p} + U_{n-3+p} + \ldots + U_{p+2} + U_{p+1} + U_p \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2S_n = n(U_p + U_{p+n-1})$$

NB : Pour $p=0$ on a $\forall n\in I$; $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1} = \dfrac{n(U_0+U_{n-1})}{2}$.

Le schéma suivant illustre la situation où $(a_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison d et de premier terme a_1 :



$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

G/ Exercice d'application

On donne les suites $(U_n): n \mapsto 2n$ et $(V_n): n \mapsto 2n+1$.

1. Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites ;
2. Indiquer la nature des éléments obtenus ;
3. Justifier que ces suites sont arithmétiques en précisant leur raison ;
4. On donne les sommes suivantes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2k$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$. Tout en rappelant que : $\sum_{i=0}^{p} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_p$
   a) Préciser les valeurs de S_1 et S_2 lorsque $n=5$; puis $n=2000$;
   b) Ecrire S_1 et S_2 en fonction de n ;
   c) Quelles propriétés peux-tu tirer ?

H/ Conclusion

Exercices à faire : Les exercices no [(3a ; 3b page 467) ; (35 ; 36 et 39 page 480)] du Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

Jeu Bilingue : Traduire le paragraphe suivant en français

« In mathematics, an arithmetic progression (or arithmetic sequence) is a sequence of numbers such that the difference between the consecutive terms is constant. Difference here means each number minus the previous number. For instance, the sequence 5; 7 ; 9; 11; 13; 15; …. Is an arithmetic progression with common difference of 2» .

LECON 3 : SUITES GEOMETRIQUES

Durée : 100 minutes

A/ Objectifs pédagogiques :

- Reconnaitre une situation de progression géométrique de nombres ;
- Déterminer le terme général d'une suite géométrique ;
- Déterminer la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique.

B/ Motivation

Plusieurs problèmes dans la vie courante se résolvent en s'appuyant sur les suites géométriques tels que la gestion des comptes bancaires à taux d'intérêt Composé ; le calcul de la somme des entiers naturels consécutifs pairs ; etc…. Cette leçon nous permettra de mieux aborder ces types de situations.

C/ Contrôle des pré-requis

Soit l'expression littérale $B=\dfrac{2^7\times 3\times 2^{-3}}{2^2\times 3^2}$.

1. Réduire l'expression B ;
2. Compare les nombres 4^3 et 4^7 ;
3. Que valent les 20% de 10500 ?

D/ Situation problème

Douala-Nkap est une ville nouvellement créée proche de la ville de Douala au Cameroun. Pour désengorger la ville de Douala, l'administration territoriale du Cameroun décide d'accueillir à **Douala-Nkap** une population de 15 000 habitants pour la première fois au 1^er^ Janvier de l'an 2010. Cette administration se rend compte qu'au fil des années, la population d'une année accroit de 5% de celle de l'année antérieure.

A partir de quelle date la population de cette ville pourra-t-elle doublée ?

E/ Activités d'apprentissage

Désignons par V_n la population de **Douala-Nkap** le 1^er^ Janvier de l'année (2010+n).

1. Que vaut V_0 ; V_1 et V_2 ?
2. Pour tout entier naturel n, que vaut le rapport $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$?
3. Compléter les pointilles par les V_i qui conviennent ; puis multiplier ses égalités membre à membre :

$$V_1 = 1.05\times\cdots\ ;$$

$$\cdots = 1.05 \times V_1 \ ;$$

$$\cdots = 1.05 \times V_2 \ ;$$

•

• ;

•

$$V_{n-1} = 1.05 \times \cdots \ ;$$
$$V_n = 1.05 \times V_{n-1} \ ;$$

4. Justifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $V_n = 15000(1.05)^n$
5. Que vaut V_{13} ; V_{14} et V_{15} ?

F/ Résumé du cours

1/ Définition :

Soit q un nombre réel et I une partie de IN.

On appelle suite géométrique (ou progression géométrique) de raison q, toute suite $(V_n)_{n\in I}$ dont le rapport $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ soit égale à q pour tout entier naturel n.

Autrement dit : $(V_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q si $\forall n \in I$ on a : $V_{n+1} = qV_n$.

NB : Si l'ensemble I contient les nombres entiers naturels $n-1$, n, $n+1$ et $(V_n)_{n\in I}$ une suite géométrique alors $(V_n)^2 = V_{n-1} \times V_{n+1}$ (On dit que V_n est la moyenne géométrique des termes V_{n-1} et V_{n+1} qui l'encadrent).

Exemple : Les suites $(V_n) : n \mapsto 3\times 7^n$ et $(W_n) : n \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+3}$ sont géométriques.

2/ Propriétés sur les suites géométriques

i) Soit q un nombre réel et p le plus petit entier naturel de I.

Si $(V_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_p alors : $\forall n \in I$ on a $V_n = V_p \times q^{(n-p)}$. $(*)$

NB : Pour $p = 0$ on a $\forall n \in I$; $V_n = V_0 \times q^n$.

ii) Soit q un nombre réel et p le plus petit entier naturel de I.

Si $(V_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_p alors la somme S_n des n premiers termes consécutifs de cette suite est donnée par la relation :

$\forall n \in I$; $S_n = V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + \ldots + V_{n-1+p} = \dfrac{V_p(1-q^n)}{1-q}$. Car en utilisant la relation $(*)$ ci-haut, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned} S_n &= V_p + V_{p+1} + \ldots + V_{n-2+p} + V_{n-1+p} \\ &= V_p + qV_p + \ldots + q^{n-2}V_p + q^{n-1}V_p \\ qS_n &= qV_p + q^2V_p + \ldots + q^{n-1}V_p + q^nV_p \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_n - qS_n = V_p(1-q^n)$$

NB : Pour $p=0$ et $q \neq 1$ on a $\forall n \in I$; $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-1} = \dfrac{V_0(1-q^n)}{1-q}$.

G/ Exercice d'application

On donne les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par : $U_0 = 3$ et $\forall n \in \mathrm{IN}$; $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + \dfrac{2}{3}$ avec $V_n = U_n - 1$.

1. Calculer les deux premiers termes de chacune de ces suites ;
2. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire sa raison ;
3. Ecrire V_n, puis U_n en fonction de n ;
4. Evaluer les sommes suivantes : $S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} V_i$ et $S_2 = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$.

NB : La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite arithmético-géométrique.

H/ Conclusion

Exercices à faire : Les exercices no [(4a ; 4b page 472) ; (4c ; 4d page 474) ; (46 et 49 page 481)] du Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

Jeu Bilingue : Traduire le paragraphe suivant en français

« In mathematics, an geometric progression (or geometric sequence) is a sequence of numbers such that each term is found by multiplying the previous term by a constant called common ratio. For instance, the sequence 2; 6 ; 18; 54; 162; 486; …. Is an geometric progression with common ratio of 3»

Bibliographie:

- Livre de l'enseignant (programme officiel) ;
- Livre « L'excellence en Mathématiques » ; NMI ; Victor TEGNINKO et autres.

MODULE 23 (C-E) :

CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

CHAPITRE 13: ARCS CAPABLES

LEÇON 1 : ENSEMBLE DES POINTS M DU PLAN TELS QUE $Mes\ \widehat{AMB} = x$

Durée : 100 minutes

Intérêt :

- Repérer des objets ayant la forme d'un arc de cercle, les caractériser, les concevoir…
- Déterminer la position d'un navire par les marins en navigation côtière.

Motivation :

- Décrire des formes planes dans un décor.
- Détecter la répétition d'un motif dans une peinture, sur un tissu, sur un objet d'art graphique
- *Dessiner un motif de tissu, schématiser une pièce mécanique.*
- Repérer un lieu géométrique au niveau d'un rond-point.

Objectif :

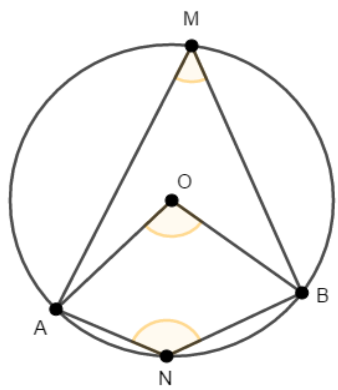
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $Mes\widehat{AMB} = x$;

Prérequis :

Quelles sont les relations entre un angle inscrit et son angle au centre associé sur un cercle ?

On distinguera le cas aigu et le cas obtus.

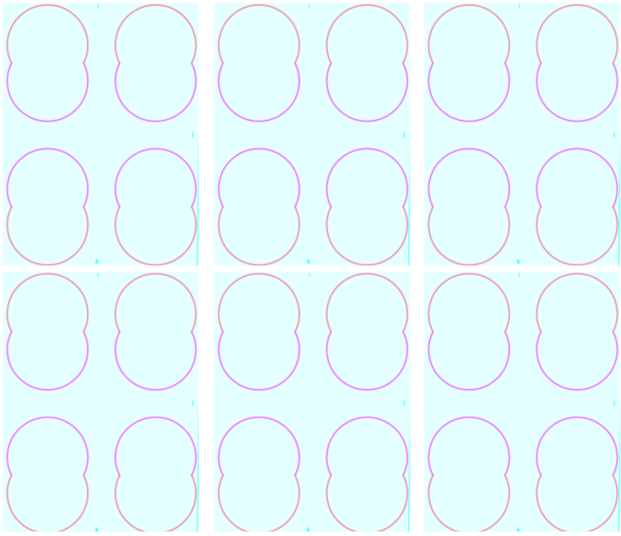
- Si l'angle inscrit $\widehat{\boldsymbol{AMB}}$ est aigu, alors $Mes\ \widehat{\boldsymbol{AMB}} = \frac{Mes\ \widehat{AOB}}{2}$



➢ Si l'angle inscrit $\widehat{ANB}$ est obtus, alors

$$Mes\ \widehat{ANB} = 180° - \frac{Mes\ \widehat{AOB}}{2}$$

1.1. Situation problème



La mère de Jean a un tissu formé de motifs identiques. Le concepteur a utilisé un segment [AB] de longueur $4cm$ et informe à Jean que les bordures d'un de ces motifs sont formées des points M tels que $Mes\widehat{AMB} = 40°$. Aidez Jean à réaliser une maquette d'un de ces motifs.

1.2. Activité d'apprentissage

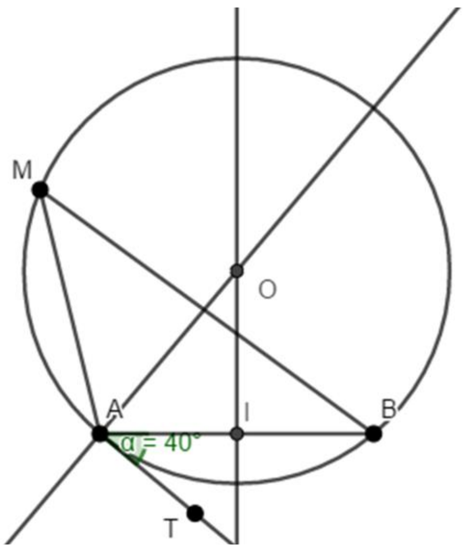
Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm$,

I le milieu du segment $[AB]$. On prendra $\alpha = 40°$.

1) Placer un point T tel que Mes $\widehat{\text{TAB}} = \alpha$
2) Soit O le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et de la perpendiculaire à la droite (AT) en A, (C) le cercle de centre O passant par A; M un point de (C) distinct de A et de B tel que $\widehat{\text{AMB}}$ soit aigu.
   a) Faire une figure.
   b) Exprimer Mes $\widehat{\text{AOB}}$ et Mes $\widehat{\text{AMB}}$ en fonction de α.
   c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{\text{AMB}} = \alpha$
3) Si $\widehat{\text{AMB}}$ est obtus, exprimer Mes $\widehat{\text{AMB}}$ en fonction de α.

Solution

1 et 2a) Faisons une figure.



b). Exprimons Mes $\widehat{\text{AOB}}$ et Mes $\widehat{\text{AMB}}$ en fonction de α.

Mes $\widehat{\text{TAB}} = \alpha$ et Mes $\widehat{\text{TAO}} = 90°$. Donc Mes $\widehat{\text{IAO}} = 90° - \alpha$.
Ainsi, Mes $\widehat{\text{AOI}} = 180° - (90° + 90° - \alpha)$

D'où Mes $\widehat{\text{AOI}} = \alpha$.

De plus, $[OA]$ et $[OB]$ sont des rayons d'un même cercle.

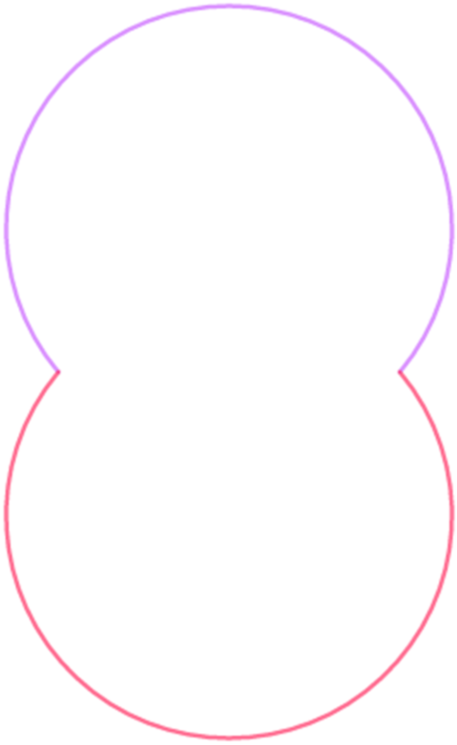
Donc AOB est un triangle isocèle en O. Ainsi, la médiatrice (OI) est aussi bissectrice issue de O et par suite,

Mes $\widehat{\text{AOB}} = 2\alpha$.

Puisque $\widehat{\mathrm{AMB}}$ est inscrit aigu et est associé à l'angle au centre $\widehat{\mathrm{AOB}}$, alors $Mes\ \widehat{\mathrm{AMB}} =$

c). Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{\mathrm{AMB}} = \alpha$

L'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{\mathrm{AMB}} = \alpha$ est la réunion du grand arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle (C) d'extrémités A et B, privé des points A et B; et du symétrique de cet arc par rapport à la droite (AB) car, les symétries orthogonales conservent les mesures des angles. ***(on dit parfois que le segment [AB] est vu depuis l'arc sous l'angle*** $\boldsymbol{\alpha}$. ***)***



3) Si $\widehat{\mathrm{AMB}}$ est obtus, alors $Mes\ \widehat{\mathrm{AMB}} = 180° - \alpha$

1.3. Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan, α un angle aigu, O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que Mes $\widehat{\mathrm{AOB}} = 2\alpha$ et (C) le cercle de centre O et de rayon OA. L'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{\mathrm{AMB}} = \alpha$ est l'un des deux arcs, privés des points A et B, défiins sur (C) par la corde $[AB]$ et du symétrique de cet arc par rapport à (AB).

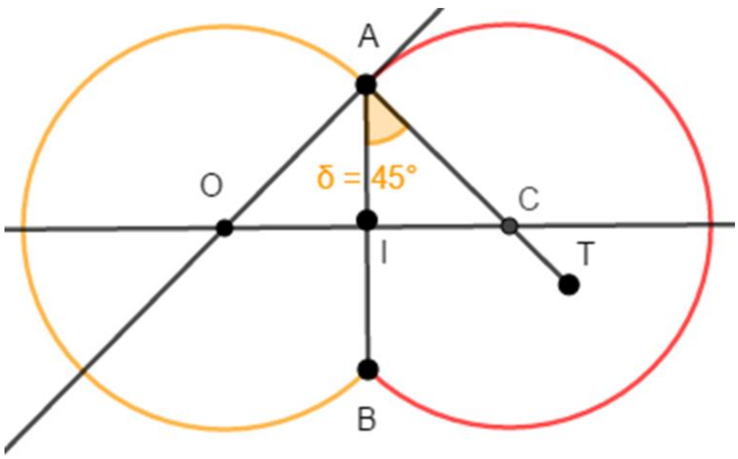
1.4. Définition

Soient A et B deux points distincts du plan et α un angle.

On appelle **arc capable d'extrémités *A* et *B* et d'angle $\boldsymbol{\alpha}$** l'un des arcs de cercle sur lesquels tout point M distinct de A et de B vérifie Mes $\widehat{\mathrm{AMB}} = \alpha$.

1.5. Exercice d'application

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 3cm$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{\mathrm{AMB}} = 45°$



LEÇON 2 : ENSEMBLE DES POINTS M DU PLAN TELS QUE

$$Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = x + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Durée : 100 minutes

Intérêt

- Repérer des objets ayant la forme d'un arc de cercle, les caractériser, les concevoir…
- Déterminer la position d'un navire par les marins en navigation côtière.

Motivation :

- Décrire des formes planes dans un décor.
- Détecter la répétition d'un motif dans une peinture, sur un tissu, sur un objet d'art graphique
- Dessiner un motif de tissu, schématiser une pièce mécanique.
- Repérer un lieu géométrique au niveau d'un rond-point.

Objectifs :

- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = x + 2k\pi$.
- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = x + k\pi$.

Prérequis :

Construire un arc capable d'extrémités et d'angle donnés. ***(voir la leçon précédente)***

1.1. Situation disciplinaire :

Après avoir construit l'ensemble des points M du plan tels que Mes $\widehat{\text{AMB}} = \alpha$, Pierre et Paul discutent sur celui des points M tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})$. Pierre dit qu'on aura toujours une réunion de deux arcs de cercle mais Paul n'est pas du tout d'accord. Réconciliez-les.

1.2. Activité d'apprentissage 1

Soient A et B deux points distincts du plan.

1) Soit M un point du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

   a) Comment sont les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$?

b) Quelle est la position du point M sur la droite (AB) ?

c) On suppose que M est sur ladite position. Que vaut $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})$?

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$.

Solution

1) Soit M un point du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

a) Si $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de même sens.

b) Le point M est donc sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

c) Si le point M est sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$, alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

d) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$.

L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

2) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$.

L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B, car les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de sens contraires.

1.1.3 Activité d'apprentissage 2

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm, I$ le milieu du segment $[AB]$. $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Placer un point T tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}}) = \alpha$

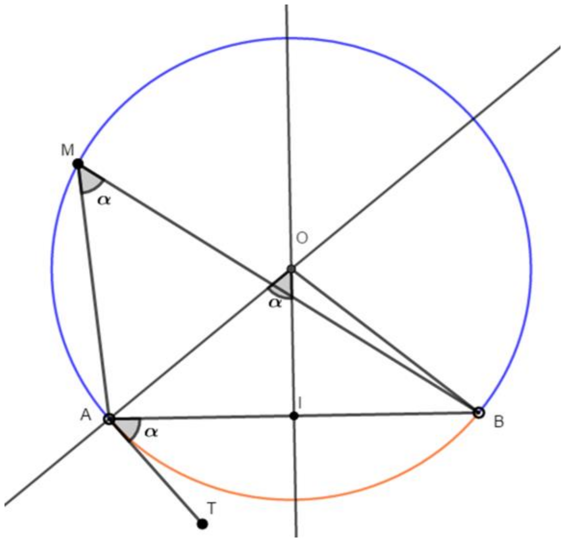
2) Soit O le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et de la perpendiculaire à la droite (AT) en A, (C) le cercle de centre O passant par A; M un point de $\breve{AB}$, distinct de A et B.

   a) Exprimer $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}})$ en fonction de α.

   b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}) = \alpha$

3) Faire de même lorsque :

   a) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ b) $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$,c) $\alpha \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$



Solution

1) Voir figure.
2) a. Comme dans l'activité de la leçon 1, Mes $\widehat{AOB} = 2\alpha$.

   Donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}}) = 2\alpha$.

   b. l'ensemble des points M du plan tels que

$Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}) = \alpha$ est est l'arc $\breve{AB}$ privé des points A et B.

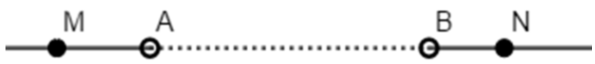
On remarque qu'en prenant un point N sur le symétrique de cet arc, les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{NA}\,;\overrightarrow{NB}})$ seront opposés.

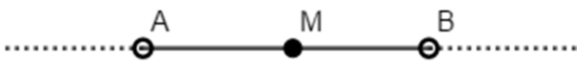
3) Raisonnement analogue au 2)

1.1. Propriété 1

Soient A et B deux points distincts du plan.

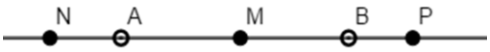
- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}) = 0$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.





- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \pi$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B.

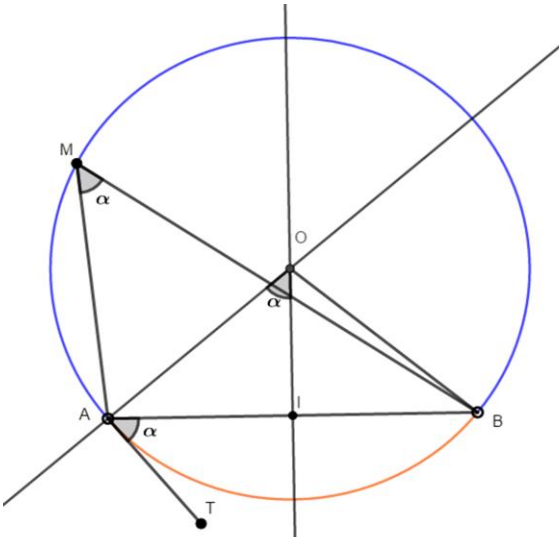
- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est la droite (AB) privée des points A et B.



1.2. Propriété 2

Soient A et B deux points distincts du plan,

$\alpha \in]-\pi;\pi[- \{0\}$, O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = 2\alpha$ et (C) le cercle de centre 0 et de rayon $0A$.

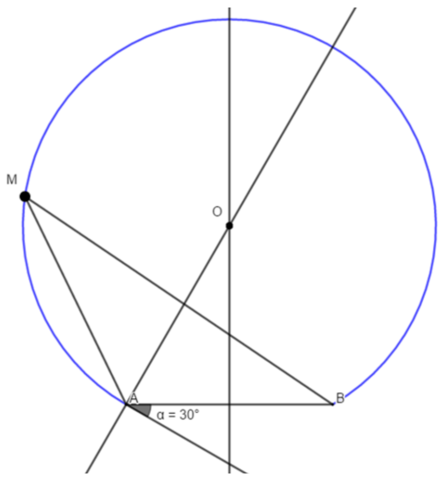


- Si $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé des points A et B.

  (« angle aigu : grand arc »)
- Si $\alpha \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est le petit arc de (C), d'extrémités A et B privé de A et de B. ***« angle obtus : petit arc »)***
- L'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + \boldsymbol{k}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ est le cercle (C), privé de A et de B.

1.3. **Remarque :** les deux 1er arcs sont situés sur le demi-plan de frontière (AB) **ne contenant pas *T*.**

1.4. ***Exemple:*** Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 3cm$. Construire l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{6}$.



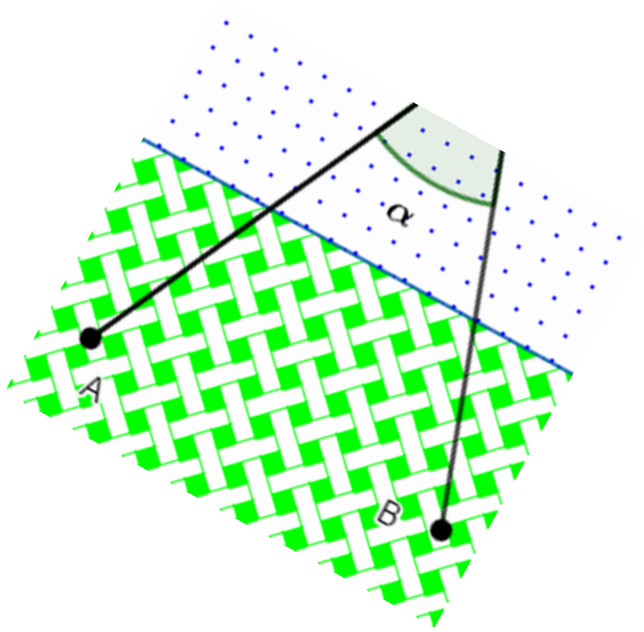
Exercice 1

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm$.

1) Construire sur des figures différentes les arcs capables d'extrémités A et B et d'angle α dans chacun des cas suivants : $\alpha = 60°; \alpha = 150°;\ \alpha = 90°$
2) Construire sur des figures différentes l'ensemble des points M du plan tels que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right) = \alpha$ dans chacun des cas suivants : $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $\alpha = -\frac{5\pi}{6}; \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi;$
$\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi; \alpha = \frac{2\pi}{3} + k\pi;\ \alpha = -\frac{5\pi}{6} + k\pi;\ \alpha = \frac{5\pi}{2}; \alpha = -\frac{7\pi}{2} + k\pi; \alpha = 3\pi; \alpha = 6\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Exercice 2

Pour déterminer la position exacte de leur navire M à un moment, des marins en navigation exploitent trois objets (amers) fixes A , B et C situés sur la côte. Le navire émet des rayons lumineux permettant de déterminer l'angle formé par deux amers vus depuis leur position. Pour les amers A et B, ils trouvent $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{6}$ tandis que pour les amers A et C, ils trouvent $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MC}\,;\overrightarrow{MA}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.



Refaire une figure et indiquer la position exacte du navire sachant que ABC est un triangle équilatéral de sens direct de côté $4m$ (*et que le point C est situé à $2m$ de la rive, elle-même parallèle à (AB)*).
La figure n'est pas à l'échelle

On représentera $1m$ par $1cm$.

CHAPITRE 5: ESPACES VECTORIELS REELS

Leçon 1: Notion d'espaces vectoriels

Durée : 50 minutes

Intérêts: savoir utiliser les espaces vectoriels

- Pour démontrer propriétés mathématiques.
- Pour définition des cadres adéquats pour l'étude de certaines notions de base
- Pour résoudre certains problèmes.

Motivation: La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Ils permettent de développer des théorèmes généraux pouvant s'applique sur plusieurs ensemble différents tel que l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, l'ensemble des fonctions, des suites, des polynômes etc.…. Par ailleurs, les méthodes de calculs numériques, le graphisme et plus particulièrement la 3D, la résolution des équations de la chaleur et de la corde vibrante, etc… sont la quelques application des Espaces vectoriels. Dans ce cour, nous allons développer les outils nécessaires à la résolution de tels problèmes.

Objectifs : -Montrer à partir de l'addition et de la multiplication par un réel qu'un ensemble est un espace vectoriel sur IR.

Prérequis: Soit G un ensemble non vide et + une loi de composition interne sur G

1) Qu'appelle-t-on loi de composition interne sur G?
2) Quels sont les propriétés à vérifier par la loi + pour que (G, +) soit un groupe commutatif?

Situation problème: Dans notre parcours scolaire, nous avons découvert les ensemble de nombres avec les opérations sur ces ensembles tels que l'addition, les soustractions, la multiplication, la division. Puis nous avons connues les ensembles des vecteurs, des polynômes, des fonctions, des suites etc.…. Sur ces ensembles nous pouvons également effectuer les mêmes opérations. Quels sont les propriétés communes vérifiées par l'addition et la multiplication par un réel indépendamment de l'ensemble choisi?

Activités d'apprentissage: Le plan est rapporté a un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On désigne par V l'ensemble des vecteurs du plan. Pour tous vecteurs $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{c}{d}$ ou a, b, c et d sont des réels et pour tout nombre réel α on définit également les opérations ''+'' et ''**.**''Suivantes: $\vec{u}+\vec{v}\binom{a+c}{b+d}$ et $\alpha.\vec{u}\binom{\alpha\times a}{\alpha\times b}$.

1) Etablir que $(V;\ +)$ est un groupe commutatif.
2) Soient α et β deux réels, montrer que la deuxième opération vérifie les propriétés suivantes :

- $\alpha.(\vec{u}+\vec{v})=\alpha.\vec{u}+\alpha.\vec{v}$
- $(\alpha+\beta).\vec{u}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{u}$
- $\alpha.(\beta.\vec{u})=(\alpha\times\beta).\vec{u}$

- $1.\vec{u} = \vec{u}$

Solution de l'activité d'apprentissage

- Montrons que $(V;\ +)$ est un groupe commutatif

Soient $\vec{u}\binom{a}{b},\ \vec{v}\binom{c}{d}\ et\ \vec{w}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

- $\vec{u} + \vec{v}\binom{a+c}{b+d}\ et\ \vec{v} + \vec{u}\binom{c+a}{d+b}$. or $a + c = c + a\ et\ b + d = d + b$; d'ou $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v})\binom{a+c}{b+d} + \vec{w}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{pmatrix} = \binom{a}{b}\vec{u} + \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix}(\vec{v} + \vec{w})$
- Posons $\vec{0} = \binom{0}{0}$. Ona $\vec{u} + \vec{0}\binom{a+0}{b+0} = \vec{u}\binom{a}{b}$. Donc $\vec{0}$ est l'élément neutre.
- Posons $\overrightarrow{u'}\binom{-a}{-b}$; alors $\vec{u} + \overrightarrow{u'}\binom{a-a}{b-b} = \vec{0}\binom{0}{0}$

Comme l'addition est commutative, associative, admet un élément neutre et que tous vecteurs a un symétrie, alors $(V;\ +)$ est un groupe commutatif

3)

- Montrons que $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

On a $\vec{u} + \vec{v}\binom{a+c}{b+d} \Rightarrow \alpha.(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} \alpha(a+c) \\ \alpha(b+d) \end{pmatrix}$. Or $\begin{pmatrix} \alpha a+ac \\ ab+\alpha d \end{pmatrix} = \binom{\alpha a}{\alpha b} + \binom{\alpha c}{\alpha d} = \alpha\binom{a}{b} + \alpha\binom{c}{d}$

D'où $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

- Montrons que $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

On a $(\alpha + \beta).\vec{u}\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\times a \\ (\alpha+\beta)\times b \end{pmatrix} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

Or $\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\times a \\ (\alpha+\beta)\times b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\times a+\beta\times a \\ \alpha\times b+\beta\times b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\times a \\ \alpha\times b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta\times a \\ \beta\times b \end{pmatrix} = \alpha\binom{a}{b} + \beta\binom{a}{b}$. D'où $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

- Montrons que $\alpha(\beta.\vec{u}) = (\alpha\beta).\vec{u}$

On a $\beta.\vec{u}\begin{pmatrix} \beta\times a \\ \beta\times b \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha.(\beta.\vec{u})\begin{pmatrix} \alpha\times(\beta\times a) \\ \alpha\times(\beta\times b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)\times a \\ (\alpha\beta)\times b \end{pmatrix} = (\alpha\beta).\vec{u}$. Comme $\begin{pmatrix} \alpha\times(\beta\times a) \\ \alpha\times(\beta\times b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)\times a \\ (\alpha\beta)\times b \end{pmatrix} = (\alpha\beta)\binom{a}{b}$

D'où $\alpha(\beta.\vec{u}) = (\alpha\beta).\vec{u}$

- Montrons que $1.\vec{u} = \vec{u}$

$$1.\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \times a \\ 1 \times b \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Résumé:

1- Loi de composition externe

Soit E un ensemble. Une loi « . » est appelé loi de composition externe de E à opérateur dans IR si et seulement si pour tout $\forall\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{et}\ \forall\ \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{IR}, \boldsymbol{\alpha u} \in \boldsymbol{E}$

Exemple : la loi **«** . **»** défini dans l'activité est une loi de composition externe de l'ensemble des vecteurs.

2- Espaces vectoriels

Soit E un ensemble, « + » une loi de composition interne sur E et **«** . **»** une loi de composition externe sur E.

On dit que E muni des lois « + » et « . » (et on écrit $(E,+,.)$) est un espace vectoriel réel lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées:

- $(E;\ +)$ est un groupe commutatif. On note 0_E son élément neutre.
- $\forall u,v\ \in E,\ \forall\alpha \in IR, on\ a\ \alpha.(u+v) = \alpha.u+\alpha.v$

(Distributivité de la loi « . » sur la loi « + » définie dans E)

- $\forall u\ \in E,\ \forall\alpha,\beta \in IR,\ on\ a(\alpha+\beta).u = \alpha.u+\beta.u$ (Distributivité de la loi « . » sur l'addition dans IR)
- $\forall u\ \in E,\ \forall\alpha,\beta \in IR, on\ a\ \ \alpha.(\beta.u) = (\alpha.\beta).u$ (Associativité mixte)
- $\forall u \in E, on\ a\ \ 1.u = u$ (1 est l'élément neutre de la loi externe)

Exemple:

L'ensemble des vecteurs V muni de l'addition et de la multiplication par un réel tel que définies dans l'activité est un espace vectoriel réel ou en encore un espace vectoriel sur IR.

Remarque : lorsque $(E,+,.)$ est un espace vectoriel réel, les éléments de E sont des vecteurs et peuvent être noté sans flèches tandis que les éléments de IR sont des scalaires. L'élément neutre de l'addition est noté 0 et l'élément neutre de la multiplication est noté 1.

Exercices d'application

Exercice 1: Montrer clairement que (IR ; +; .) est un espace vectoriel réel

Exercice 2 : on désigne par P l'ensemble des polynômes du second degré. On muni P de l'addition de l'addition de deux polynômes et de la multiplication par un réel. Montrer que (P , + ; .) est un espace vectoriel.

Leçon 2: Familles génératrices, familles libres, familles liées, Base d'un espace vectoriel

Durée : 50 minutes

Objectifs

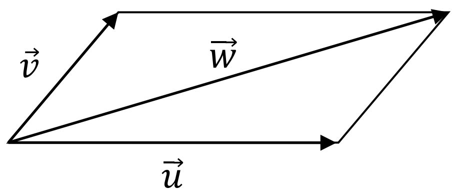
- Montrer qu'une famille finie est génératrice ; libre ; liée
- Montrer qu'une famille finie non vide est une base d'un espace vectoriel ;
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel tout en sachant que tout espace vectoriel admet plusieurs bases et celles-ci ont le même nombre de vecteurs lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie.

Pré-requis :

Le plan est rapporté a un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$; $\vec{v}\binom{2y}{3x}$, $\vec{w}\binom{-2}{5}$ et $\vec{t}\binom{3}{4}$ trois vecteurs du plan. Les coordonnées étant définies dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Déterminer les coordonnées de -3$\vec{w}$, de $4\vec{t} - 5\vec{w}$
2) Déterminer x et y tel que $5\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

Situation Problème :



Sur la figure ci contre, $\vec{w}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Représenter un vecteur $\vec{t}$ non nul dont la Composante en $\vec{w}$ dans la base ($\vec{u}$; $\vec{w}$) est le double De la composante de $\vec{w}$ dans la base ($\vec{v}$; $\vec{w}$)

Activité d'apprentissage:

on considère dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{2}{-1}$.

1) a) soient α et β deux nombres réels ; exprimer les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ en fonction de α et β.

b) A quel condition sur α et β à t-on $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$

Solution de l'activité

1-a) on a $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\binom{\alpha+2\beta}{2\alpha-\beta}$

1-b) $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \binom{\alpha+2\beta}{2\alpha-\beta} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + 2\beta = 0\\ 2\alpha - \beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

Donc $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ ssi $\alpha = \beta = 0$

Résumé:

1) Base d'un espace vectoriel

- **Définitions et exemples**

Soient $\overrightarrow{u_1}$,...,$\overrightarrow{u_n}$, n vecteurs d'un espace vectoriel E.

- Tout vecteur s'écrivant : $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n}$ avec λ_1,λ_2,...,λ_n n réels est appelé combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$,...,$\overrightarrow{u_n}$, affecté respectivement des coefficients λ_1,...,$\lambda_n \in IR$,
- Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, ... , $\overrightarrow{u_n}$ de E sont dites linéairement indépendants si et seulement si pour n réels λ_1,λ_2,...,λ_n tels que $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}_E$, on a λ_1=λ_2=...=λ_n=0. On dit aussi que la famille ($\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, ... , $\overrightarrow{u_n}$) est une famille libre de E.

Exemple: les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ définis dans l'activité précédente sont libres

- Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, ... , $\overrightarrow{u_n}$ de E sont dites linéairement dépendants si et seulement s'il existe des réels λ_1,λ_2,...,λ_n non tous nuls, tels que :$\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}_E$. On dit aussi que la famille ($\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, ... , $\overrightarrow{u_n}$) est une famille liée de E.

Exemple: les vecteurs $\vec{a}\binom{-4}{7}$ *et* $\vec{b}\binom{8}{-14}$ sont linéairement dépendants car $2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

- On dit que la famille($\overrightarrow{u_1}$,...,$\overrightarrow{u_n}$) est une **famille génératrice** de E ou encore que la famille ($\overrightarrow{u_1}$,...,$\overrightarrow{u_n}$) **engendre** E si tout vecteur $\vec{u}$ de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs $\overrightarrow{u_1}$,...,$\overrightarrow{u_n}$ avec des coefficients à déterminer (en fonction de $\vec{u}$) ; c'est-à-dire que:

$\forall \vec{u} \in E, \exists\, \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in IR$ tel que $\vec{u} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n}$

- Une base de E est tout système libre et générateur de E.

Exemple: on considère dans IR^2 les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{1}$ et $\vec{v}\binom{-1}{1}$.

Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de IR^2

- Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre.

Soient α *et* β deux réels tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Montrons que $\alpha = \beta = 0$

On a $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \binom{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre

- Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est générateur

Soit $\vec{a}\binom{x}{y} \in IR^2$; déterminons α *et* β *tel que* $\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

On a $\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \binom{x}{y} = \alpha\binom{1}{1} + \beta\binom{1}{-1} \Leftrightarrow \binom{x}{y} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{x-y}{2} \end{cases}$

Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est générateur

On conclut que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de IR^2.

- **Propriétés:**

- Toute famille contenant le vecteur nul est liée
- $\{\vec{u}\}$ est libre ssi $\vec{u} \neq \vec{0}$
- ($\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, ... , $\overrightarrow{u_n}$) est une base d'un espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de façon unique comme $\vec{u} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n}$. Le couple ($\lambda_1$,$\lambda_2$,...,$\lambda_n$) est alors appelé couple de coordonnées de $\vec{u}$

Remarque : La base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $\left(avec\ \vec{\imath}\binom{1}{0}\ et\ \vec{\jmath}\binom{0}{1}\right)$ est appelé base canonique de IR^2 et la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ $\left(avec\ \vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ et\ \vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de IR^3

2) Dimension d'un espace vectoriel

Définition:

Soit E un espace vectoriel et B une base de E. Le nombre de vecteur contenu dans B est appelé dimension de E noté dimE.

Donc $B = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \Leftrightarrow \text{dimE} = \text{n}$

Exemple

- dimIR = 1 ; Dim IR^2 = 2, dim IR^3 = 3. De manière générale dim IR^n = n
- Toute droite vectorielle est de dimension 1
- Tout plan vectorielle est de dimension 2
- Le vecteur nul est de dimension 0

Propriétés :

- Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre de vecteur
- Soient E un espace vectoriel de dimension n et $B = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une famille de n vecteurs de E : on a :

$$B\ est\ libre\ \Leftrightarrow B\ est\ générateur\ de\ E \Leftrightarrow B\ est\ une\ base\ de\ E$$

3) Cas particulier: Déterminant d'un couple de vecteurs relativement à une base.

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soient $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$.

- Le déterminant de $(\vec{u},\vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est le réel dét$(\vec{u},\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ et défini par

  $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.
- $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de E si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$.
- $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est lié si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$.

Exercice d'application

Exercice 1 : Dans IR^2 muni de sa base canonique, on pose $\overrightarrow{e_1}(-1;2)$; $\overrightarrow{e_2}(1;1)\ et\ \overrightarrow{e_3}(3;-6)$.

1) Montrer que la famille $(\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_3})$ est liée et que la famille $(\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ est une base de IR^2

Soit $\vec{u}(3;\ -2)$ dans la base canonique. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$

LEÇON 3 : SOUS ESPACES VECTORIELS

Durée : 100 minutes

Objectifs :

- Démontrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous espace vectoriel.
- Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel.
- Utiliser les propriétés des sous espaces vectoriels pour faire des démonstrations.

Pré-requis

Soient $A\binom{2}{-3}, B\binom{-1}{3}\ et\ C\binom{4}{4}$

1) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)
2) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis conclure

Situation problème:

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il faut établir huit propriétés. Jean élève en classe de première C se pose la question suivante : « étant donné (E, +, .) un ensemble muni respectivement d'une loi interne et d'une loi externe et F un sous ensemble de E. peut-on montrer plus rapidement que (F, +, .) est espace vectoriel si on a déjà établi que (E, +, .) est un espace vectoriel ». Pouvez-vous aider Jean ?

Activité d'apprentissage :

On désigne par E, l'ensemble des couple (x, y) de IR^2 vérifiant la condition ''2x+y=0''

1) Montrer que la somme de deux couples différents de E donne un couple qui appartient encore à E
2) Soit α un réel et (x, y) un couple de E. Montrer que $\alpha(x, y)$ est un couple de E

Solution de l'activité

1) Soient les couples $(x; y)$ et (x', y') appartenant à E, Montrons que $(x; y) + (x';\ y')$ appartient à E

On sait que $(x; y)\ \in E \Leftrightarrow 2x + y = 0\ et\ (x', y')\ \in E \Leftrightarrow 2x' + y' = 0$

Or $(x; y) + (x';\ y') = (x + x'; y + y')$

Ainsi on a $2(x + x') + (y + y') = 2x + 2x' + y + y' = (2x + y) + (2x' + y') = 0$

Donc $(x; y) + (x';\ y')$ appartient à E

2) Montrons que $\alpha(x, y) \in E$

On sait que $(x; y)\ \in E \Leftrightarrow 2x + y = 0$ et $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

D'où $2(\alpha x) +\ \alpha y = 2\alpha x + \alpha y = \alpha(2x + y) = 0$

Donc $\alpha(x,y)$ est un couple de E.

Résumé

Définition: Soit (E, +, .) un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est non vide c'est à dire $F \neq \emptyset$
- F est stable pour la loi +, c'est-à-dire ∀ u, v ∈ F, u+v ∈ F
- F est stable pour la loi. C'est-à-dire ∀ v ∈F ,∀λ ∈IR, λv ∈ F

Propriétés: F est un sous espaces vectoriels de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- F est non vide
- F est stable par combinaison linéaire c'est-à-dire ∀ u, v ∈ F et ,∀ α, β ∈IR, αv+βv ∈ F

Exemple: Le sous ensemble E=$\{(x;y) \in IR^2\ tel\ que\ 2x+y=0\}$ définit dans l'activité est un sous espace vectoriel de IR^2.

En effet les questions (1) et (2) montre que E est stable pour l'addition et la multiplication.

De plus $2\times 0+0=0$, ce qui veut dire que (0; 0) appartient à E. donc E est non vide

Propriétés.

- Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel et par conséquent, les propriétés des espaces vectoriels restent valables pour les sous-espaces vectoriels.
- Si E est un espace vectoriel, l'ensemble vide et E lui-même sont des sous espaces vectoriels de E appelés sous espaces vectoriels propre de E
- L'**intersection** de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel
- La **réunion** de deux sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel
- L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un système de vecteurs d'un espace vectoriel E sur IR est un sous espace vectoriel de E.

Exercice d'application

Considérons l'espace vectoriel réel ($\mathbb{R}^2$;+; ·) ainsi que les ensembles $E=\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2/2x-3y=0\}$ et F=$\{(x;y)\in IR^2\ tel\ que\ 2x+y+2=0\}$.

1) Montrer que F n'est pas un sous espace vectoriel de IR^2

2) Montrer que (E, +, .) est un espace vectoriel réel et déterminer une base de E

Solution

1) Montrons que F n'est pas un sous espace vectoriel

F est non vide car (0, -2) appartient à F.

Soient les couples $(x\,;y)$ et (x', y') appartenant à F.

On a $(x\,;y) + (x'\,;\,y') = (x + x'\,;y + y')$

Ainsi$2(x + x') + (y + y') + 2 = 2x + 2x' + y + y' + 2$

$$= (2x + y + 2) + (2x' + y' + 2) - 2$$

$$= -2 \neq 0.$$

Donc F n'est pas stable par addition et par conséquent n'est pas un sous espace vectoriel de IR^2.

2)

- Montrons que E est un sous-espace vectoriel de IR^2.

- On a 2(0) -3(0) = 0, le couple (0; 0) appartient à E, donc E est non vide.

Soient les couples $(x; y)$ et (x', y') appartenant à E et α un réel non nul.

- On a $(x; y) + (x';\ y') = (x + x'; y + y')$

Ainsi $2(x + x') - 3(y + y') = 2x + 2x' - 3y - 3y' = (2x - 3y) + (2x' - 3y') = 0$. Donc E est stable par addition.

- On $\alpha(x; y) = (\alpha x;\ \alpha y)$

Ainsi $2(\alpha x) - 3(\alpha y) = 2\alpha x - 3\alpha y = \alpha(2x - 3y) = 0$.

Donc E est stable pour la multiplication dans IR^2.

On conclut que E est un sous espace vectoriel de IR^2.

- Déterminons une base de E

- Soit $(x; y) \in E$ alors $2x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$. Ainsi $(x; y) \in E \Rightarrow (x; y) = \left(x; \frac{2}{3}x\right) = x(1; \frac{2}{3})$. Donc une base de E est le vecteur $\vec{e}(1; \frac{2}{3})$.

Exercice

On considère l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;\ \cdot)$ ainsi que les ensembles $F = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$ et $G = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + y = 0\}$

a) Montre que $F\ et\ G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ en précisant dans chaque cas une base et la dimension de chacun.

b) Vérifie que chacun des vecteurs $u = (1; 1)\ et\ v = (3; 2)$ appartient à $F \cup G$.

c) Le vecteur $u + v$ appartient-il à $F \cup G$.

d) Une réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle toujours un sous-espace vectoriel ? Justifie ta réponse.

e) Détermine le sous-espace F∩G.

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Soit (E,+,×) un espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E. on appelle somme des sous-espaces vectoriels F et G l'ensemble noté F+G défini par :$\{x + y,\ x \in F\ et\ y \in G\}$.

Somme directe :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $E_1\ et\ E_2$ deux sous-espaces vectoriels de E. si $\begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\} \\ E = E_1 + E_2 \end{cases}$ alors E est une somme directe des sous espaces vectoriels $E_1\ et\ E_2$. On écrit : $E = E_1 \oplus E_2$ et on dit aussi que $E_1\ et\ E_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Propriété :

Si E un espace vectoriel de dimension finie, $E_1\ et\ E_2$ deux sous-espaces vectoriels de E ;

si $\begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\} \\ dim\, E_1 + dim\, E_2 = dim\, E \end{cases}$ alors $E = E_1 \oplus E_2$.

lorsque $E = E_1 \oplus E_2$.

CHAPITRE 6 : APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES

Intérêt : Permettre d'écrire commodément les opérations habituelles de l'algèbre avec une certaine canonicité

Objectif :

-Maitriser les vocabulaires introductifs du chapitre.

-Montrer qu'une application est linéaire.

-Comprendre l'intérêt du noyau et de l'image d'une application linéaire.

-Déterminer Matrice d'une application linéaire d'un plan vectoriel dans lui-même.

Pré requis

I-ESPACE VECTORIEL

Définition : soit (E ; + ; •) un espace vectorielle sur IR, $\overrightarrow{O_E}$ l'element neutre de + dans E

Propriété : $\forall \alpha \in IR, \vec{u} \in E$, $\alpha\vec{u}=\overrightarrow{O_E} \leftrightarrow \alpha=0$ ou $\vec{u}=\overrightarrow{O_E}$

1-) F est un sous espace vectoriel de E sur IR ssi

- F est non vide
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \vec{u} + \vec{v} \in F$ (on dit que F est stable pour l'addition)
- $\forall \vec{u} \in F, \alpha \in IR, \alpha\vec{u} \in F$ (on dit que F est stable pour le produit)

Ou bien

- F est non vide
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F$, $\alpha,\beta \in IR$ *on a* $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F$ (on dit que F est stable par combinaison lineaire)

2) tout sous espace vectoriel de E contient l'élément neutre de E pour +

3) l'intersection de 2 sous espace vectoriel est un sous espace vectorielle

4) la réunion de 2 sous espace vectoriel de n'est pas toujours un sous espace vectoriel

5) $\{\overrightarrow{O_E}\}$ et E sont des sous espace vectoriel de E

6) Tout sous espace vectoriel de E distinct de $\{\overrightarrow{O_E}\}$ et E est appelé sous espace vectoriel propre de E.

7) Combinaisons linéaires

a-) E désigne un espace vectoriel sur IR, soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, n réels. Le vecteur $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{\lambda_2 u_2} + \cdots + \overrightarrow{\lambda_n u_n}$ est appelé combinaison lineaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ affectés des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$.

8) Soit E un espace vectoriel sur IR

-) Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ de E sont dits lineairement independants ssi pour n reels $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ tels que

$\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{\lambda_2 u_2} + \cdots + \overrightarrow{\lambda_n u_n}$= 0 on a λ_1=λ_2=... = λ_n=0 on dit aussi que la famille $\overrightarrow{(u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est libre de E.

- Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ de E sont dits linéairement dépendant ssi s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n}$= 0 on dit aussi que la famille $\overrightarrow{(u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est une famille liée de E .

9) Une base de E est tout système libre et générateur de E

- Toutes les bases de E ont le même nombre d'élément. Ce nombre est la dimension de E

-$\overrightarrow{(u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est une base de E d'un espace vectorielle ssi tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$.

10) Soit E un espace vectoriel de dimension 2 rapporté a une base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Soit $\vec{u}$=$a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\vec{v}$=$a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$

-) le déterminant de $(\vec{u}; \vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est le reel $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ et on ecrit

det$(\vec{u}; \vec{v})$=$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$=$ab' - a'b$

* $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de E ssi det$(\vec{u}; \vec{v})$≠0

* $(\vec{u}; \vec{v})$ est liée ssi det$(\vec{u}; \vec{v})$=0.

LEÇON 1 : APPLICATIONS LINEAIRES

Activité d'apprentissage 1

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (-2x, y + 3z)$, Soient $\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; soient\ \propto, \beta \in \mathbb{R}$

1 a)Calculer $f(\vec{u} + \vec{v})$et $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ puis comparer.

b) Comparer $(\beta\vec{u})et\ \beta f(\vec{u})$.

2 Calculer $f(\propto \vec{u} + \beta\vec{v})et\ \propto f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$ comparer.

Activité d'apprentissage 2

Soit E un espace vectorielle de dimension 2 sur IR .On considère l'application f dans E qui a tout vecteur $\vec{u}$=$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de E fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{u'}$=$x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ de E tel que

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

1-) Montrer que f est une application linéaire de E dans E

2) Calculer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$

1. Applications linéaires entre deux espaces vectoriels

(a) Définition.

Soient E et F deux IR - espaces vectoriels.

Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) $\forall\vec{u}, \vec{v} \in E, f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

(ii) $\forall\vec{u} \in E, \forall\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$;

Autrement dit, f est une application linéaire si :

$$\forall\vec{u}, \vec{v} \in E, \forall\propto, \beta \in \mathbb{R}, f(\propto \vec{u} + \beta\vec{v}) =\propto f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}).$$

Notation : l'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté L (E, F).

Exemple1 :

Soit E un espace vectorielle de dimension 2 sur IR .On considère l'application f dans E qui a tout vecteur $\vec{u}$=$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de E fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{u'}$=$x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ de E tel que

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

1-) Montrer que f est une application linéaire de E dans E

2) Calculer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$

SOLUTION

Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $\vec{v'}$=$x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} \in E$ et α,β ∈ IR montrer que α$\vec{u}$+β$\vec{v}$ ∈ .

α$\vec{u}$+β$\vec{v}$=$(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$.

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$=$\begin{cases} x' = 3(\alpha x + \beta x') + \alpha y + \beta y' \\ y' = \alpha x + \beta x' - 2(\alpha y + \beta y') \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \alpha(3x + y) + \beta(3x' + y') \\ y' = \alpha(x - 2y) + \beta(x' - 2y') \end{cases}$

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$=$\binom{x'}{y'}$=$\alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) \rightarrow$ α$\vec{u}$+β$\vec{v}$ ∈ donc f est une application

2) $\vec{\imath}\binom{1}{0}$,$\vec{\jmath}\binom{0}{1}$ $f(\vec{\imath})$=$\binom{3}{1}$= $3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $f(\vec{\jmath})$=$\binom{1}{-2}$= $\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

Exemple 2 :

- L'application identique Id_E est une application linéaire.
- Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est linéaire.

$$(x, y, z) \mapsto (-2x, y + 3z)$$

*Soient $\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; soient\ \propto, \beta \in \mathbb{R}$

On a : $\propto \vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta a, \beta b, \beta c)$
$= (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c)$

Il s'en suit : $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = f(\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c)$
$= \big(-2(\alpha x + \beta a), \alpha y + \beta b + 3(\alpha z + \beta c)\big)$
$= (-2\alpha x - 2\beta a, \alpha y + \beta b + 3\alpha z + 3\beta c)$
$= (-2\alpha x, \alpha y + 3\alpha z) + (-2\beta a, \beta b + 3\beta c)$
$= \alpha(-2x, y + 3z) + \beta(-2a, b + 3c)$
$= \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$.

(b) Vocabulaire et exemples

Soient E et F deux - espaces vectoriels.

- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée morphisme ou homomorphisme.
- Une application linéaire de E dans E est appelé endomorphisme.
- Un morphisme bijectif est un isomorphisme
- Un endomorphisme bijectif est un automorphisme.

(c) Quelques propriétés sur les applications linéaires

Activité

Soient E et F deux IR - espaces vectoriels. $\vec{O}_E\ et\ \vec{O}_F$ les vecteurs nuls respectifs de E et F. *f* une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que $\forall\vec{u} \in E, f(\vec{O}_E) = \vec{O}_F et\ f\ (\overline{-u}) = -f(\vec{u})$.

2. En déduire que $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f(\vec{u}-\vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v})$

Clé 1 Soit $\vec{u} \in E, on\ a :\ \vec{u} + \vec{O}_E = \vec{u}\ et\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O}_E$

f étant une application linéaire, $f(\vec{u}) + f(\vec{O}_E) = f(\vec{u})$

Donc, $f(\vec{O}_E) = -f(\vec{u}) + f(\vec{u}) = \vec{O}_F$

De même, $f(\vec{u}) + f(-\vec{u}) = f(\vec{O}_E)$ et comme $f(\vec{O}_E) = \vec{O}_F$, alors$f(\vec{u}) + f(-\vec{u}) = \vec{O}_F$, par conséquent, $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

Clé 2 Par linéarité, le résultat en découle !

Moralité : Si f est une application linéaire de E dans F, alors $f(\vec{O}_E) = \vec{O}_F$ et pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E, f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})\ et\ f(\vec{u}-\vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v})$.

Propriétés (admises)

Par une application linéaire f de E dans F /

- ✓ L'image de toute base de E est une base de F lorsque f est bijective.
- ✓ L'image d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
- ✓ L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

(d) Caractérisation d'une application linéaire entre espaces vectoriels

Soit E et F deux IR - espaces vectoriels de dimensions finies.

Une application linéaire f de E vers F est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E. Autrement dit, lorsqu'on connait les images par f des éléments d'une base de E, on dit que l'application linéaire f existe et est unique.

Exercice résolu

Soit E un espace vectoriel muni d'une base B = $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère l'application $f : E \to E$ qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $f(\vec{u}) = (2x-y)\vec{\imath} + (-4x+2y)\vec{\jmath}$.

1. Montrer que que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}) et\ f(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$.
3. Déterminer l'expression analytique de f.
4. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a}(-1;2) par\ f$.

Une solution

1. Il suffit de montrer que f est linéaire.
2. On a : $\vec{\imath}(1,0) et\ \vec{\jmath}(0,1)$, donc $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}\ et\ f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

   On en déduit que $f(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) = \vec{O}$.
3. Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \in E\ et\ \vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ un vecteur de E tel que $\vec{u}' = f(\vec{u})$.

$$\vec{u}' = f\,(\vec{u}) \Leftrightarrow x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = (2x-y)\vec{\imath} + (-4x+2y)\vec{\jmath} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -4x + 2y \end{cases}$$

4. Le vecteur $f(\vec{a})$ a pour couple de coordonnées $(-4\,;8)$.

2. Noyau et image d'une application linéaire

(a) Présentation

Activité

On considère l'application $f\,:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{u}(x,y) \mapsto \vec{u}'(x',y')/\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -4x + 2x \end{cases}$$

1. Déterminer et caractériser l'ensemble $E_1 = \{\vec{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, f(\vec{u}) = \vec{O}_{\mathbb{R}^2}\}$.
2. Déterminer et caractériser l'ensemble $E_2 = \{f(\vec{u})\,/\,\vec{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Une solution

1. Soit $\vec{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2 . f(\vec{u}) = \overrightarrow{O_{\mathbb{R}^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y = 0$

   E_1 est la droite vectorielle d'équation $2x - y = 0$.

   $2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$, ceci étant, $(x,y) = (x,2x) = x(1;2)$

   Une base de E_1 est $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

2. Soit $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

   $f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -4x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow y' = -2x'$

   E_2 est la droite vectorielle d'équation $2x + y = 0$; une base de E_2 est $\overrightarrow{e_2} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

(b) Définitions, détermination d'une base et équation caractéristique.

Soient E et F deux vectoriels ; f une application linéaire de E dans F.

- On appelle noyau de f , noté Ker f ou N_f, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont l'image par f est $\vec{O}_F$. Ker $f = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{O}_F\}$.
- On appelle image de f, notée Im f le sous-ensemble $f(E)$ de F, image de E par f.

  Im f $= f(E) = \{\vec{v} \in E, f(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Exercice résolu

E est un espace vectoriel dont une base est $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath} + 2\vec{\imath}) = \overrightarrow{O_E}$.

1. Déterminer Ker f . En donner une base.
2. Déterminer Im f . En donner une base.

(c) Propriétés

Soit f : E $\to F$ est une application linéaire :

P1) Ker f et Im f sont deux sous-espaces vectoriels respectifs de E et F.

P2) f est injective $\Leftrightarrow$ $Ker\ f\ = \{\overrightarrow{O_E}\}$.

P3) f est surjective $\Leftrightarrow$ Im f=F.

P4) Si f est injective, alors l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.

P5) Si f est surjective, alors l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

LEÇON 2 : MATRICES
Durée : 100 minutes

2.1 Définition

Soit E un espace vectoriel de base B = $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ *et* $f(\vec{\jmath}) = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$ où a, b, c *et* d *sont quatre réels*.

On appelle matrice de f dans la base B = $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le tableau noté M_f tel que

$$M_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Remarque : Toute matrice est entièrement déterminée par les images des vecteurs de base disposées en colonnes.

2. 2-) Matrice d'une application linéaire d'un plan vectoriel dans lui-même

Etant donné le plan E rapporte à une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ l'application de E dans E definie par $f(\vec{\imath})= a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, $f(\vec{\jmath})= c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$, a,b,c et d $\in IR$

• le tableau $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ est la matrice associé à l'application f relativement à la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$

2.3) Somme et composé de deux applications linéaire et produit

• La somme de deux applications est une application

• le produit d'une application linéaire par un réel est une application linéaire.

• la composée de deux applications linéaires d'un espace vectorielle E dans lui –même est une application linéaire.

2.4) Matrice d'une application linéaire d'un plan vectoriel dans lui-même

Etant donné le plan E rapporte à une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ l'application de E dans E definie par

$f(\vec{\imath})= a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, $f(\vec{\jmath})$=c $f(\vec{\imath}) + \ df(\vec{\jmath})$, a,b,c et d $\in IR$

• le tableau $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ est la matrice associé à l'application f relativement à la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$

2.5) Somme et produit de deux matrices

f et g étant deux applications linéaire de E dans E ,M(f) et M(g) les matrices respectives de f et g dans une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ de E .

• M(f)×M(g)=M(fog) on a $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'a+b'c & c'a+d'c \\ a'b+b'd & c'b+d'd \end{pmatrix}$

•M(f) +M(g)=M(f+g) on a $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$+$\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$

• kerf=$\{\vec{0}\}$ ssi detM(f)≠0

• l'application f est bijective ssi detM(f)≠0

• Si M(f)= $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, f étant bijective alors $M_{f^{-1}}$=$\frac{1}{\det(M_f)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Exercice résolu

Soit E un e.v de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, $\vec{0}_E$ le vecteur nul de E et soit m un reel. On définit f de E dans E par

$f(\vec{\imath})$=$(m)\vec{\imath} + (m+1)\vec{\jmath}$;

$f(\vec{\jmath})$=$(m-1)\vec{\imath} + (m-2)\vec{\jmath}$

I-1-) $\vec{u}(x;y)$ a pour coordonnées x et y dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ determiner $f(\vec{u})$ en fonstion de m, x, y, $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$

2-a) Quelle est la matrice A de f dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$

b) Pour qu'elles valeurs de m , f est-elle bijective ?

3-a) Calculer A²

b) Pour qu'elles valeurs de m , f est –elle une application involutive c'est-à-dire fof=Id_E ? Déterminer dans ce cas l'ensemble des vecteurs invariants par f

II- f est définie par : $f(\vec{\imath})$=$3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$, $f(\vec{\jmath})$=$2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$

1-) Soit k un réel et F=$\{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = k\vec{u}\}$. Demontrer que F est sous espace vectoriel de E.

2) Déterminer les sous espace vectoriels D_1 et D_2 de E définie par D_1=$\{\vec{u} \in E / f(\vec{u})$=$-\vec{u}\}$,D_2=$\{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = 5\vec{u}\}$. On donnera dans chaque cas une base

3-) Soient $\vec{u}_1$ une base de D_1 et $\vec{u}_2$ une base de D_2

a-) Montrer que $(\vec{u}_1 ; \vec{u}_2)$ est une base de E

b) Qu'elle est la matrice de f dans cette base.

SOLUTION

I-) $\vec{u}$=$x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ dans $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1-) $f(\vec{u})$=$f(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})$=$x\, f(\vec{\imath})$+$y\, f(\vec{\jmath})$

=$f(\vec{u})$=$x[(m)\vec{\imath}$ +(m+1)$\vec{\jmath}$]+y[(m-1)$\vec{\imath}$ +(m-2)$\vec{\jmath}$]

$f(\vec{u})$=$[mx+(m+1)y\ ]\,\vec{\imath}$+$[(m-1)x+(m-2)y\ \ ]\,\vec{\jmath}$

2- a) A=$\begin{bmatrix} m & m+1 \\ m+1 & m-2 \end{bmatrix}$; f est bijectif ssi detA≠0

b) detA=m(m-2)−(m+1)(m-1)=m²-2m-(m²-1)=-2m+1 detA≠0→$m \neq \frac{1}{2}$.Donc pour que f soit bijective, m ϵ IR\{$\frac{1}{2}$}

3-a) A^2=AxA=$\begin{bmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m-2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m^2-1 & 2(m-1)^2 \\ 2(m^2-1) & 2m^2-4m+3 \end{bmatrix}$

f est involutive $ssi\ fof = IdE$

$$\rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 1 = 1 \\ 2(m-1)^2 = 0 \\ 2(m^2-1) = 0 \\ 2m^2 - 4m + 3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 1\ ou\ m = -1 \\ m = 1\ ou\ m = -1 \\ m = 1 \\ 2m^2 - 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

La seule valeur de m qui vérifie les 3 équations est m=1 donc f est involutive ssi m=1

Pour m=1, A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ avec $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -\vec{\jmath}$,

L'ensemble des vecteurs invariants par f :

Ce sont $\vec{u} \in E$ / $f(\vec{u}) = \vec{u} \rightarrow A.\vec{u} = \vec{u} \rightarrow \begin{cases} x = x \\ 2x - y = y \end{cases} \rightarrow x - y = 0$

donc l'ensemble cherché est : {(x ;y) Є IR²/x-y=0}

II- On définit f par : $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}, f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1-) $f(0_E) = k.0_E = 0_E \rightarrow 0_E \in F$ donc f est non vide .

soient $\vec{u}\ et \vec{v} \in F$;α, β Є IR montrons que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F$

$\begin{cases} \vec{u} \in F \rightarrow f(\vec{u}) = k\vec{u} \\ \vec{v} \in F \rightarrow f(\vec{v}) = k\vec{v} \end{cases}$ f étant linéaire on a :

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha(k\vec{u}) + \beta(k\vec{v}) = k(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F$ donc F est sous espace vectorielle de E

2)• $D_1 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$. $f(\vec{u}) = -\vec{u} \rightarrow A\vec{u} = -\vec{u} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -x \\ 4x + y = -y \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + y = 0$ .D_1 est une droite vectorielle

(x ;y) Є $D_1 \rightarrow 2x + y = 0 \rightarrow y = -2x$; (x ;y)=(x ;-2x)=x(1 ;-2) posons $\vec{e_1} = (1; -2)$ .une base de D_1 est $\vec{e_1}$

• $D_2 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = 5\vec{u}\} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5x \\ 4x + y = 5y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow x - y = 0$

(x ;y)Є $D_2 \rightarrow x - y = 0 \rightarrow x = y$. (x ;y)=(x;x)=x(1;1) posons $\vec{e_2} = (1; 1)$

D_2 est une droite vectorielle engendré par le vecteur $\vec{e_2}$ dont une base de D_2 est $\vec{e_2}$

3-) $\vec{u_1} = \vec{e_1}, \vec{u_2} = \vec{e_2}$

a-) det($\vec{u_1}$; $\vec{u_2}$)=$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$=1+2=3≠0 donc ($\vec{u_1}$; $\vec{u_2}$) est une base de E

b) on a $f(\overrightarrow{u_1})=-\overrightarrow{u_1}$ car $\overrightarrow{u_1} \in$ D$_1$, $f(\overrightarrow{u_2})=5\overrightarrow{u_2}$ car $\overrightarrow{u_2} \in$ D$_2$. Donc la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u_1};\ \overrightarrow{u_2})$ est M=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Exercice 1

Soit φ un endomorphisme de E rapporté à la base B = $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qui, à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $\vec{u}' = (x - 2y)\vec{\imath} + (-3x + 2y)\vec{\jmath}$. On pose $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\ et\ \vec{e}_2 = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

1. Ecrire la matrice de φ dans la base B.
2. Soit g l'endomorphisme de E déterminé par g $(\vec{e}_1) = \vec{e}_1\ et\ g(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$.
    (a) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E.
    (b) Ecrire la matrice de g dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
    (c) Déterminer la matrice de g dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 2

E est un plan vectoriel de base B = $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère deux réels a et b et φ l'endomorphisme de E défini par : φ$(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et φ $(\vec{\jmath}) = (1 - a)\vec{\imath} + (1 - b)\vec{\jmath}$.

1. Donner la matrice M de φ dans la base B.
2. A quelle condition sur les réels a et b a-t-on φ bijective ?
3. On suppose que a = b = $\frac{1}{2}$. Déterminer Ker φ et Imφ. En préciser les bases.

Calculer la matrice de φ ° φ – 2 φ + id.

CHAPITRE: INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHES

Durée : 100 minutes

Intérêt : Maitriser le vocabulaire de la théorie des graphes et en faire usage pour la résolution de certains problèmes de la vie courante.

Motivation : Quotidiennement, nous sommes souvent confrontés à des situations de la vie courante comme bitumage de route, la détermination du plus court chemin quand il y en a plusieurs pour arriver à un endroit, le coloriage d'une carte graphique de sorte que deux régions ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Certaines notions de mathématiques à l'exemple de celles que nous verrons dans ce chapitre vont nous édifier dessus.

Objectifs pédagogiques :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de,

- Justifier qu'une représentation graphique est un graphe;
- Justifier qu'un graphe est simple, complet, orienté;
- Déterminer l'ordre d'un graphe, le degré d'un sommet;
- Connaitre quand est-ce que deux sommets sont dits adjacents;
- Manipuler les formules qui existent entre nombre d'arêtes et degrés de sommets.

Prérequis :

1. Dessine un cube ABCDEFGH,
2. Cite tous les sommets de ce cube,
3. Combien d'arrêtes compte ce cube?

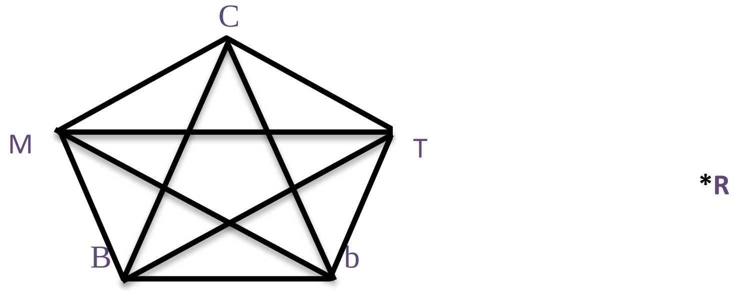
Situation de vie : Bachelard envoie son petit frère Landry de la P^{ère}C à la boulangerie pour lui acheter un gâteau et un cahier dans une boutique de la ville. Landry lui dit ce sera possible, sauf qu'il va rentrer un peu tard, puisqu'il a un programme chargé. Etant donné qu'il n'ira non seulement travailler au collège avec son camarade de classe sur la fiche de TD de mathématiques mais aussi jouer au ballon dans un stade d'à côté et rendre visite à sa tante Ramatou. Landry veut schématiser tout son parcours et déterminer le nombre total de routes qui existent entre sa maison(M), le collège(C), la boulangerie(B), la boutique(b) et le terrain de foot(T), il voudrait proposer cela au maire de la ville pour faciliter le bitumage de ces axes, ce qui était proposé pendant les campagnes électorales en 2020. Sachant qu'il existe toujours une et une seule route entre ces destinations et qu'il a annulé de se rendre chez sa tante Ramatou(R). Landry coincé, te demande de lui venir en aide pour résoudre ce problème.

Activité d'apprentissage:

1. Modélise par une figure le parcours de Landry. Par exemple entre sa maison et la boutique on aura : M *——————* B. Cette figure compte combien de sommets ?
2. Nomme tous les segments de ce schéma,
3. Le point M est lié à combien de points?
4. Détermine le degré de tous les sommets et calcule la somme de ces degrés,
5. Quelle relation existe-t-il entre le nombre total d'arêtes et la somme totale des degrés?
6. Aide Landry à déterminer le nombre total de routes demandé dans la situation problème.

Solution de l'activité d'apprentissage

1. Modélisons par une figure, le parcours qu'effectuera Landry :



Ses sommets sont M, C, B, b, T et R. On dit qu'ils constituent un graphe d'ordre 6.

2. Les différents segments de cette figure sont : $[MC]$, $[MB]$, $[Mb]$, $[MT]$, $[TC]$, $[Tb]$, $[TB]$, $[BC]$, $[bC]$ et $[Bb]$. Ces segments sont appelés les arêtes du graphe.
3. M est lié à 4 points à savoir : C, B, b, T. On dit que le degré du sommet M est 4.
4. Les sommets C, B, b, T sont aussi de degré 4. Le sommet R n'est relié à aucun sommet, il est dit isolé, de degré 0. La somme de tous les degrés est 4+4+4+4+4= 20.
5. Nous avons au total 10 arêtes et $20 = 2 \times 10$. (On peut conclure sur la relation).
6. Il y' a au total 10 routes qui relient tous les endroits qu'il veut parcourir.

Résumé :

1. Définitions et vocabulaire

a. Un graphe est un ensemble de points (appelés sommets) et de lignes (appelées arêtes) reliant certains de ces points.

b. L'ordre d'un graphe est le nombre total de ses sommets.

c. Le degré d'un sommet S est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. On le note généralement deg(S) et on lit « degré du sommet S ».

d. Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.

e. Un sommet est isolé lorsqu'aucune arête ne le relie aux autres.

f. Un graphe orienté est un graphe dont ses arêtes (appelés arcs) sont orientées par des flèches.

g. Un graphe simple est un graphe sans boucle tel que, entre deux sommets il y ait au plus une arête.

h. Un graphe complet est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres. (Autrement dit, c'est un graphe simple dont chaque sommet est relié à tous les autres par une et une seule arête).

Remarque: R1. S'il y a plusieurs arêtes entre deux sommets, on parle d'arêtes multiples,

R2. Une boucle est compté deux (2) comme degré d'un sommet.

N.B : Un graphe G peut être noté par G = (S, A); où $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ désigne un ensemble de points appelés sommets et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ l'ensemble d'éléments appelés arêtes. L'ordre de G est Card(S) et le nombre total d'arêtes de G est Card(A).

Exemples de graphes (orienté, simple, complet):

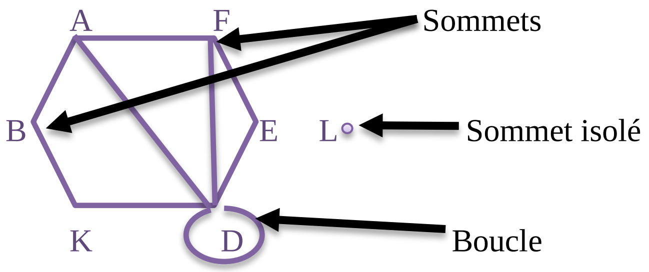


figure 1

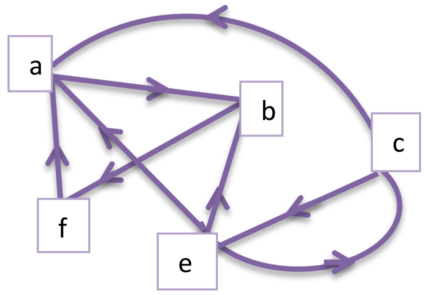
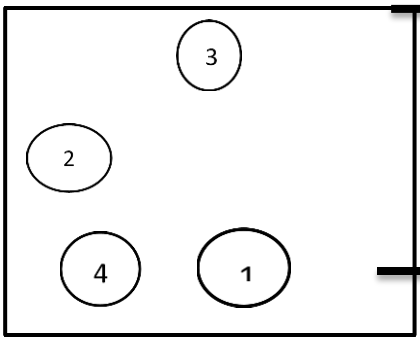


figure2

Le graphe de la ***figure 1*** n'est ni orienté (absence des flèches), ni simple (juste à cause de la présence d'une boucle en D). $\{A, B\}$; $\{A, F\}$ et $\{A, D\}$ sont les arêtes d'origine A, d'extrémités respectives B, F et D. Tandis que celui de la ***figure 2*** est orienté (présence flèches sur toutes les arêtes), mais non simple (à cause de la présence d'arêtes multiples entre les sommets **e** et **c**). (a, b); (b, f) et (c, e) sont les arcs d'origine a, b et c d'extrémités respectives b, f et e respectivement. Les arcs (b, a); (a, c); (a, f); (b, c) ;… n'existent pas.



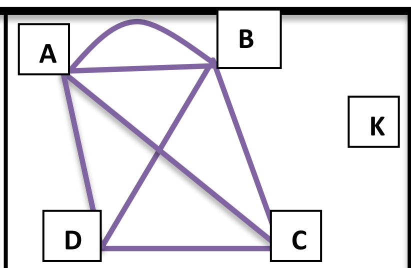


figure 4

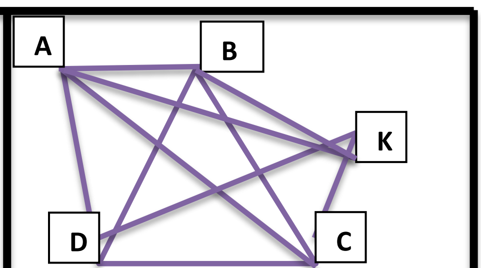


figure 5

Le graphe de la ***figure 3*** est dit discret ou encore stable, car aucun sommet du graphe n'est lié à l'autre.

Le graphe de la ***figure 4*** n'est pas complet (car il n'est pas simple). Rendons ce graphe complet en ***figure 5.***

2. Propriétés et corollaire:

a) **Propriété 1** *(lemme des poignées de main)*:
Dans un graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre de ses arêtes.

b) **Corollaire**: Soit G = (S, A) un graphe, où S = $\{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ et A = $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. le nombre total d'arêtes de G est donné par $\boldsymbol{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \deg(s_i)$.

c) **Propriété 2:** Dans un graphe complet d'ordre n;

i) Le degré de chaque sommet est $n - 1$,

ii) Le nombre total d'arête(s) est $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercices d'applications :

Exercice 1

1. Dessine un graphe orienté d'ordre 7 à 9 arêtes ayant une boucle et 2 sommets isolés.
2. Un graphe simple d'ordre 5 à 6 arrêtes est tel que les 4 premiers sommets ont pour degrés 4-2-1-2 respectivement. Quel peut-être le degré du 5ème sommet? Dessine un tel graphe.
3. a. Construis un graphe complet (Gr) d'ordre 8 ;

   b. Détermine le degré de chaque sommet, ainsi que le nombre total d'arêtes de (Gr).
4. On suppose que G = (S, A) est un graphe où $\{s_1, s_2, s_p, s_q\}$ tel que $\deg(s_i) = i^2$. Détermine en fonction de p et q le nombre a d'arêtes total du graphe G et, Donne la condition nécessaire que p et q doivent vérifier pour qu'un tel graphe existe.

Exercice 2 : Une compagnie privée de transport aérien dessert les capitales de six pays. Le Cameroun(C), le Tchad(T), la France(F), le Benin(B), le Gabon(G) et le Nigéria(N). Le tableau ci-dessous donne le plan de vols directs existant dans le transport aérien de cette compagnie.

Etant à	B	C	N	G	T	F
Il est possible d'aller à	C	T, G, F	C	B	N	G, T

1. Dessine le graphe permettant de modélise ce réseau de transport aérien ;
2. Complète le tableau suivant et donne le nombre de vols directs de cette compagnie:

Destination(s)	B	C	N	G	T	F
Degré(s)						

3. M. MBAPPE est à Paris et désire se rendre à Yaoundé en empruntant cette compagnie. Décris tous les itinéraires possibles qu'il peut avoir;
4. Des diplomates Gabonais et Tchadien se trouvant à Paris prennent un avion de cette compagnie pour se rendre dans leurs Pays respectifs. Lequel des itinéraires doit choisir le pilote pour minimiser la distance ? Utilise les distances en kilomètres ci-dessous.

Paris Libreville	Ndjamena Abuja	Libreville Cotonou	Paris Ndjamena
5433	892	1025	4251

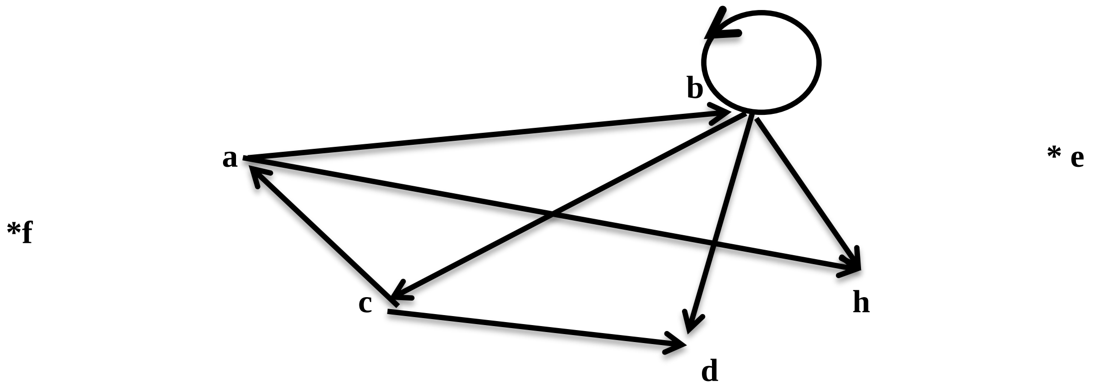
Cotonou Yaoundé	Yaoundé- Ndjamena	Abuja- Yaoundé	Libreville-Yaoundé
1043	995	730	450

5. Cette compagnie souhaite relier chaque pays aux autres par des vols aller –retour

hebdomadaire. Quel est le nombre maximal de ces vols aller-retour?

CORRECTION DES EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. Dessinons un graphe orienté d'ordre 7 à 9 arêtes ayant une boucle et 2 sommets isolés.



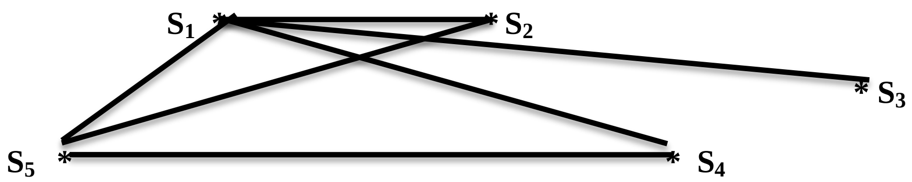
2. Un graphe simple d'ordre 5 à 6 arrêtes est tel que les 4 premiers sommets ont pour degrés 4-2-1-2 respectivement.

- Déterminons le degré du $5^{\text{ème}}$ sommet.

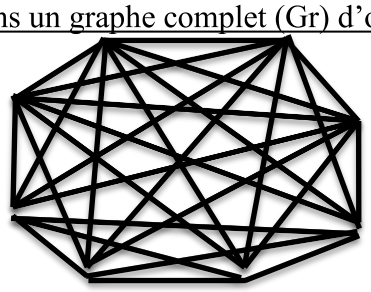
Soit x le degré du $5^{\text{ème}}$ sommet. Comme dans un graphe (**propriété 1),** la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre de ses arêtes, alors: $x + 4 + 2 + 1 + 2 = 2 \times 6$. C'est-à-dire que $x + 9 = 12$. D'où $x = 12 - 9 = 3$.

Donc le degré du $5^{\text{ème}}$ sommet est 3.

- Dessinons le graphe qui respecte nos conditions données :



3. a. Construisons un graphe complet (Gr) d'ordre 8:



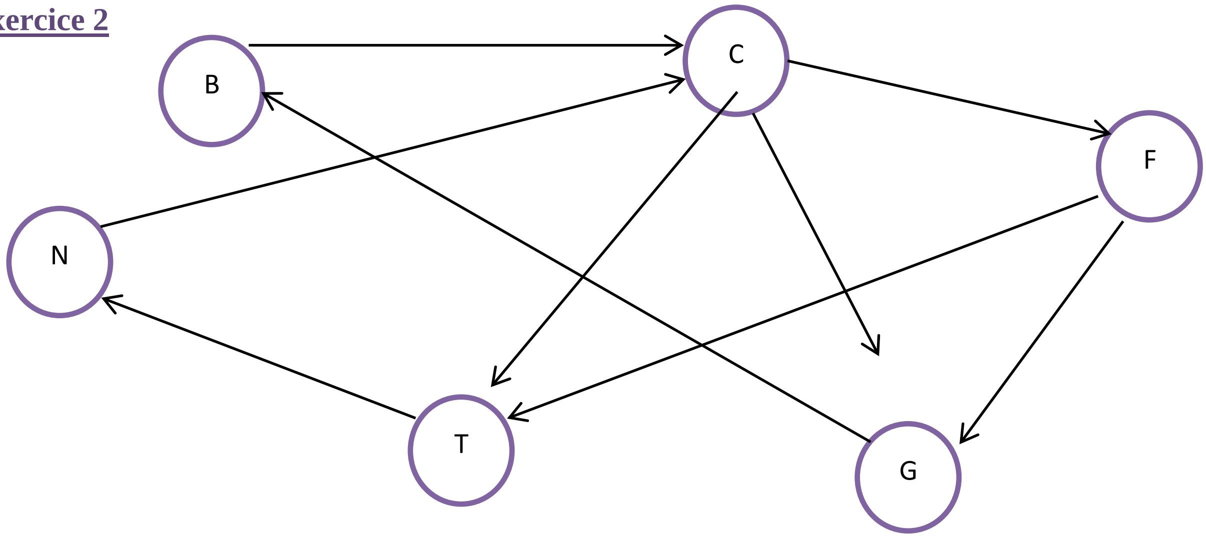
b. Déterminons le degré de chaque sommet, ainsi que le nombre total d'arêtes de (Gr) :

- Comme (Gr) est complet d'ordre 8, alors chaque sommet est de degré $8 - 1 = 7$;
- Le nombre total d'arêtes est $C_8^2 = \frac{8\times(8-1)}{2} = 28$ arêtes.

4. Déterminons le nombre total d'arêtes a de G. D'après le corollaire ci-dessus, nous avons la relation $a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \deg(s_i)$. Comme dans le présent cas nous avons $\deg(s_i) = i^2$, il vient que $a = \frac{1+4+p^2+q^2}{2}$. D'où $a = \frac{5+p^2+q^2}{2}$. L'existence de G est conditionnée par $5 + p^2 + q^2$ pair. C'est-à-dire que l'on doit avoir p impair et q pair ou encore p pair et q impair pour qu'en fin $p^2 + q^2$ soit impair.

Exercice 2

1.



2.

Destination(s)	B	C	N	G	T	F
Degré(s)	2	5	2	3	3	3

La somme totale des degrés est $2 + 5 + 2 + 3 + 3 + 3 = 18 = 2 \times 9$. Donc, il y a 9 vols directs.

3. Les différents itinéraires que MBAPPE aura besoin sont:

$a)$ F $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ C et $b)$ F $\longrightarrow$ T $\longrightarrow$ N $\longrightarrow$ C

4. Les différents itinéraires pour que ces deux voyageurs arrivent à destinations sont :

$a)$ F $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ T.

La distance à parcourir est $5433 + 1025 + 1043 + 995 = 8496\ Kilomètres$

$b)$ F $\longrightarrow$ T $\longrightarrow$ N $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ G.

La distance à parcourir est $4251 + 892 + 730 + 450 = 6323\ Kilomètres.$ Il en découle de ces deux options que, la meilleure pour minimiser la distance est d'emprunter l'itinéraire b); car $8496km$ est supérieur à $6323km$.

5. Lorsque ces six pays seront reliés chacun à tous les autres, ce graphe deviendra un graphe complet d'ordre 6. Ce qui fait que, entre deux capitales F et Y par exemple il y aura toujours deux possibilités de vols; c'est-à-dire F $\longrightarrow$ Y et Y $\longrightarrow$ T. Ainsi, le nombre total (maximal) de vols aller-retour pour les six pays sera donc égal à $C_6^2 = 15\ vols.$

Bilingual game *(the key words of this chapter):*

Translate the following keywords into english: Théorie des graphes, Graphe simple, graphe orienté, graphe complet, graphe discret, ordre d'un graphe, degré d'un sommet, sommet isolé.

CHAPITRE : BARYCENTRES ET LIGNES DE NIVEAUX

INTERET : Le barycentre et les lignes de niveaux permettent de caractériser et de construire des figures géométriques planes d'en calculer les aires et les périmètres.

MOTIVATION : la notion de barycentre et les lignes de niveaux viennent compléter le raisonnement mathématiques dans la détermination de certaines formes de figures géométriques ; dans le repérage des points à partir d'autres points donnés. Le barycentre doit nous permettre de trouver le point d'équilibre d'un solide sur une balance, de trouver le centre de gravité d'un solide.

LEÇON 1 BARYCENTRES DE DEUX POINTS

Durée : 50 minutes

MOTIVATION: la notion de barycentre doit nous permettre de trouver le point d'équilibre d'un solide sur une balance.

Objectifs pédagogiques

Utiliser les propriétés vectorielles pour construire un barycentre.

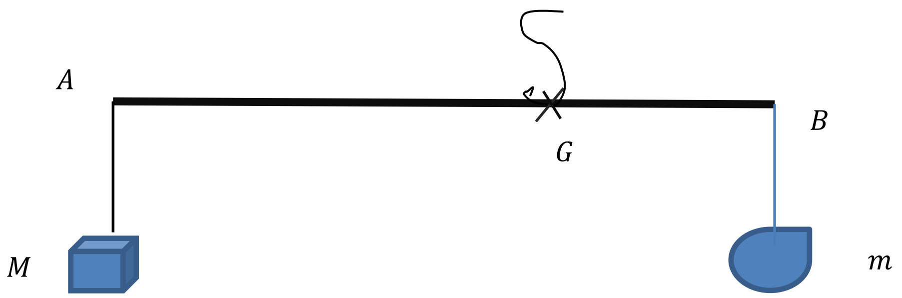
Reconnaitre et construire le barycentre de 2 points pondérés.

Prérequis

1) Définir la relation vectorielle que vérifie le point I milieu du segment $[AB]$
   Réponse : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$
2) Ecrire simplement le vecteur : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{CJ}$ **Réponse :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Situation problème

BOGNO achète du mil blanc au marché de kai-kai à $300\ F$ le Kg pour le revendre à Maroua. Il utilise une balance constituée d'une barre de fer homogène de masse $M = 50Kg$ fixée à l'une des extrémités A de la barre. Pour peser une masse m placée à l'autre extrémité B de la barre, BOGNO place à une position précise G un crochet qui maintient cette dernière en équilibre. Mme FARAYE accroche son sac de mil et BOGNO lui paye $30000F$. A quelle position G BOGNO a-t-il obtenu équilibre ?



Activité d'apprentissage

Soit $A\ et\ B$ deux points distincts du plan. $\alpha\ et \beta$ des réels. G Un point du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) Montrer que $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$
2) Si $\alpha+\beta=0$, que peut-on dire de G ?
3) On suppose $\alpha+\beta\neq 0$, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$.
4) En prenant $\alpha=M\ et\ \beta=m$ Déterminer la position G obtenu par BOGNO dans la situation problème.

Solution de l'activité d'apprentissage

1) $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$

2) Pour $\alpha+\beta=0$, on a $0\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
Donc G n'existe pas

3) On obtient $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

4) La valeur de la masse m est : $m=\frac{30000}{300}=100Kg$

A l'équilibre : On a la relation $M\overrightarrow{GA}+m\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

RETENONS

R_1) *Définition :*

Soient A et B deux points du plan. $\alpha\ et\ \beta$ deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$ il existe un unique point G vérifiant la relation : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ On dit que G est barycentre des points $A\ \ et\ B$ affectés des coefficients respectifs $\alpha\ et\ \beta$. $On\ note\ G=bar\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\beta)\}$

SI $\alpha+\beta\neq 0$,par la propriété de Chasles on a $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

NB De cette relation, Il vient aussi que les points $A\ ,B\ et\ G$ sont situés sur une même droite donc sont alignés.

Remarque : G est indépendant de l'ordre des points $A\ et\ B$.

R_2) *Homogénéité du barycentre*

Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*, et\ G = bar\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\beta)\} = G = bar\{(A,\lambda \times \alpha)\ ;\ (B,\lambda \times \beta)\}$

R_3) Coordonnées de $G = bar\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\beta)\}$

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $A(x_A,y_A)\ et\ B(x_B,y_B)$ on a :

$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

R_4) Isobarycentre

$si\ \alpha = \beta$, On dit que G est isobarycentre de A et B. On note $G = bar\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\alpha)\}$

NB L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment$[AB]$.

R_5) Réduction du vecteur : $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ avec M un point du plan.

$Si\ \alpha + \beta = 0$, Alors le vecteur $\vec{u}$ est indépendant de M.

$Si\ \alpha + \beta = 0$, Alors le vecteur $\vec{u} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Exercice d'application : 1a page 194 (Ciam SE)

Exercice :

Le plan est muni d'un repère. On considère les points $A(1;4)\ et\ B(-2;-4)$, G le barycentre des points pondérés $(A\ ,2)$ et $(B\ ,1)$.

Déterminer les coordonnées de G.

LEÇON 2 : BARYCENTRE DE PLUS DE DEUX POINTS

durée : 50 minutes

MOTIVATION : la notion de barycentre doit nous permettre de trouver un trésor dans un champ triangulaire point, de trouver le centre de gravité d'un solide.

Objectifs pédagogiques

Utiliser les propriétés vectorielles pour construire un barycentre de plus de deux points.

Reconnaitre et construire le barycentre de plus de 2 points pondérés.

Prérequis

Définir le centre de gravité **Réponse :** C'est le point d'équilibre d'un solide

Situation problème

M.Bogno a enterré un trésor dans un champ triangulaire de sommets ABC. A sa mort, son fils découvre dans le testament que le trésor est enterré en un point T vérifiant la relation suivant :$\overrightarrow{AT} + 2\overrightarrow{BT} + 3\overrightarrow{CT} = \vec{0}$. Aide le fils de Bogno à repérer la position de ce trésor.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Soit A, B et C trois points distincts du plan et G un point du plan. α, β et γ des réels tels que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1) Montrer que $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$
2) G existe-t-il pour $\alpha + \beta + \gamma = 0$?
3) On suppose $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4) En prenant $\alpha = 1, \beta = 2$ et $\gamma = 3$ Déterminer la position du trésor T défini dans la situation problème.
5) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Les coordonnées des points A, B et C sont données par les couples respectifs :$(3,1)$; $(-2,2)$ et $(1, 8)$.
   a) Montrer que $6\overrightarrow{0T} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{0B} + 3\overrightarrow{0C}$
   b) Déterminer les coordonnées du point T.

RETENONS

R_1) Définition :

Soient A, B et C trois points du plan. α , β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ il existe un unique point G vérifiant la relation : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ On dit que G est barycentre des points A , B et C affectés des coefficients
respectifs α , β et γ . On $note$ $G = bar\{(A, \alpha)$; (B, β); $(C, \gamma)\}$

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$,par la propriété de Chasles on a

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Remarque : G est indépendant de l'ordre des points $A\,,B\ et\ C$.

R_2) *Homogénéité du barycentre*

Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Soit $\lambda\epsilon\mathbb{R}^*, et\ G = bar\{(A,\alpha)\,;\,(B,\beta),(C,\gamma)\}\,, G = bar\{(A,\lambda\times\alpha)\,;\,(B,\lambda\times\beta);(C,\lambda\times\gamma)\}$

R_3) *Coordonnées de* $G = bar\{(A,\alpha)\,;\,(B,\beta),(C,\gamma)\}$

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $A(x_A,y_A)\,,B(x_B,y_B)\ etC(x_C,y_C)$ on a :
$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$

Exemple : Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne
$A(1\,,1)\,;\,B(1,-2)\ C(\,3{,}5)$ G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et 3 a pour coordonnées $G(\frac{1\times1+1\times2+3\times3}{1+2+3};\frac{1\times1-2\times2+5\times3}{1+2+3})$ d'où $G(2\,;2)$

R_4) *Isobarycentre*

$si\ \alpha = \beta = \gamma$, On dit que G est isobarycentre de A, B et C. On note
$G = bar\{(A,\alpha)\,;\,(B,\alpha),\}(C,\alpha)$

NB L'isobarycentre de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

R_5) *Association du barycentre ou barycentre partiel*

On suppose $G = bar\{(A,\alpha)\,;\,(B,\beta),(C,\gamma)\}$ si $\beta + \gamma = \alpha' \neq 0$ alors on peut poser $H = bar\{\,(B,\beta),(C,\gamma)\}$ et G dévient $G = bar\{(A,\alpha)\,;\,(H,\alpha')\}$ H est appelé barycentre partiel.

R_6) *Réduction du vecteur :* $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ **avec M un point du plan**.

$Si\ \alpha + \beta + \gamma = 0$, Alors le vecteur $\vec{u}$ est indépendant de M.

$Si\ \alpha + \beta + \gamma \neq 0$ Et $G = bar\{(A,\alpha)\,;\,(B,\beta),(C,\gamma)\}$ Alors le vecteur

$\vec{u} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$

Exemple : G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et 3.
$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (1 + 2 + 3)\overrightarrow{MG} = 5\overrightarrow{MG}$

Exercice d'application

Soit ABC est un triangle.

a) En utilisant la définition du barycentre, construire le barycentre G des points pondérés $(A\,,1)$,$(B\,,-1)$ et $(C,3)$.

b) Construire le barycentre H des points pondérés $(B\,,-1)$ et $(C,3)$. Puis Construire le barycentre G des points pondérés $(A\,,1)$,$(H\,,2)$

c) Réduire le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.

LEÇON 3 : UTULISATION DES BARYCENTRES

Durée : 50 minutes

MOTIVATION : la notion de barycentre va nous permettre de compléter le raisonnement mathématique dans la détermination et dans le repérage des points à partir d'autres points donnés.

Objectifs pédagogiques

Utiliser les propriétés du barycentre pour montrer que des droites sont concourantes ; pour montrer que des ponts sont alignés.

Prérequis

ABC est triangle quelconque .Construire les points L et N tels que $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN} = \frac{1}{8}\overrightarrow{CB}$

Situation problème

BOGNO a titré un terrain triangulaire ABC de 10 hectares, où A, B et C sont les bornes du terrain. Il souhaite y construire 4 établissements lucratifs : un marche (M) , une école (E) , un centre de santé (S) et une salle de jeu (J) de telle sorte que le sommet B, l'école et la salle de jeu soient alignés. Déplus, il souhaite que les axes routiers droits $(AJ), (BE)$ et (CM) se rencontrent en un carrefour. Son géomètre lui propose d'adopter les relations ci-dessous et son souhait sera exhaussé. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ $et\ S$ le milieu de $[CM]$. Crois-tu que le géomètre a raison ?

Activité d'apprentissage

Soit ABC un triangle tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ $et\ S$ le milieu de $[CM]$.

1) Ecrire M comme barycentre des points A et B dont les coefficients sont à préciser
2) Ecrire E comme barycentre des points A et C dont les coefficients sont à préciser
3) Ecrire J comme barycentre des points B et C dont les coefficients sont à préciser
4) Montrer que S, E et B sont alignés.
5) Montrer que $S \in (CM) \cap (AJ) \cap (EB)$.
6) Répondre à la question posée dans la situation problème

Solution de l'activité d'apprentissage

Exprimons les points M, E , J et S sous forme de barycentre

1) $M = bar\{(A, 1); (B, 2)\}$
2) $E = bar\{(A, 1); (C, 3)\}$
3) $J = bar\{(B, 2); (C, 3)\}$ et $S = Isobar\{(C, 3); (M, 3)\}$

4) Il vient donc que $S = bar\{(A,1)\ ;(B,2)\ ;(C,3)\}$ par suite $S = bar\{(E,4)\ ;(B,2)\}. Donc\ S \in (EB)$ donc S,E et B sont alignés
5) Déplus $S = Isobar\{(C,3);(M,3)\} \Leftrightarrow S \in (CM)$
   $S = bar\{(A,1)\ ;(B,3)\ ;(C,3)\} \Leftrightarrow S = bar\{(A,1);(J,3)\} \Leftrightarrow S \in (AJ)$

   Il vient donc que $S \in (CM) \cap (AJ) \cap (EB)$
6) En conclusion le sommet B, l'école et la salle de jeu sont alignés et les axes routiers $(AJ),(BE)\ et\ (CM)$ se rencontrent en un carrefour. Le géomètre a raison.

Résumé :

R_1) Pour montrer que trois quelconques sont alignés, il suffit de trouver deux réels tels que l'un des points soit le barycentre de points pondérés des deux autres.

R_2) Pour démontrer que des droites sont concourantes, il suffit de montrer que qu''on peut trouver un point qui appartient à chacune de ces droites.

Exemple : ABD est un triangle et M le milieu du segment $[AD]$.Les points I et C tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{DC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DI}\ On$ a : $I = bar\{(A,1);(B,2)\}$
$C = bar\{(D,1);(I,3)\} = bar\{(D,1);(A,1);(B,2\} = bar\{(B,2);(M,2)\}$

Les points $B\ ,C\ et\ M$ sont alignés.

Exercice d'application

ABC est un triangle équilatéral de côté $4cm$. On donne les points P , Q et R du plan tels que :

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\ ,\overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ .On\ pose\ G = bar\{(A,1)\ ;(B,2)\ ;(C,1)\}$$

1) faire une figure
2) démontrer que les droites $(AR),(BP) et\ (CQ)$ sont concourantes.

LEÇON 4 LIGNES DE NIVEAUX
(durée 100 minutes)

MOTIVATION: les lignes de niveaux, en utilisant le barycentre vont compléter le raisonnement mathématique dans la détermination de certaines formes de figures géométriques ; dans le repérage des points à partir d'autres points donnés.

Objectifs pédagogiques

Déterminer, caractériser et construire l'ensemble E_k des points M du plan vérifiant

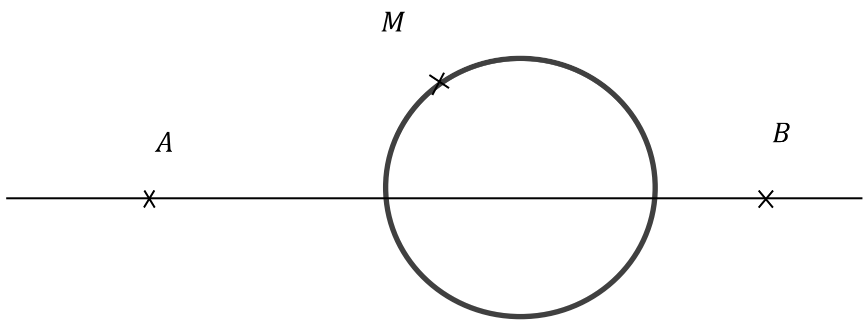
$E_k = \{M \in P, f(M) = k, k \in R\}$ où f est une fonction de M.

Prérequis

1) Enoncer le théorème des médianes
Réponse : soit I milieu du segment $[AB]$ $pour\ tout\ point\ M\ du\ plan\ ona: MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
2) Présenter les relations d'Alkashi dans un triangle quelconque
Réponse : ABC est un triangle. On a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.ACcos\widehat{BAC}$
3) ABC est un triangle tel que $AB = 5cm$ $AC = 4cm$ et $BC = 3cm$ calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
Réponse : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 16$

Situation problème

BOGNO a acheté un terrain (E) de forme circulaire. Son géomètre lui a présenté le schéma ci-dessous. On note que la droite (AB) est axe de symétrie de son terrain et de plus tout point M du cercle vérifie la relation $MA^2 - 4MB^2 = 0, AB = 150m$. BOGNO a un problème celui de connaitre la superficie de son terrain. Aide le résoudre son problème.



LIGNES

Le but ici est de déterminer l'ensemble $E_k = \{M \in P, MA^2 + MB^2 = k, k \in R\}$

Activité d'apprentissage

Soit $[AB]$ un segment de milieu I.

1) En utilisant le théorème des médianes, montrer que pour tout point $M \in E_k, MI^2 = \frac{1}{2}(k - \frac{AB^2}{2})$
2) Discuter et déterminer suivant les valeurs de k l'ensemble E_k

Résolution de l'activité d'apprentissage (retenons)

1) D'après le théorème des médianes, on a pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$. Pour tout point $M \in E_k, 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = K$. Il vient que: $MI^2 = \frac{1}{2}(k - \frac{AB^2}{2})$.
2) Si $\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right) < 0$, alors $k < \frac{AB^2}{2}$ *et* $E_k = \emptyset$.

   Si $\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right) > 0$, alors $k > \frac{AB^2}{2}$ *et* E_k est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)}$.

   Si $\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right) = 0$, alors $k = \frac{AB^2}{2}$ *et* $E_k = \{I\}$.

Exemple : A et B sont distants de 8 cm déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = K$.où $k = 2$, $k = 32$ *et* $k = 50$

Pour $k = 2$, on a $MI^2 = -15$ d'où l'ensemble cherché ici est l'ensemble vide.

Pour $k = 32$, on a $MI^2 = 0 \Leftrightarrow M = I$ d'où l'ensemble cherché ici est le point G.

Pour $k = 50$, on a $MI^2 = 9$ *donc* $MI = 3$ d'où l'ensemble cherché ici est le cercle de centre I et de rayon 3 cm.

LIGNES DE NIVEAUX DE TYPE $MA^2 - MB^2 = K$.

Le but ici est de déterminer l'ensemble $E_k = \{M \in P, MA^2 - MB^2 = k, k \in R\}$

Activité d'apprentissage

Soit $[AB]$ un segment de milieu I et H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

1) Factoriser $MA^2 - MB^2$
2) Montrer que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$
3) Déduire la position du point H
4) Déterminer E_k

Résolution de l'activité d'apprentissage (retenons)

1) $MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \quad (1)$
2) En introduisant le point I, en développant et en réduisant (1)on obtient :

$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$ (2)

Puis (H) projeté orthogonal de M sur (AB) signifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH} = 0$; on a :

$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM})$

$= 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH}$

$= 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$ Car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH} = 0$

3) Les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc il existe un réel non nul α tel que $\overrightarrow{IH} = \alpha\overrightarrow{AB}$. D'où $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH} = 2\alpha AB^2$
   D'où $2\alpha AB^2 = k$ c'est à dire que $\alpha = \frac{k}{2AB^2}$

L'égalité $\alpha = \frac{k}{2AB^2}$ permet de déterminer la position du pont Hpour k et AB donnés

4) D'après la relation $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MH} = 0$ on peut conclure que E_k estla droite perpendiculaire à (AB) en H

Exemple : A et B sont distants de 8 cm déterminer des points M tels que :

$MA^2 - MB^2 = 16.$

On a : $2\alpha AB^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \frac{16}{2AB^2} = \frac{1}{8}$ d'où $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$. L'ensemble des points cherché ici est la droite passant par H et perpendiculaire à (AB).

LIGNES DE NIVEAUX DE TYPE $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = K$.

Le but ici est de déterminer l'ensemble $E_k = \{M \in P,\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k, k \in R\}$

Activité d'apprentissage

Soit $[AB]$ un segment de milieu I

1) Pour tout point M du plan, montrer $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
2) En déduire que pour tout point M de E_k, $MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$
3) Discuter et déterminer suivant les valeurs de k l'ensemble E_k

Résolution de l'activité d'apprentissage (retenons)

1) En introduisant le point I et en développant, on a :
   $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

   $= MI^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

   $= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

2) $M \in E_k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

   $\Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k$

$\Leftrightarrow\ MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$

3) Si $k + \frac{1}{4}AB^2\ < 0$, alors $k < -\frac{AB^2}{4}\ et\ E_k\ = \emptyset$.

   Si $k + \frac{1}{4}AB^2\ > 0$, alors $k > -\frac{AB^2}{4}\ et\ E_k$ est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{1}{4}AB^2}$.

   Si $k + \frac{1}{4}AB^2\ = 0$, alors $k = -\frac{AB^2}{4}\ et\ E_k = \{I\}$.

Exemple : A et B sont distants de 8 cm déterminer et construire l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = K$.où $k = -32\ , k = 2\ et\ k = -16$

Pour $k = -32\ , MI^2 = -32 + \frac{1}{4}8^2 = -16$. L'ensemble des points cherché ici est l'ensemble vide.

Pour $k = 2\ , MI^2 = 2 + \frac{1}{4}8^2 = 18\ d'où\ MI = 3\sqrt{2}$. L'ensemble des points cherché ici est le cercle de centre I et de rayon $3\sqrt{2}$.

Pour $k = -16\ , MI^2 = -16 + \frac{1}{4}8^2 = 0\ d'où\ MI = 0$. L'ensemble des points cherché ici est le point I

LIGNES DE NIVEAUX DE TYPE $\frac{MA}{MB} = K$.

Le but ici est de déterminer l'ensemble $E_k = \left\{M \in P,\ \ \frac{MA}{MB} = k, k \in R\right\}$

Activité d'apprentissage

Soit $[AB]$ un segment

1) Démontrer que pour tout point M du plan, $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0$
2) Soit $G = \left\{(A, 1)\ ; (B, -k)\right\}\ et\ H = \left\{(A, 1)\ ; (B, k)\right\}$

   Montrer que $\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH} = 0$
3) Déterminer E_k

Résolution de l'activité d'apprentissage (retenons)

1) Pour tout point M du plan, $\frac{MA}{MB} = k, \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 - \left(k\overrightarrow{MA}\right)^2 = 0$

   $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0$
2) Pour tout point M du plan,

$(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}-k\overrightarrow{MG}-k\overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}+k\overrightarrow{MH}+k\overrightarrow{HB})=0$

$$\Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{MG}.(1+k)\overrightarrow{MH}=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH}=0$$

3) $M\in E_k \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\perp\overrightarrow{MH}$
E_k est le cercle de diamètre de$[GH]$

LIGNES DE NIVEAUX DE TYPE $\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\right\|=k$

Le but ici est de déterminer l'ensemble $E_k=\{M\in P,\ \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\right\|=k,\ k\in\mathbb{R}\}$

Pour $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ et G barycentre des points (A_i,α_i)

On a $\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\right\|=k \Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_i})\right\|=k$

$$\Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}\right\|=k$$

$$\Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}\right\|=k$$

$$\Rightarrow MG=\frac{k}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

Si $k=0$ alors $M=G$

Si $k<0$ alors l'ensemble cherché est le vide

Si $k>0$ alors l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{k}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4cm.Déterminer l'ensemble des points du plan tels que$\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|=4$

LIGNES DE NIVEAUX DE TYPE $\alpha MA^2+\beta MB^2=K$.

Le but ici est de déterminer l'ensemble $E_k=\{M\in P,\alpha MA^2+\beta MB^2=k,k\in R\}$

Cas où $\alpha+\beta=0\neq 0$

Activité d'apprentissage 1

Soit $[AB]$ un segment et $G=\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$

1) Montrer que pour tout M du plan, $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2$
2) Montrer que pour tout M de $E_k, MG^2 = \varphi$ où φ *est* un réel à préciser.
3) Discuter et déterminer suivant les valeurs de φ l'ensemble E_k

Résolution de l'activité d'apprentissage 1 (retenons)

1) En introduisant le point G et en développant on a :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2$$

$$= (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$$

$$= (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 \quad car\ \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

2) $M \in E_k \Leftrightarrow (\alpha+\beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 = k$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k-\alpha GA^2-\beta GB^2}{\alpha+\beta}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \varphi \quad avec \quad \varphi = \frac{k-\alpha GA^2-\beta GB^2}{\alpha+\beta}$$

3) Si $\varphi < 0$ alors $E_k = \emptyset$

   Si $\varphi > 0$ alors E_k est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\varphi}$

   Si $\varphi = 0$ alors $E_k = \{G\}$

   Exemple : A et B sont distants de 8 cm déterminer l'ensemble des points M tels que :

   $MA^2 + 3MB^2 = K$, où $k = 48$, $k = 30$ *et* $k = 116$

- Soit $G = \{(A,1)\,;(B,3)\}$ on a= $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$ *il vient donc que* $AG = 8,$
  $BG = 2$ *et* $4MG^2 + GA^2 + 3GB^2 = 4MG^2 + 44$
- Pour $k = 44, 4MG^2 + 44 = 44$ *donc* $MG = 0$ d'où L'ensemble des points M cherché ici est le point G .
- Pour $k = 30, 4MG^2 + 44 = 30$ *donc* $MG^2 = \frac{-7}{2}$ d'où L'ensemble des points M cherché ici est l'ensemble vide.
- Pour $k = 116, 4MG^2 + 44 = 116$ *donc* $MG^2 = 18$ c'est-à-dire $MG = 3\sqrt{2}$ d'où L'ensemble des points M cherché ici est le cercle de centre G et de rayon $3\sqrt{2}$

Activité d'apprentissage 2

On reprend l'énoncé de la situation problème et on pose les questions suivantes :

1) Calculer les distances BG et AG.
2) Montrer que $4MA^2 - 4MB^2 = -3MG^2 - 3000.$
3) Déterminer la nature et les éléments de (E).
4) Calculer l'aire de terrain de BOGNO.

Résolution de l'activité d'apprentissage 2

1) Soit $G = \{(A, 1)\,;(B, -4)\}$ on a $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$ *il vient donc que* $BG = 50$ *et* $AG = 200$
2) $MA^2 - 4MB^2 = -3MG^2 + GA^2 - 4GB^2 = -3MG^2 - 30000$
3) $MA^2 - 4MB^2 = 0 \Leftrightarrow MG^2 = 10000$ C'est-à-dire $MG = 100$.
   Donc le terrain de BOGNO est un disque de rayon $100m$
4) l'aire de son terrain est alors $\pi r^2 = 10000\pi m^2$

Cas où $\alpha + \beta = 0$. confère ligne de niveaux $MA^2 - MB^2 = K$

RESUME

Les lignes de niveaux sont soit l'ensemble vide, soit une droite soit un point soit un cercle.

Exercice d'application

ABC est un triangle équilatéral de côté 6cm et G l'isobarycentre des points A, B et C. Soit f une fonction du plan telle que $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

1) Calculer $f(A)\,, f(B)$ *et* $f(C)$
2) Montrer que $f(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$
3) Montrer que $GA = GB = GC = 2\sqrt{3}\,cm$
4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = 72$.

MODULE 21	RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

CHAPITRE4 : GENERALITES SUR LES FONCTIONSNUMERIQUES

INTERET :

- Représenter l'évolution d'une grandeur dans le temps ou décrire une grandeur qui dépend de la position de mesure dans un espace, comme la température ou la pression en météorologie
- Modifier l'influence d'un ou plusieurs paramètres sur un résultat comme le chiffre d'affaire d'une entreprise de production

  LECON 1 : Notion de fonctions et d'applications

  DUREE : 100mn

MOTIVATION :

- Valeurs interdites dans un calcul
- Correspondances entre des ensembles

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Déterminer par calculs l'ensemble de définition d'une fonction numérique.
- Déterminer la restriction d'une fonction numérique sur un intervalle.
- Justifier qu'une application est injective, surjective, bijective.

PRE-REQUIS :

Définition d'une fonction

Situation problème

Dans un pays, les maires des villes A, B et C aimeraient délivrer les actes de mariage de la manière suivante :

- Dans la ville A, tous les hommes n'ont droit qu'à la monogamie ou le célibat
- Dans la ville B, les hommes ne peuvent signer que la polygamie
- Dans la ville C, la monogamie s'impose à tous les hommes

Aidez-les à établir une correspondance entre l'ensemble des femmes et l'ensemble des hommes de chaque ville sachant que ne peuvent se marier que les personnes issues d'une même ville.

Activité d'apprentissage

On donne les fonctions ci-dessous

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R}\backslash\{-1;1\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2 - 4 \qquad x \longmapsto \frac{2x^2-4}{x^2-1} \qquad x \longmapsto \sqrt{3x^2-9} \quad ;$$

$i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{2x-5}{x^2+3x+7}$ $\qquad$ $x \longmapsto \sqrt{|-2x+5|-4} + \frac{5}{x+3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-dessus
2) Parmi les fonctions définies ci-dessus, lesquelles ont l'ensemble de définition comme ensemble de départ ?

On les appelle des applications.

On considère les applications $f, g\ et\ h$ définies par :

$f: \mathbb{R}\backslash\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{3\}$; $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **et** $h: [-3;\ +\infty[\longrightarrow [-8;\ +\infty[$

$x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$ $\qquad$ $x \mapsto 3x^2+4$ $\qquad$ $x \longmapsto x^2+6x+1$

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ tels que $f(a) = f(b)$. Montrer que $a = b$.

On dit que f est une application injective.

4-a) Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ montrer que l'équation d'inconnue x; $f(x) = y$ a pour solution $x = \frac{2y+1}{y-3}$.

b) La valeur de x trouvée à la question précédente existe-t-elle ? Pourquoi ?

c) Montrer que $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

On dit que f est une application surjective.

5) comparer $g(2)$ et $g(-2)$; que peut-on conclure par rapport à g ?

Une application est dite bijective lorsqu'elle est injective et surjective

NB : lorsque la valeur de x trouvée ci-dessus est unique, seuls les éléments de la question 2) permettent de conclure que l'application est bijective.

L'application h est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Résumé

1. *Définitions*

Définition : On appelle application toute fonction dont l'ensemble de définition est égal à l'ensemble de départ.

Exemple : La fonction f de l'exemple précédent est une application.

Remarque : Soient f et$g$ deux fonctions. On dit que $f = g$ si :

1. f et g ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée ;
2. $Df = Dg$
3. Pour tout $a \in Df, f(a) = g(a)$.

Définition : On appelle fonction numérique toute fonction dont l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$, on parle fonction numérique d'une variable réelle.

Exemple 2: La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\frac{|x^2-1|}{x-4}}$ est une fonction numérique d'une variable réelle

2. restriction, prolongement.

Soit $E\ et\ E'$ deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $E' \subseteq E$.

Soit $f\ :\ E\ \to\ F\ et\ g\ :\ E'\ \to\ F$. Si pour tout $x\ \in\ E', on\ a\ f(x) =\ g(x)$, on dit que f prolonge (ou f est un prolongement de) g à $E\ ou\ que\ g$ est la restriction de f à E'.

Exemple

$On\ pose\ f\ :\ \mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}, x\ \mapsto \sqrt{|x|-2}\ et\ g\ :\ \mathbb{R}\ \longmapsto\ \mathbb{R}, x\ \longmapsto\ \sqrt{x-2}$. On vérifie que

$Df\ =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[\ et\ Dg\ =\ [2\,;+\infty[\ donc\ Dg\ \subset\ Df$. De plus, il est évident que $f(x)\ = g(x)$

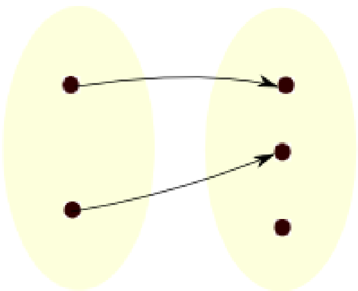
pour tout $x\ \in\ Dg$. g est donc la restriction de f à $[2\,;+\infty[\ et\ f$ est un prolongement de g à Df.

3. Applications injectives, surjectives, bijectives

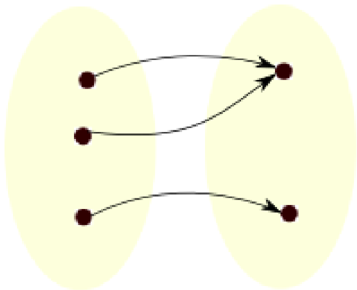
Soit E et F des ensembles et f une fonction de E dans F.

3.1.Injection

Une fonction $f : E \to F$ est dite **injective** si deux éléments de l'ensemble de départ ont toujours deux images par f distinctes dans l'ensemble d'arrivée. Une autre façon de formuler cette définition est de dire que, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet toujours au plus une solution.



Une application injective



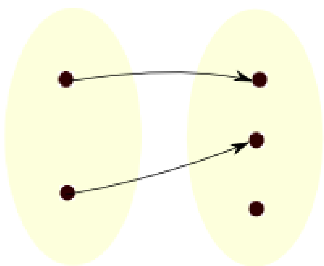
Une application non injective

Définition f est injective si pour tous a, b de E avec (a $\neq$ b) , $f(a) = f(b)$ entraîne $a = b$.

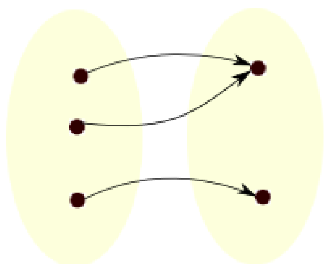
Si E et F sont des ensembles finis, il ne peut y avoir une injection de E dans F que si F a plus d'éléments que E.

3.2.Surjection

Une fonction $f : E \to F$ est dite **surjective** si, pour tout élément y de F (l'ensemble d'arrivée), l'équation $y = f(x)$ admet toujours au moins une solution x appartenant à E (l'ensemble de départ).



Une application non surjective



Une application surjective

3.3.Bijection

Une fonction $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, ou encore si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution. Si E et F sont des ensembles finis, E et F doivent alors avoir le même nombre d'éléments.

Théorème

une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image par f.

Exemple : On considère l'application f : $\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ $définie\ par\ f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$. 2 n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective. Par contre pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, son antécédent est $x = \frac{y-1}{y-2}$, donc f $est\ injective.$ f n'est donc pas bijective mais l'application g : $\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\} définie\ par\ g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ est une bijection.

Exercices d'application

I- Le matricule : soit f la fonction qui a chaque élève associe un matricule et g la fonction qui a chaque élève on associe une date de naissance. On remarque que deux élèves ont toujours un numéro de matricule différent... En revanche, il existe plusieurs élèves qui sont nées un 06 février 2002.

Si on prend un troupeau de vaches, et on associe à h la fonction qui à une patte associe la vache à qui cette patte appartient

1. Comment appelle – on la fonction f qui à une personne associe son matricule ?
2. la fonction g qui à une personne associe sa date de naissance est-elle la même que la précédente ?
3. Comment appelle –on la fonction h qui à une patte associe la vache à qui cette patte appartient

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto \sqrt{x}$.

4. Dire dans quel cas cette fonction existe
5. Déduire son domaine de définition D.
6. Puis considérant f comme une application de D dans $\mathbb{R}$, donner l'image de cette application.

Réponses

1. elle est injective
2. elle n'est pas injective.
3. elle est surjective
4. Si x est positif ou égale à 0
5. $D = \mathbb{R}^+$
6. $Image\ de\ f = \mathbb{R}^+$ sachant que si x appartient a $\mathbb{R}^+$ on peut s'écrire $x = y^2$.

II- Soient f et g les fonctions définies par :

$f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto & \sqrt{x^2-4} \end{matrix}$; $g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto & \sqrt{x-2} \times \sqrt{x+2} \end{matrix}$

1) Déterminer les ensembles de définition de f et g.

2) Les fonctions f et g sont-elles égales ?Sinon déterminer le plus grand ensemble sur lequel $f = g$

LECON 2 : COMPOSITION DES APPLICATIONS ET DES FONCTIONS DUREE : 2 HEURES

Motivations : Interaction verbale sur des informations comportant des chiffres

Prérequis

Différencier une fonction d'une application

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Déterminer la composée de deux applications, ou de deux fonctions.
- Expliciter la bijection réciproque d'une fonction bijective.

Situation Problème:

Ambroise une jeune élève de la classe de troisième se rend au musée pendant les vacances pour faire des recherches par rapport à une leçon qu'elle a aimé pendant le cour d'histoire de M. TEBAYA. Le musée étant construit entièrement en verre jusqu'au sol, une fois à l'intérieur, Ambroise voit son reflet au sol, au-dessus ,sur les côtés ainsi que dans les différents angles . Comment expliquer à la jeune fille le phénomène auquel elle fait face ?

Activité d'apprentissage

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions définies par

$f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1. résoudre les équations d'inconnues x définies par $f(x) = y$ et $g(x) = y$
2. Déterminer les expressions des applications réciproques $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$ respectivement de f et de g
3. Calculer $g[f(x)]$ et $f[g(x)]$. Comparer le résultat
4. Calculer $f^{-1}[g^{-1}(x)]$ et $g^{-1}[f^{-1}(x)]$ Comparer le résultat
5. Donner le sens de variation f de puis de g sur $[0; +\infty[$

Résumé

1. Composition des applications

Définition

Soit $f : \mathrm{E} \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow \mathrm{G}$ deux applications. On appelle composé de f par , l'application notée $f \circ g$ défini de E vers G par : Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Exemple : L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ est une bijection et admet pour bijection réciproque la fonction$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

2. Bijection réciproque:

Définition Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. On appelle bijection réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F *dans* E qui à tout élément $y \in F$, associe l'unique antécédent de y *par* f.

Définition

Soit E un ensemble non vide. On appelle identité de E (ou application identique de E) l'application notée Id_Edéfinie de E vers E et telle que pour tout élément x de E on a : $Id_E(x) = x$

$Id_E : E \rightarrow E$

$x \mapsto Id_E(x) = x$

Proposition : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections, alors

1. $f^{-1} \circ f = IdE$; c'est-à-dire $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$ $et(f^{-1})^{-1} = f$.
2. $g \circ f$ est une bijection de bijection réciproque$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. S'il existe une application $h : F \to E$ telle que $f \circ h = Id_F$ et $h \circ f = IdE$ alors h est bijective de bijection réciproque f.

Remarque:Soit $f : E \to F$ une bijection. Soit $y \in F$, alors il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ceci permet de définir une nouvelle application, cette fois de F dans E.

Définition :

Soit E un ensemble. On définit l'application identique $IdE : E \to E$ définie pour $x \in E$ par $IdE(x) = x$ encore appelée identité de E.

Exercice d'application

On considère les applications

$f : [-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ $définie$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g : \mathbb{R} \to [-1; +\infty[$ $définie$ par $f(x) = x^2 - 1$.

1. Montrer que f et g sont des bijections.

2. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis conclure

LECON 3 : OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DUREE : 2 HEURES

Motivations : Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel aux applications.

Objectifs pédagogiques

- Calculer la somme, le produit ou le quotient de deux polynômes
- Donner la condition d'existence d'un quotient de deux polynômes ;
- Déterminer l'ensemble de définition d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de la composée de deux fonctions numériques.

Prérequis :

- Définir une fonction et son ensemble de définition
- Effectuer des calculs littéraux

situation problème

Afin de bien gérer son personnel, le gérant d'une pharmacie étudie le mouvement de sa clientèle. En fait, il s'intéresse à la comparaison entre le nombre de clients qui viennent à son magasin la fin de semaine et celui des clients qui le visitent en semaine. Par exemple, le mercredi, l'achalandage varie selon la fonction

$f(x) = 3x - 10$, où x est l'heure du jour. Pour la même période de temps, soit de 9 h à 21 h, le nombre de clients varie selon la fonction $g(x) = 9x - 65$ durant la journée du samedi.
À quelle heure y a-t-il 2 fois plus de clients le samedi que le mercredi?

Activité d'apprentissage

Soit f et g les fonctions definies par : $f(x) = 3x - 10$ et $g(x) = 9x - 65$,
Soit $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

1) Donner le domaine de définition de f et g
2) Quelle est la condition d'existence de h(x)
3) Ecrire $h(x)$, et donner son domaine de définition

Résumé

Opération sur les fonctions

Définition

Soit f et g deux fonctions de domaines de définition respectifs Df et Dg. On définit les opérations suivantes :

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$pour tout $x \in D_{f+g} = Df \cap Dg$.

2. $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in D_{fg} = Df \cap Dg$.

3. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in D_{f/g} = (Df \cap Dg)\backslash\{x \in R, g(x) = 0\}$.

4. $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$ pour tout $x \in D_{\sqrt{f}} = Df \backslash\{x \in \mathbb{R}, f(x) < 0\}$.

- **Exercice d'application**

  Au lieu d'exemple

LECON 4: PROPRIETE D'UNE FONCTION : PARITE, ELEMENTS DE SYMETRIE ET PERIODICITE DUREE: 2HEURES

Motivations: Comparaison des prix des objets

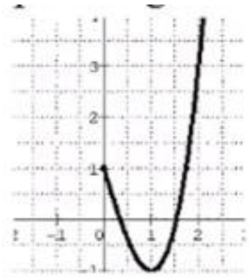
OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Montrer qu'une fonction est paire ; impaire ou périodique.
- Justifier qu'un point est centre de symétrie d'une courbe.
- Justifier qu'une droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie d'une courbe.
- Montrer qu'un point de cordonnées connues appartient à la courbe d'une fonction ;
- Conjecturer l'ensemble de définition ; le sens des variations ; les asymptotes éventuelles, les éléments de symétrie par lecture graphique.

- **Prérequis :**
  Definir les notions de parité , symetrie , translation

Situation problème

La géolocalisation a permis de constater que la courbe (C_f) de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ est dans un repere orthonormé d'un quadrillage, une représentation d'un pipeline. Seulement la partie (C_f) de la figure a été représentée par l'ingénieur en charge des travaux en signalant que le tracé du pipeline peut être obtenue à partie du point $\Omega(0; 1)$. L'ingénieur étant absent le jour du démarrage des travaux , son assistant souhaite compléter le tracé de ce pipeline mais ne sait comment s'y prendre. Comment peut-il procéder ?



Activité d'apprentissage

On considère la fonction f suivante

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^3 - 3x + 1$; $\Omega(0; 1)$ et $M(x; y)$ deux points du plan

1) Quelle est la condition d'appartenance du point M à la courbe de f
2) Déterminer les coordonnées du symétrique de M' de M par rapport au point $\Omega(a; b)$
3) Montrer que si M appartient à la courbe de f alors $M'(2a - x\,;\ 2b - f(x))$

Les deux courbes sont symétriques………..

Les deux courbes sont symétriques……….

Ajouter des questions sur la parité et périodicité

Resumé

1. Fonctions périodiques

Définition

Soit f une fonction numérique et p un nombre réel non nul. On dit que f est périodique de période p si :

pour tout $x \in Df,\ x + p \in Df$, et $f(x + p) = f(x)$.

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \longmapsto x - E(x)$ est périodique de période 1. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}, on\ a\ f(x + 1) = (x + 1) - E(x + 1) = (x + 1) - (E(x) + 1) = x - E(x) = f(x)$.

Remarque 3.5. Si f est périodique de période p, alors pour tout $k \in Z*, kp$ est encore une période de f.

2. Fonctions paires

Définition .

Soit f une fonction numérique. On dit que f est paire si pour tout $x \in Df, -x \in Df\ et\ f(-x) = f(x)$.

Exemple. La fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$ est une fonction paire.

Remarque ; Graphiquement, la courbe C_f d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée dans un repère orthogonal (O, I, J).

3. Fonctions impaires

Définition

Soit f une fonction numérique. On dit que f est impaire si pour tout $x \in Df, -x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemple .

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est une fonction impaire.

Remarque 3. Graphiquement, la courbe C_f d'une fonction paire est symétrique par rapport au point O dans un repère orthogonal (O, I, J).

4. Eléments de symétrie d'une courbe

Axes de symétrie.

Soit (Cf)la courbe représentative d'une fonction f, (D)la droite d'équation $x = a$. (D)est un axe de symétrie de(Cf)dans le repère(O, I, J) si :

pour tout $h \in R, /a - h, a + h \in Df, f(a - h) = f(a + h)$, ou si dans le repère (O', I, J) avec $O'\binom{a}{0}$, (Cf) admet une équation de la forme $Y = g(X)$ où g est unefonction paire.

Exemple. On considère la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

La droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (Cf).

En effet, soit $h \in R, on\ a : f(-1 - h) = 4 - h2 = f(-1 + h)$ donc $x = -1$ est un axe de symétrie.

Autre preuve: $Soit\ O'\binom{-1}{0}$, cherchons l'équation de la courbe (C_f) dans (O', I, J). Soit $M\binom{x}{y} \in (Cf)$dans le repère (O, I, J) et $M\binom{X}{Y}$dans le repère(O', I, J), on a$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, d'où$\binom{x}{y} = \binom{-1+X}{Y}$ .Ainsi, $Y = y = f(x) = -(-1 - X)^2 - 2(-1 + X) + 3 = 4 - X^2$ et $g(X) = -X^2 + 4$ est bien une fonction paire.

Centre de symétrie

Soit (Cf) la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthogonal (O, I, J) et $O'\binom{a}{b}$ un point du plan. O'est un centre de symétrie de (C_f) si: $pour\ tout h \in R/a - h, a + h \in Df, f(a + h) + f(a - h) = 2b$, ou encore si dans le repère (O', I, J), (C_f) admet une équation de la forme $Y = g(X)$ où g est une fonction impaire.

Exemple.

Démontrer que le point $O'\binom{2}{1}$est un centre de symétrie de (C_f) où $f : x \to \frac{x-3}{x-2}$.

Première méthode: $Df = \mathbb{R} - \{2\}$. Soit $h \in D_f$tel que $a + h$ et $a - h$ soient dans D_f.

On a: $f(2 + h) + f(2 - h) = \frac{h-1}{h} + \frac{-h-1}{-h} = \frac{2h}{2} = 2$.

Deuxième méthode : Dans le repère (O', I, J), on vérifie que (C_f)a pour équation $g(X) \; = \frac{-1}{X}$ qui est bien impaire.

EXERCICE D'APPLICATION

On considère les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3 + 2x - 1$ $\qquad$ $x \mapsto \frac{2x-1}{x-3}$

1) Montrer que le point $I(0\,;1)$ est un centre de symétrie à la courbe de f
2) Montrer que le point $K(3\,;2)$ est un centre de symetrie à la courbe g

Leçon 5 : Courbe représentative d'une fonction

Motivation

Prérequis

- Représenter des points dans un repère

Objectifs pédagogiques :

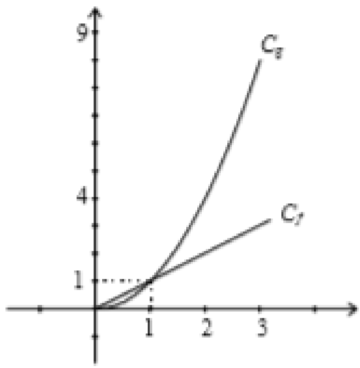
- Représenter une fonction

Situation problème

Une usine fabriquer des cartes graphiques pour ordinateur.
On appelle f la fonction qui, a une quantité x de cartes fabriquées associe le coût de fabrication en CFA.

Activité d'apprentissage

On considère les fonctions f $et\ g$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.



1) Comparer f $et\ g$

Les fonctions f $et\ g$ ne sont pas comparables sur $\mathbb{R}+$.

En effet : f $\left(\frac{1}{2}\right) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$ (puisque $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$) mais $f(2) \leq g(2)$ (puisque $2 \leq 4$) Cependant, on a :

$f \geq g$ sur $[0\,;\,1]$ et $f \leq g$ sur $[1\,;\,+\infty[$.

Ceci se prouve en étudiant le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

$f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1-x)$

Tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
Signe de x	0	+		+	
Signe de $1-x$		+	0	−	
Signe de $f(x)-g(x)$	0	+	0	−	

On a donc bien : $f(x) - g(x \geq 0$ lorsque $x \epsilon [0\,;\,1]$ et $f(x) - g(x) \leq 0$ lorsque $x \in [1\,;\,+\infty[$.

Autrement dit : $x \geq x^2$lorsque $x \in [0\,;\,1]$ et $x \leq x^2$lorsque $x \in [1\,;\,+\infty[$.

1. Comparaison de fonctions

Définition Soit D une partie de$f$. Soient f et g deux fonctions définies au moins sur D. On dit que les fonctions f et g sont égales sur D si : $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$ On note alors simplement: $f = g$ sur D.

Exemple : Considérons les fonctions f, g et h définies par :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x^2}$ $\qquad$ $x \mapsto |x|$ $\qquad$ $x \mapsto x$

On a : $f = g$ sur $\mathbb{R}$, $f = h$ sur $\mathbb{R}_+$et $g = h$ sur $\mathbb{R}_+$

Remarque : attention ! Ne pas faire de simplification abusives dans les expressions de fonctions: Les fonctions f et g définies par :

$f : \mathbb{R}\{5\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{(x-5)(x+2)}{x-5}$ $\qquad$ $x \mapsto x + 2$

ne sont pas égales sur $\mathbb{R}$ (puisque f n'est pas définie sur$\mathbb{R}\{5\}$). Mais elles sont égales sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. (Car, si $x \neq 5$, on peut simplifier par $x - 5$ dans l'expression de $f(x)$)

Exercice d'application

Comparez les fonctions $f : x \longmapsto -x + 6$ et $g : x \longmapsto | x - 2 | + 4$ sur $\mathbb{R}$, Sur $]-\infty\,;\,2[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$.

2. **majoration, minoration**

Définition

Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies au moins sur I. On dit que:

- f est **inférieure** à g sur I lorsque : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. On note: $f \leq g$ sur I.
- f est **positive** sur I lorsque : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. On note : $f \geq 0$ sur I.
- f est**majorée**sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \leq M$ $pour$ $tout$ $x \in I$
- f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \leq f(x)$pour tout $x \in I$.

- f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels M *et* m *tels que* : $m \leq f(x) \leq M$ *pour tout* $x \in I$.
(f est majorée et minorée)

Remarque : la relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale ; en ce sens que deux fonctions ne sont pas toujours comparables (voir exemple ci-dessous)

Exercice d'application

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 - x)$.

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{4}$.

On étudie le signe de la différence : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{4} - f(x) = \frac{1}{4} - x(1 - x) = \frac{1}{4} - x + x^2 = (\frac{1}{2} - x)^2$$

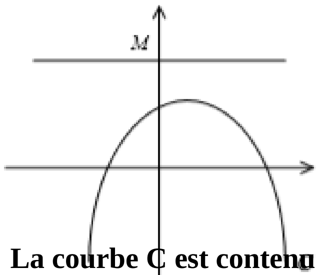
Et comme, $(\frac{1}{2} - x)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit : $\frac{1}{4} \geq f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est donc bien majorée par $\frac{1}{4}$. (Et $\frac{1}{4}$ est le plus petit des majorants de f (autrement dit : $\frac{1}{4}$ est un maximum de f) puisque pour $x = \frac{1}{2}$, ce majorant est atteint)

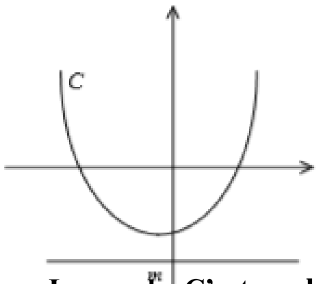
2) Démontrer que la fonction φ définie pour $t \in \mathbb{R}$ *par* $\varphi(t) = 4\sin t - 3$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On utilise le fait que : $-1 \leq \sin t \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En multipliant cet encadrement par 4, puis en soustrayant 3, on obtient : $-7 \leq \varphi(t) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction φ est donc bien bornée sur $\mathbb{R}$.

Interprétations Graphiques :

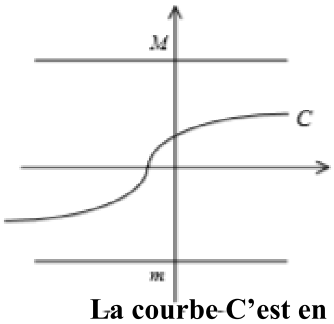
f est majorée (sur ℝ) **f est minorée (sur ℝ)** **f est bornée (sur R)**



La courbe C est contenu dans une bande horizontale



La courbe C'est au-dessus d'une certaine droite horizontale



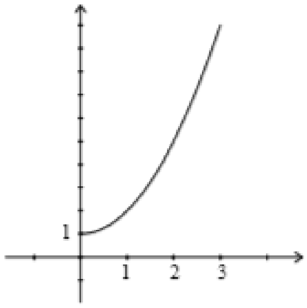
La courbe C'est en dessous d'une certaine droite horizontale

Exercice d'application

I. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Montrer que $f(x) = 1 - \frac{3}{x^2+1}$ puis déduire que
$-2 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclure que f est bornée.

Remarque (Représentations graphiques de deux bijections réciproques).

Soit E *et* F deux parties de ℝ. Soit f *une bijection de* E *vers* F. Soit Cf la courbe représentative de f *et* C_{f-1} celle de f^{-1}. C_f *et* C_{f-1}sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.



II. La fonction f définie sur [0 ; 3] par $f(x) = x^2 + 1$. Ici, la représentation graphique(1) de f ne sera qu'un morceau de parabole : On note encore :

$$f: [0\,;\,3] \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2 + 1$$

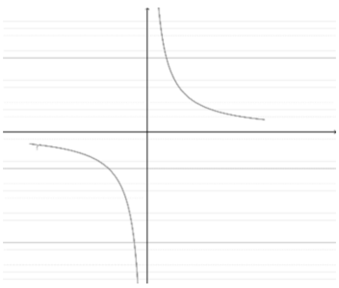
• La fonction $g : [0\,;-\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

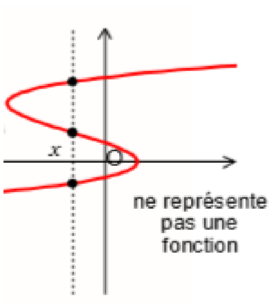
Remarque : on ne peut pas définir g sur un ensemble plus grand.

Définition ; On appelle représentation graphique de f ou courbe représentative de f, l'ensemble$(\mathcal{C})$ des points de coordonnées $\left(x\,;f(x)\right)$ avec $x \in D$

L'équation $y = f(x)$ est appelé équation de $(\mathcal{C})$



EST UNE FONTION



Ajouter des questions, avec par exemple des diagrammes de Ven

Leçon 6 : Fonctions associées

Motivation

Prérequis

Objectifs pédagogiques

- A partir de la courbe d'une fonction f, représenter les fonctions : $x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x) + b$; $x \mapsto f(x-a) + b$; $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto |f(x)|$; $x \mapsto f(|x|)$.
- Tirer quelques informations sur les courbes des fonctions associées à une fonction donnée ; sens des variations ; parité, éléments de symétrie ; etc

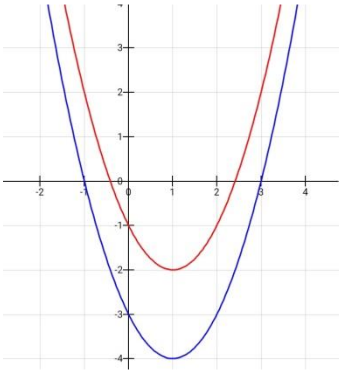
Résumé

1. Fonctions associées du type $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{x} \mapsto -\mathrm{f}(\boldsymbol{x})$ ***et*** $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{f}(-\boldsymbol{x})$

Proposition Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J). C_f est la courbe représentative de la fonction f.

- La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x)$ se déduit de Cf par la symétrie d'axe (OI).
- La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ se déduit de Cf par la symétrie d'axe (OJ).

- La courbe représentative de $x \mapsto f(x-a)+b$ se déduit de Cf par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$

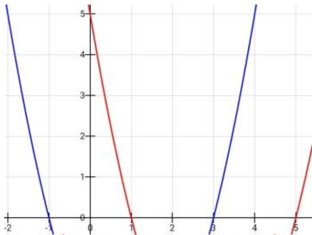


Théorème Soit Cf la représentation graphique d'une fonction f dans un repère$(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,,)$.

- La courbe Cg représentant la fonction g définie par $g(x)=\mathrm{f}(x)+k$ est l'image de Cf par la translation de vecteur $k\vec{\jmath}$

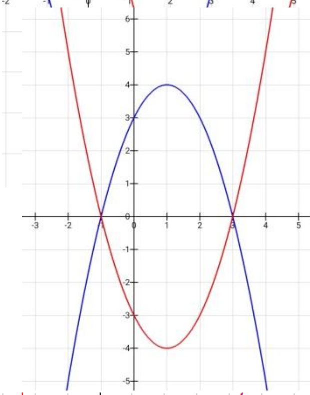
Ainsi la courbe (C) de la fonction f_2 définie par $f_2(x)=(x-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}$ est le translaté de C de vecteur $2\vec{\mathrm{i}}$.
En effet $f_2(x)=(x-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}=(x-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}+\mathbf{2}=f(x)+\mathbf{2}$.

- La courbe $C_h$représentant la fonction h définie par $h(x)=\mathrm{f}(x+l)$ est l'image de Cf par la translation de vecteur $-\lambda\,\vec{\imath}$



Ainsi la courbe (C) de la fonction f_1 définie par $f_1(x)=(x-3)^2-4$ est le translaté de C de vecteur $2\vec{\imath}$.
En effet $f_1(x)=(x-3)^2-4=(x-1-2)^2-4=f(x-2)$.

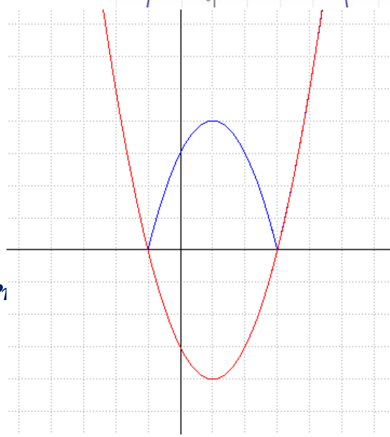
- La courbe$C_k$représentant la fonction k définie par $k(x)=-\mathrm{f}(x)$est l'image de Cf par la symétrie par rapport à l'axe(Ox)des abscisses.



Ainsi la courbe (C) de la fonction f_3 définie par $f_3(x)=-(x-\mathbf{1})^2+\mathbf{4}$ est le symétrique de (C) par rapport à $(O, \vec{\imath})$.
En effet $f_3(x)=-(x-\mathbf{1})^2+\mathbf{4}=-f(x)$.

- La courbe$C_l$représentant la fonction l définie par $l(x)=\mathrm{f}(-x)$ est l'image de Cf par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) des ordonnées.

Attention, f *et* h n'ont pas le même ensemble de définition en général. De même pour f et l.



Ainsi la courbe (C) de la fonction f_4 définie par$f_4(x)=(-x-\mathbf{1})^2-\mathbf{4}$ est le symétrique de (C) par rapport à $(O, \vec{\jmath})$.

En effet $f_4(x)=(-x-\mathbf{1})2-\mathbf{4}=((-x)-\mathbf{1})^2-\mathbf{4}=f(-x)$.

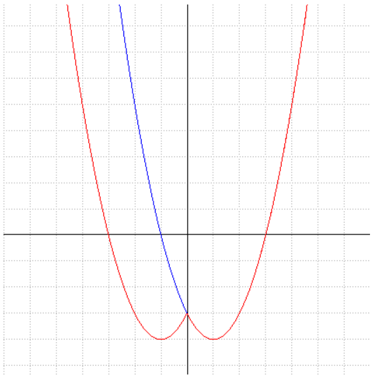
- Soit la fonction g définie par $g(x) = | f(x) |$. (Cg) s'obtient de la façon suivante:

on **garde** la partie de la courbe (C) correspondant aux valeurs positives de f(x) puis on **trace** l'image de l'autre partie par la symétrie d'axe $(O, \vec{i})$.
Ainsi la courbe (C) de la fonction f_5 définie par $f_5(x) = | (x-1)^2 - 4 | = | f(x) |$ est représentée ci-contre.

- Soit la fonction g définie par g(x) = f(|x|). (Cg) s'obtient de la façon suivante : on **garde** la partie de la courbe (C) correspondant aux valeurs positives de x puis on **trace** l'image de cette partie par la symétrie d'axe $(O, \vec{j})$.

Ainsi la courbe (C) de la fonction f_6 définie par

$f_6(x) = (| x | -1)^2 - 4 = f(| x |)$ est représentée ci-contre.



2. Sens de variation

Définition : Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et définie sur un intervalle I.

1. f est croissante sur I si et seulement $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. f est décroissante sur I si et seulement $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x1) \geq f(x_2)$.
3. f est constante sur I si et seulement $\forall x_1, x_2 \in I, f(x_1) = f(x_2)$.

Exercice d'application

I. Construire dans l'intervalle [-2 ;2] les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2$ et $g(x) = | x |$. Puis préciser leurs sens de variations ainsi que leurs tableaux de variations

II. Soit f la fonction "racine carrée" (f : $x \mapsto \sqrt{x}$ *pour* $x \geq 0$) *et* Cf sa représentation graphique dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Représenter les fonctions g, h *et* k définies par $g(x) = \sqrt{x} + 3$; $h(x) = \sqrt{x-2}$; $k(x) = -\sqrt{x}$ et $l(x) = \sqrt{-x}$

On précisera également l'ensemble de définition de chacune de ces quatre fonctions.

Chapitre

Transformations Élémentaires du Plan

Intérêt : Reproduire aisément ou caractériser les éléments de reproduction dans le plan, d'un objet plan, soit identiquement, soit reduit ou agrandi.

Motivation : Le mathematicien de la Grèce antique Euclide se posait la question de savoir " Comment transformer le plan sans toute fois le déformer ?" Pour cela, imaginez une feuille transparente posée sur un bureau. Alors les actions suivantes sont possibles :

– Déplacer d'un Pouce la feuille vers la droite ;
– Faire pivoter la veuille de vingts dégrés autour d'un point marqué qui reste immobile ;
– Retourner la feuille pour la regarder de l'arrière. Notez que si une image est dessinée sur un côté de la feuille, alors après avoir retourné la feuille, nous voyons l'image miroir de l'image.

1.1 Leçon 1 : Translations

Motivation de la leçon : Un seul motif fleuri est présent sur le tissus vous servant à confectionner le Kaba du 8 mars de votre chère maman. Vous souhaitez qu'il apparaisse de façon régulière un peu de partout sur le tissus. Comment procédez-vous ?

Durée :40 minutes

OPO : À la fin de cette leçon l'élève doit être capable de : Identifier, Composer et utiliser les translations qui conservent les distances.

Rappel **1.** *Une translation est définie par un vecteur. La translation t de vecteur $\vec{u}$ est notée $t_{\vec{u}}$, qui est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. souvenez-vous également que :*

– *Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}}$ est l'application identique ; tous les points du plan sont invariants ;*
– *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors aucun point n'est invariant.*

Situation Problème : Lors d'une visite au port autonome de Douala, votre cadet Alcime est curieux d'observer une grue déchargeant la carguaison de contenaires d'un navire en effectuant à chaque fois un deplacement rectiligne tous plan. Il eut alors l'impression qu'en prenant deux contenaires distincts, les mouvements de leur déplacement sont identiques ; Le mouvement d'un seul contenaire effectué par la grue suffit pour savoir celui de tout le reste de la cargaison. Ces empressions de Alcime sont-elles réelles ?

Activité d'apprentissage 1.1.1. *Soit f l'application du plan dans le plan qui, à chaque position initiale M du contenaire associe sa position finale M'.*

1. *Montrer que si f est une translation, alors pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.*
2. *Supposons maintenant que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. Montrer que f est une translation.*
3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Montrer que $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation dont-on déterminera le vecteur.*
4. *Ici le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit le vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$; $M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x'}{y'}$ deux points du plan. Fixons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ telle que : $t_{\vec{u}}(M) = M'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.*

Esquisse de solution .

1. *Supposons que f est une translation. Notons $\vec{u}$ le vecteur de la translation. Comme $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$. Ainsi $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. On conclut que Alcime a vu juste lorsqu'il affirme que " deux contenaires distincts effectuent des deplacements identiques".*
2. *Réciproquement, supposons que pour toutes positions initiales M et N de deux contenaires d'image respectives M' et N' par f, on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. Montrons que f le mouvement qu'effectue la grue est une translation. Soit A la position initiale d'un contenaire et A' son image par f c'est-à-dire sa position finale. Soit M un point du plan et $M' = f(M)$. On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$; ainsi, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Ici également lorsque nous savons que la grue effectue un mouvement de translation, alors le mouvement d'un seul contenaire suffit pour savoir celui de tout le reste de la cargaison.*
3. *Soit M un point du plan, M_1 son image par $t_{\vec{u}}$ et M' l'image de M_1 par $t_{\vec{v}}$. On a : $M' = t_{\vec{v}}(M_1) = t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(M)) = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(M)$ et $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{u} + \vec{v}$. Ainsi $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.*
4. *Exprimons x' et y' en fonction de x et de y.*

   On a :

$$
\begin{aligned}
M' = t_{\vec{u}}(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} && (1.1)\\
&\iff \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} && (1.2)\\
&\iff \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + a \end{cases} && (1.3)
\end{aligned}
$$

Resumé

Propriété 1.1.1 (Propriété caractéristique d'une translation). *Soit f une application du plan dans lui même.*

f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

Propriété 1.1.2 (Composée de deux translations). *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.*

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

Définition 1.1.1 (Transformation du plan). *Une transformation du plan est une application du plan dans lui même bijective.*

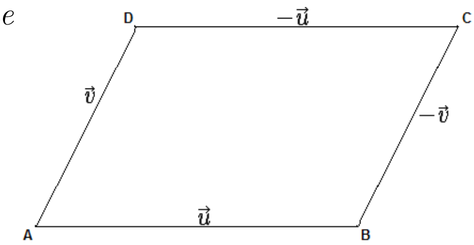
Remarques 1.1.1.
- *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$; donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$. On dit que la composition des translations est commutative.*
- *Si $\vec{v} = -\vec{u}$, alors $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id$: Caractérisant les bijections réciproques.*
  Donc toute translation est une transformation du plan ; la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

Exemple 1.1.1. *On considère le parallélogramme ci-contre. On a :*

$t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{DA}} = t_{\overrightarrow{DB}}$

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AD}} \circ t_{\overrightarrow{DC}} = t_{\overrightarrow{AC}}$.

$\left(t_{\overrightarrow{BC}}\right)^{-1} = t_{\overrightarrow{DA}}$.



Propriété 1.1.3 (Expression analytique d'une translation). *L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$ est donnée par :* $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

1.2 Leçon 2 : Symétries Orthogonales

Motivation de la leçon : Ayant sous la main une translation t de vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite (D) dont un vecteur normal est $\vec{u}$, comment peut-on écrire t comme composées de deux symétries orthoonales dont (D) est l'un des axes ?

Durée : 45 minutes.

OPO : À la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Définir et de reconaitre une symétrie Orthogonale ;
- D'écrire une translation comme composée de deux symétries orthogonales.

Rappel 2. *Une symétrie orthogonale est définie par une droite appelée axe de la symétrie orthogonale. la symétrie orthogonale d'axe (D), notée $s_{(D)}$ ou tout simplement s_D , est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :*

- *si $M \in (D)$, alors $M' = M$;*
- *si $M \notin (D)$, alors M' est le point tel que (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.*

De cette définition se dégagent les remarques importantes suivantes :

- *L'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale d'axe (D) est la droite (D) ;*
- *Soit O un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul, (D) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$; pour tout point M et M', distincts de O, on a : $s_D(M) = M' \iff \begin{cases} OM = OM', \\ \widehat{(\overrightarrow{OM}, \vec{u})} = \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})}. \end{cases}$*

Situation Problème : Le but d'une séance de travaux pratique au laboratoire, est d'étudier expérimentalement par les élèves d'une classe de première scientifique, le mouvement de l'image d'un objet par rapport à un miroire placé verticalement. En déplaçant ce miroir, ces élèves ont l'impression que l'image par rapport à l'objet se déplace de manière rectiligne d'une distance égale presque au double de celle du déplacement du miroir. Cette impression est-elle réelle ?

Activité d'apprentissage 1.2.1. *Le point M représente l'objet. P_1 et P_2 désignent respectivement la position initiale du miroir et sa position déplacée. M_1 et M' sont respectivement les images de M dans le miroir P_1 et P_2. (Δ) représente la droite d'intersection en H du miroir P_1 avec le plan d'insidence tandis que, (Δ') représente la droite d'intersection en H' du miroir P_2 avec le plan d'insidence. Soit O un point de (Δ) et O' le projeté de O sur (Δ').*

1. *Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles et M un point du plan. Notons M_1 et M' les symétriques de M respectivement par s_Δ et $s_{\Delta'}$. De plus, notons H_1 et H' les projetés orthogonaux de M respectivement sur (Δ) et (Δ').*
   a) *Faite une figure en guise.*
   b) *Montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'}$.*
   c) *les élèves se sont-ils trompés ?*
   d) *Déduire de b) que $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = t_{2\overrightarrow{OO'}}$.*
2. *Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.*
   a) *Soit (Δ') l'image de (Δ) par $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$; Montrer que $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = t_{\vec{u}}$.*
   b) *Maintenant, soit (Δ'') une droite telle que : $s_{\Delta''} \circ s_\Delta = t_{\vec{u}}$. Montrer que $s_{\Delta''} = s_{\Delta'}$ et en déduire que les droites (Δ) et (Δ'') sont confondues.*
   c) *Conclure.*

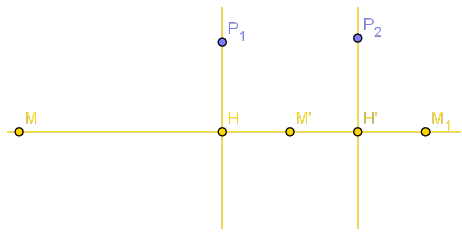
Esquisse de solution . 1. *Il est important de remarquer que (Δ) et (Δ') sont paralèlles.*

a) *voir la figure ci-contre.*

b) *Montrons que* $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'}$.

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} \\ &= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'} \\ &= 2\overrightarrow{HH'}\end{aligned}$$



Donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'}$.

c) *Nous avons d'après la question b) que,* $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'}$. *Ce qui implique que* $MM' = 2HH'$ *et M, M', H et H' alignés dans cet ordre ce qui veut dire que les élèves ont vu juste : effectivement l'image par rapport à l'objet, se déplace de manière rectiligne d'une distance égale au double de celle du déplacement du miroir.*

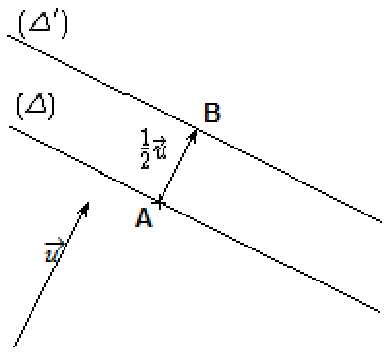
d) *Déduisons de b) que* $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$.

On a d'après b) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{OO'}$ *car* $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{OO'}$. *Ainsi,* $M' = t_{2\overrightarrow{OO'}}(M)$ *et*

$$\begin{aligned}M' &= s_{\Delta'}(M_1) \\ &= s_{\Delta'}(s_{\Delta}(M)) \text{ Car } M_1 = s_{\Delta}(M) \\ &= (s_{\Delta'} \circ s_{\Delta})(M)\end{aligned}$$

D' où $(s_{\Delta'} \circ s_{\Delta})(M) = t_{2\overrightarrow{OO'}}(M)$ *quelque soit le point* M *pri sur le plan d'incidence. Donc* $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$.

2. *Nous considérons la figure ci-contre où* (Δ') *est l'image de* (Δ) *par* $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$ *et* A *est un point de* (Δ). B *désigne le projeté orthogonal de* A *sur* (Δ'). *Donc* $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$.



a) *Montrons que* $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$.

D'après la question 1.d), $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{AB}} = t_{\vec{u}}$.

b) *Soit* Δ'' *une droite telle que* $s_{\Delta''} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$. *Montrons que* (Δ') *et* (Δ'') *sont confondues.*

$$\begin{aligned}\text{On a : } s_{\Delta''} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} &\Longrightarrow (s_{\Delta''} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta} = (s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta} \\ &\Longrightarrow s_{\Delta''} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta}) = s_{\Delta'} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta}) \\ &\Longrightarrow s_{\Delta''} = s_{\Delta}, \text{ Car } s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = Id.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le rappel 2, s_{Δ} *et* $s_{\Delta'}$ *ont même ensemble invariant ; donc* (Δ) *et* (Δ') *sont confondues.*

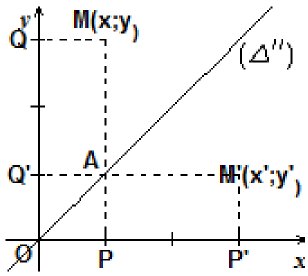
c) *En conclusion, pour une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ normal (Δ) connus, il existe une et une seule droite (Δ') telle que $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$.*

Activité d'apprentissage 1.2.2. *Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient a et b deux réels. On pose : $(D) : x = a$, $(D') : y = b$ et $(D'') : y = x$. Par ailleurs, soient $M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x'}{y'}$ deux points du plan tels que $M' = s_X(M)$ où $X \in \{(D), (D'), (D'')\}$. Exprimer respectivement x et y en fonction de x' et de y', dans chacun des cas suivants :*

1. s_D
2. $s_{D'}$
3. $s_{D''}$

Esquisse de solution.

1. *Posons H le point d'intersection des droites (D) et (MM'). M et M' ont même ordonnée et H milieu de $[MM']$. d'où* $\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = a \\ y = y' \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$
2. *Dans le cas de $s_{D'}$, le point K d'intersection de (MM') et (D') est le milieu de $[MM']$ avec M, M' de même abscisse. Ainsi,* $\begin{cases} x = x' \\ \frac{y+y'}{2} = b \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$
3. *Pour $(D'') : y = x$, Posons P, Q et P', Q' les projetés orthogonaux respectifs des points M et M' respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. P et Q respectivement ont pour image respective Q' et P'. Ainsi,* $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$



Résumé

Propriété 1.2.1 (**Composée de deux symétries orthogonales d'axe parallèles**). *Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ'). La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$. En d'autres termes : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$*

Remarques 1.2.1.

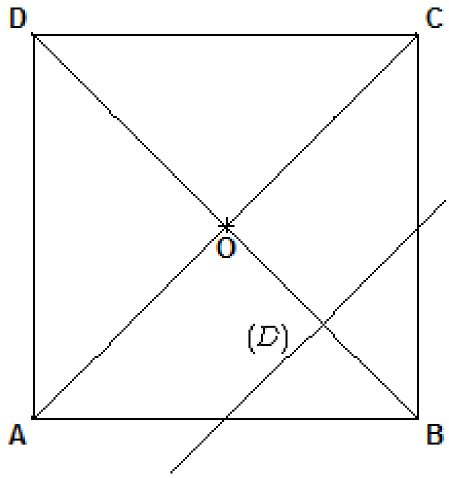
- *Lorsque les axes (Δ) et (Δ') sont confondus, on obtient : $s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = Id$.*
- *Ainsi, toute symétrie orthogonale est une transformation et la transformation réciproque de s_{Δ} est s_{Δ}.*
- *D'autres part : $s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} = t_{2\overrightarrow{O'O}} = t_{-2\overrightarrow{OO'}}$. D'où, $(s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}) \circ (s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}) = Id$. Donc les transformations $s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$ et $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ sont réciproques l'une de l'autre.*

Exemple 1.2.1. *Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que présentée par la figure ci-contre.*

$s_{(AD)} \circ s_{(CB)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

$s_{(D)} \circ s_{AC} = t_{\overrightarrow{OB}}$

Déterminer (D') telle que : $s_D \circ s_{D'} = t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{BO}}$



Propriété **1.2.2** (Expressions analytiques de symétries orthogonales particulieères). *Munissons le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit alors s la symétrie d'axe (Δ). Soit $M\binom{x}{y}$ un point du plan et $M'\binom{x'}{y'}$ son image par s.*

1. *(Δ) est parallèle à l'axe des abscisses.*

   L'expression analytique de la symétrie par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = b$ est : $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + 2b. \end{cases}$

2. *(Δ) est parallèle à l'axe des ordonnées*

   Ici, $(\Delta) : x = a$; Ainsi l'expression analytique de s est : $\begin{cases} x' = -x + 2a, \\ y' = y. \end{cases}$

3. *(Δ) est la première bissectrice : $(\Delta) : y = x$,*

   Alors l'expression analytique de s est donnée par : $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$

Exercice d'application 1.2.1. *Soit ABC un triangle équilatéral et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.*

1. *Quelle est la nature de la transformation $s_{(BC)} \circ s_{(B'C')}$?*
2. *Déterminer la droite (Δ) telle que : $s_{(AA')} \circ s_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{BC}}$.*

Exercice d'application 1.2.2. *Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit s la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $x = -3$ et t la translation de vecteur $\vec{u}\binom{3}{-1}$.*

1. *Déterminer les expressions analytiques des transformations s et t.*
2. *Déduire celle de $t \circ s$ et $s \circ t$*
3. *Les transformations $s \circ t$ et $t \circ s$ sont-elles alors commutatives ?*

Esquisse de solution**.** 1. *Déterminons les expréssions analylitiques de s et de t.*

s est la transformation qui à tout point $M\binom{x}{y}$ du plan associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ d'expression analytique : $\begin{cases} x' = -x-6 \\ y' = y. \end{cases}$ *et celle de t est donnée par :* $M'\binom{x'}{y'} = t\left(M\binom{x}{y}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-1. \end{cases}$

2. *Déduisons les expressions analytiques de $t \circ s$ et celle de $s \circ t$.*

   Soient $M\binom{x}{y}$, $M_1\binom{x_1}{y_1}$ et $M'\binom{x'}{y'}$, Dans un premier temps tels que $M_1 = s(M)$ et $M' = t(M_1)$.

   Alors, $\begin{cases} x_1 = -x-6 \\ y_1 = y. \end{cases}$ *et* $\begin{cases} x' = x_1+3 \\ y' = y_1-1. \end{cases}$ *D'où :* $\begin{cases} x' = -x-6+3 \\ y' = y-1. \end{cases}$.

   Donc $M' = t\circ s(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = -x-3 \\ y' = y-1. \end{cases}$.

   Deuxièmement, on admet que : $M' = s(M_1)$ et $M_1 = t(M)$ alors, $\begin{cases} x' = -x_1-6 \\ y' = y_1. \end{cases}$ *et* $\begin{cases} x_1 = x+3 \\ y' = y-1. \end{cases}$.

   Ainsi, $\begin{cases} x' = -(x+3)-6 \\ y' = y-1. \end{cases}$. *i.e.,* $\begin{cases} x' = -x-9 \\ y' = y-1. \end{cases}$. *Donc* $s\circ t(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = -x-9 \\ y' = y-1. \end{cases}$

3. *D'après la question précédente, $t \circ s$ et $s \circ t$ n'ayant pas des expréssions analytiques identiques, alors $s \circ t \neq t \circ s$. Ainsi, $s \circ t$ et $t \circ s$ ne commutent pas.*

Exercices du livre

1.3 Leçon 3 : Rotations

Motivation de la leçon : Le point ou la zone de rencontre sur une carte de deux voyageurs partant de deux lieux fixes distincts, chacun se déplaçant à une vitesse moyenne connue, peut-être déterminer par les rotations.

Durée : 50 minutes

OPO : A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de caractériser une rotation et la composée de deux rotations.

Rappel 3. *1. Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteur non nuls. Posons X et Y les points tels que : $\overrightarrow{OX} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OY} = \vec{v}$. Soit M et N les points d'itersection respectifs des demi-droites $[OX)$ et $[OY)$ avec le cercle de centre O. La notion d'angle orienté en trigonométrie est l'une des notions importantes introduitent en classe de seconde scientifique ; Ainsi nous rappelons que l'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\widehat{AB}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé angle orienté et noté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. Par suite, Soit $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ un angle orienté et de mesure principale α ($\alpha \in]-\pi, \pi]$). On appelle mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ tout nombre réel de la forme $\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. L'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ de mesure α sera noté $\hat{\alpha}$.*

2. *Il est important de rappeler aussi que toute rotation est définie par un point appelé centre et un angle. Une rotation de centre O et d'angle α est une application du plan dans le plan, notée $r(O, \alpha)$ ou r si aucune confusion n'est faite, qui à tout point M associe le point M' vérifiant :*
   - *si $M = O$, alors $M' = O$;*
   - *si $M \neq O$, alors $OM = OM'$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \hat{\alpha}$.*

   Rappelez-vous égalemrnt que nous avons établi les propriétés suivantes :
   - *Si $\hat{\alpha} = \hat{0}$, alors r est l'application identité. C'est-à-dire tous les points du plan sont invariants ;*
   - *Si $\hat{\alpha} \neq \hat{0}$, seul le point O est invariant ;*
   - *Si $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$, alors r est la symétrie de centre O.*
   - *Toute rotation est une transformation du plan et la transformation réciproque de $r(O, \alpha)$ est $r(O, -\alpha)$.*

Situation Problème : Une fois que Alcime a fini de protéger ses plants, situé au point M, Voilà que le ciel s'assombrit preuve qu'une forte pluie approche. Pour s'abriter il doit d'abord récuperer ses vetements de rechanges au point M_1 dont pour y parvenir son déplacement est matéréalisé par la transformation $s_{(\Delta)}$ avant de retrouver enfin l'abri au point M' ceci grâce à un effort supplémentaire représentant $s_{(\Delta')}$. Alcime étant conscient que (Δ) et (Δ') sont sécantes en O formant entre elles un angle α radian(s), chemin faisant, peur d'être mouillé, il rencontre un jeune homme qui lui propose d'effectuer à partir du point M, un arc de cercle de rayon OM et d'aire $\alpha\frac{OM^2}{2}$ vers son lieu d'abri. Le regard de l'agriculteur dégarge l'embarassement. A votre avis que doit-il faire ?

Activité d'apprentissage 1.3.1. *Soient respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs de (Δ) et (Δ') respectivement ; r est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.*

1. *Montrer que le point O est invariant par $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$.*
2. **a)** *Faite une figure modélisant la situation problème ci-dessus ;*

   b) *Démontrer que $OM = OM'$ et que $mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = 2mes(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.*
3. *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$.*
4. *Conclure alors si le conseil du jeune homme en vers Alcime est pertinant ou pas ?*
5. *Par ailleurs, soit $r(O, \alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α. Soit (L) une droite passant par O.*

   a) *Montrer qu'il existe une droite (L') telle que $s_{(L')} \circ s_{(L)} = r(O, \alpha)$.*

   b) *Montrer que la droite (L') est unique.*
6. *Conclure.*

Esquisse de solution . *1. On a : $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}(O) = s_{(\Delta')}(O) = O$. Donc O est invariant par $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$.*

2. **a)** *Voir la figure ci-contre*

   b) *Montrons que* $OM = OM'$ *et que* $mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = 2mes(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.

   On a : $OM = OM_1$ *et* $OM_1 = OM'$ *; donc :* $OM = OM'$ *; et par ailleurs*

$$\begin{aligned} mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) &= mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}}) \\ &= 2mes(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}}) + 2mes(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{u}}) \\ &= 2mes(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}). \end{aligned}$$

3. *Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de* $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$.

   Soit M *et* M' *deux points du plan.*

$$s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}(M) = M'$$
$$\Updownarrow$$
$$(M = M' \text{ si } M = O) \quad \text{et si} \quad \left(\text{si } M \neq O \Longleftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = 2mes(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \end{cases} \right)$$

   Donc $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$ *est la rotation de centre* O *et d'angle* $2mes(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

4. *Il se dégage que retrouner l'abri d'Alcime revient à retrouver* $s_{(L')} \circ s_{(L)}(M)$ *; qui n'est rien d'autre que la rotation* r *de centre* O *et d'angle* $2(\widehat{\vec{n}, \vec{n'}}) = \hat{\alpha}$ *où* $\vec{n}$ *et* $\vec{n'}$ *sont les vecteurs directeurs* (L) *et* (L')*. Ainsi, en suivant les coseils du jeune homme, Alcime retrouvra l'abri et en ce moment là fera un chemin plus long dont-il risque de se faire mouillé en plus, il ne pourra plus prendre ses vètements de réchanges.*

5. *Soit* $\vec{u}$ *un vecteur directeur de* (L) *et* $\vec{u'}$ *un vecteur tel que* $mes\widehat{\vec{u}; \vec{u'}} = \frac{\alpha}{2}$.

   a) *Il existe une droite* (L) *passant par* O *et dirigé par* $\vec{u'}$*. E d'après la question 3.,* $s_{(L')} \circ s_{(L)}$ *est la rotation* r *de centre* O *et d'angle de mesure* $2mes\widehat{\vec{u}; \vec{u'}} = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha$.

   b) *Unicité de la droite* (L') *: Soit* (L'') *une autre droite telle que* $s_{(L'')} \circ s_{(L)} = r(O; \alpha)$.

$$\begin{aligned} s_{(L')} \circ s_{(L)} = s_{(L'')} \circ s_{(L)} &\Longrightarrow \big(s_{(L')} \circ s_{(L)}\big) \circ s_{(L)} = \big(s_{(L'')} \circ s_{(L)}\big) \circ s_{(L)} \\ &\Longrightarrow s_{(L')} \circ \big(s_{(L)} \circ s_{(L)}\big) = s_{(L'')} \circ \big(s_{(L)} \circ s_{(L)}\big) \\ &\Longrightarrow s_{(L')} = s_{(L'')} \end{aligned}$$

   Ainsi, $s_{(L')}$ *et* $s_{(L'')}$ *ont le même ensemble invariant* (L') *et* (L'') *respectivement. Donc* $(L') = (L'')$*. Ainsi* (L') *est unique.*

Activité d'apprentissage **1.3.2.** *Soit* g *une application du plan dans lui-même et* $\hat{\alpha}$ *un angle non nul.*

1. *On suppose ici que* g *est une rotation de centre* O *d'angle* $\hat{\alpha}$*. Soit alors deux points* M *et* N *d'image* M' *et* N' *par* g.

a) *Faire une figure.*

b) *Montrer que les triangle OMN et OM'N' sont superposables et établire une relation entre* $mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MO}})$ *et* $mes(\widehat{\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{M'O}})$ *d'une part et* MN *et* $M'N'$ *d'autres part.*

c) *Déduire que* $mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$.

2. *Suppons maintenant que g est une application telle que pour tout points M et N distincts d'images respectives M' et N' on a :*

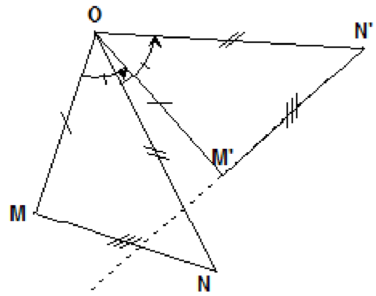
$$MN = M'N' \text{ et } mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$$

a) *Soit A un point non invariant, et A' son image par g. Montrer qu'il existe un unique point O tel que le triangle $OM = OM'$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}) = \alpha$.*

b) *Soit O' l'image de O par g. Démontrer que : $O'A' = OA'$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}) = 0$; et déduire que O est invariant par g.*

c) *Déduire de b) et de la définition de g que l'application g est la rotation de centre O et d'angle de mesure α.*

Esquisse de solution . 1. *Ici g est une rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$.*



a) *Voir la figure ci-contre*

b) *Montrons que les triangles OMN et $OM'N'$ sont superposables.*

$$g(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} OM = OM' & (i) \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}) = \alpha & (ii) \end{cases}$$

$$\text{et } g(N) = N' \Longleftrightarrow \begin{cases} ON = ON' & (iii) \\ mes(\widehat{\overrightarrow{ON};\overrightarrow{ON'}}) = \alpha & (iv) \end{cases}$$

Par ailleurs, On a :

$$\begin{cases} MN^2 = MO^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot cos(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}), \\ M'N'^2 = M'O^2 + ON'^2 - 2OM' \cdot ON' \cdot cos(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON'}}), \end{cases}$$

Or d'après (i) et (iii), $OM = OM'$ et $ON = ON'$ avec (ii), (iv) qui permetent d'obtenir :

$$\begin{aligned} mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) &= mes(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{ON'}}) \\ &\Updownarrow \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM'}}) &= mes(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM'}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON'}}) \\ &\Updownarrow \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) &= mes(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON'}}) \end{aligned}$$

, *Ainsi,* $MM = M'N'$*. Donc les triganles OMN et OM'N' sont superposables.*

D'où $\begin{cases} MN = M'N' & (v) \\ mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MO}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{M'O}}) & (vi) \end{cases}$

la relation (vi) permet de dire que les rotations conservent les angles orientés.

c) *Déduisons que* $mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$.

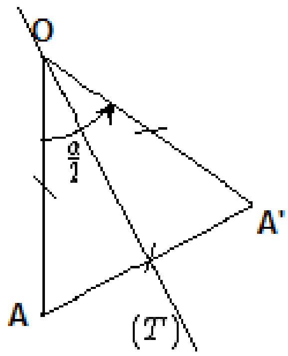
$$\begin{aligned} mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) &= mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{OM}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{M'N'}}) \\ &= mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}) \text{ d'après } (vi),\ mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MO}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{M'O}}) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

2. *Dans cette question Pour tout* $M \neq N$*, on a* M' *et* N' *du plan tels que :*

$$\begin{cases} g(M) = M' \\ g(N) = N' \end{cases} \iff \begin{cases} MN = M'N', \\ mes(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \alpha \end{cases}$$

a) $g(A) = A'$*, soit* (T) *la médiatrice de* $[AA']$*. Alors il existe un unique point* O *sur* (T) *tel que* $OA = OA'$ *et* $mes(\widehat{\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{AO}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$*. D'où* $mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}) = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha$*. Et comme* $\alpha \neq 0$*, alors* $O \neq A$

b) *On a :* $g(O) = O'$, $g(A) = A'$ *et* $A \neq O$ *donc d'après le caractérisation de l'application* g, $O'A' = OA = OA'$ *et* $mes(\widehat{\overrightarrow{O'A'};\overrightarrow{OA'}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{O'A'};\overrightarrow{OA}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}) = \alpha - \alpha = 0$*. Ainsi,* $O'A' = OA'$ *et* $mes(\widehat{\overrightarrow{O'A'};\overrightarrow{OA'}}) = 0$*, d'où* $O = O'$ *c'est-à-dire* O *est un point invariant par* g *et est unique.*



c) *Déduisons que* g *est la rotation de centre* O *et d'angle* α.

Soit X *un point du plan et* X' *l'image de* X *par* g.

- *Si* $X = O$*, alors d'après la question 2.b),* $X' = O = X$.
- *Si* $X \neq O$*, alors d'après la définition de l'application* g, $OX = OX'$ *et* $mes(\widehat{\overrightarrow{OX};\overrightarrow{OX'}}) = \alpha$.

par conséquent, g *est la rotation de centre* O *et d'angle de mesure* α.

Résumé

Propriété 1.3.1 (**Composée de symétries Orthogonales d'axes sécantes**)**.** *Soit* (Δ) *et* (Δ') *deux droites sécantes en* O*, de vecteurs directeurs respectifs* $\vec{u}$ *et* $\vec{u}'$*. La composée* $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$ *des symétrie orthoonales d'axes respectifs* (Δ) *et* (Δ') *est la rotation de centre* O *et d'angle* $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$.

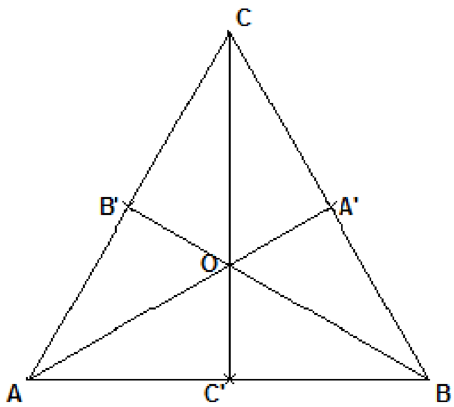
Remarques 1.3.1. – $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ *est la rotation de centre* O *et d'angle* $2(\vec{u}', \vec{u})$ *; les transformations* $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ *et* $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ *sont réciproques l'une de l'autre.*

– *Si (Δ) est parallèle à (Δ'), alors $2(\vec{u'},\vec{u})=\hat{\pi}$ et $s_{\Delta'}\circ s_{\Delta}$ est la symétrie de centre O.*

Nous venons donc de voir qu'une rotation d'angle non nul peut s'écrire d'unr infinité de façon comme composée de deux symétries orthogonales d'axes sécantes. Cependant, l'outil suivant montre qu'il ya unicité du second axe lorsque l'un est connu.

Propriété 1.3.2 (**Décomposition d'une rotation**). *Soit $r(O,\alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α. Pour toute droite (Δ) passant par O, il existe une unique droite (Δ') et une seule telle que : $s_{\Delta'}\circ s_{\Delta}=r(O,\alpha)$.*

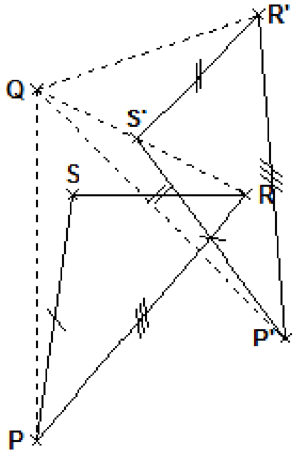
Exemple 1.3.1. *La figure ci-contre est un triangle ABC équilatéral de sens direct et de centre O. A', B', et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Nous avons :*
$s_{(BA)}\circ s_{(BC)}=r(B,\frac{2\pi}{3})$;
$s_{(CA)}\circ s_{(CC')}=r(C,-\frac{\pi}{3})$;
$r(O,\frac{2\pi}{3})=s_{(OB)}\circ s_{(CC')}=s_{(AO)}\circ s_{(BB')}$;
$r(A,-\frac{\pi}{3})=s_{(AA')}\circ s_{(AC)}=s_{(AC')}\circ s_{(AO)}$.



Propriété 1.3.3 (**Propriété Caractéristique d'une rotation**). *Soit g une application du plan dans lui même et $\hat{\alpha}$ un angle non nul.*

g est une rotation d'angle α si et eulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectifs M' et N', on a : $MN=M'N'$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}})=\hat{\alpha}$.

Exemple 1.3.2. *Notons P, Q, R et S quatre points non alignés et r un-huitième de tour indirect de centre Q. Nommons P', R' et S' tels que $r(P)=P'$, $r(R)=R'$ et $r(S)=S'$. On a :*
$\begin{cases} PR=P'R' \\ mes(\widehat{\overrightarrow{PR};\overrightarrow{P'R'}})=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$; $\begin{cases} PS=P'S' \\ mes(\widehat{\overrightarrow{PS};\overrightarrow{P'S'}})=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$ *et*
$RS=R'S'$ *avec* $mes(\widehat{\overrightarrow{RS};\overrightarrow{R'S'}})=-\frac{\pi}{2}$. *C'est-à-dire les triangles PRS et $P'R'S'$ sont superposables.*



1.4 Leçon 4 : Composée de rotations

Motivation de la leçon : La trajectoire d'un mobile en mouvement circulaire autour d'un axe fixe est le déplacement succéssif par composée(s) de rotation(s) d'un point de la trajectoire de ce dernier : C'est le cas des essuie-glace en action sur une barre-brise de vehicule ; L'application de cette notion est encore plus visible avec le phénomè physique contre-intuitif de rotation d'un oeuf dur, où mis en rotation à la vitesse de 10 toures par séconde, un oœuf dur se dresse à la verticale.

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de caractériser la composée de deux rotation de même centre.

Durée : 45 minutes.

Situation Probème : Fixé sur un robot dans une chaine de soudure, Le bras effectue successivement deux mouvements de rotations partant d'un point connu, pour souder deux points situés sous le plafond (supposé plan) de la coque d'un véhicule sur une chaine de soudure dans un atelier. Par suite la fixation des supports moteurs en faisant une fois de plus les mouvements (de somme d'angles plat ou pas) précédents, impose au bras du robot a changé son axe de rotation après chaque soudure supposés tous plan avec la droite d'action du bras. Peut-on reconnaitre dans chaque cas la nature de la transformation qu'éffectue le bras (B) du robot au bout de la dernière soudure ? Si oui caractériez-la.

Activité d'apprentissage 1.4.1. *Soit O le point de fixation du robot avec son corps, r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α' modélisant le premier et le second mouvement du bras. Soit M un point le point du départ du bras, M_1 premier point de soudure et M' le dernier.*

1. *Faire une figure.*
2. *Dans cette question on suppose que (B) sourde la coque c'est-à-dire rote autour d'un axe fixe O lors des deux soudures*
   a) *Montrer que $r' \circ r$ est une rotation dont-on déterminera le centre et l'angle.*
   b) *Préciser alors la nature et les élément caractéristique du mouvement du bras du robot lorsque ce dernier sourde la coque.*
3. *Ici maintenant, (B) fixe les supports moteur. Ainsi soit O' l'axe de rotation de (B) après la première soudure. Supposons que $\alpha + \alpha' \neq 0$. Ainsi notons r' la rotation de centre O' et d'angle α'.*
   a) *Montrer que pour tout point $N \neq M$, on a : $MN = M'N'$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}}) = \alpha + \alpha'$.*
   b) *En déduire que si $\alpha + \alpha' \neq 0$, alors $r' \circ r$ est une rotation.*
   c) *Que fait alors concretement le bras du robot à l'issue des deux soudures des supports moteur ?*
4. *Supposons que $\alpha + \alpha' = 0$.*
   a) *Montrer alors que $r' \circ r$ est une translation qu'on déterminera le vecteur de la translation.*
   b) *Quel mouvement simple ferait (B) pour accomplir sa tâche ?*

Esquisse de solution . 1. *La figure étant soigneusement faite, on a : $r(M) = M_1$ et $r'(M_1) = M'$*

2. *On a :* $r' \circ r(O) = O$ *; Pour* $M \neq O$*, nous obtenons :* $r' \circ r(M) = r'(M_1) = M'$*. c'est-à-dire* $OM = OM_1 = OM'$ *et mes*$\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}} = (\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM'}}) = \alpha + \alpha'$*. Donc (B) éffectue un mouvement de rotation de centre O et d'angle* α $+\alpha'$ *pour accomplir sa tâche sur chaque véhicule.*

3. *Notons* O' *l'axe de rotation du bras du robot après la première soudure.*
   - **a)** *Soit N un point du plan distinct de M. Montrons que :* $MN = M'N'$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \alpha + \alpha'$.

     Posons $N_1 = r(N)$ *et* $N' = r'(N_1)$*. On sait que* $M_1 = r(M)$ *et* $M' = r'(M_1)$ *alors d'après la propriété caractéristique des rotations, on a :* $\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M_1N_1}} = \hat{\alpha}$ *et* $MN = M_1N_1$ *;* $(\widehat{\overrightarrow{M_1N_1};\overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\alpha'}$ *et* $M_1N_1 = M'N'$*. Ainsi :* $(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = (\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M_1N_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{M_1N_1};\overrightarrow{M'N'}}) = \hat{\alpha} + \hat{\alpha'}$ *et* $M'N' = M_1N_1 = MN$.
   - **b)** *Supposons que* $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} \neq \hat{0}$*. Alors d'après la question précédente et la définition d'une rotation, on déduit que* $r' \circ r$ *est une rotation d'angle* $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} \neq \hat{0}$.
   - **c)** *Ainsi,* (B) *effectue un mouvement de rotation d'angle* $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'}$.

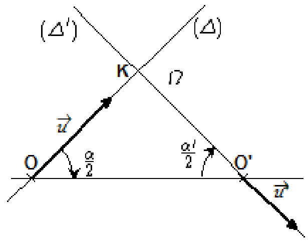
4. $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} = \hat{0}$
   - **a)** *On a alors d'après la question 3. a),* $MN = M'N'$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \hat{0}$ *donc* $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{M'N'}$ *sont colinésires de même sens et de même longueur. Ainsi donc* $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ *et d'après la propriété caractéristique d'une translation,* $r' \circ r$ *est une translation de vecteur* $\vec{u}$*. En plus,* $r' \circ r(O) = r'(O)$*, d'où* $\vec{u} = \overrightarrow{Or'(O)}$.
   - **b)** *Il suffit pour* (B) *d'effectuer tout simplement une translation de vecteur* $\overrightarrow{Or'(O)}$ *pour souder les deux supports moteur.*

Activité d'apprentissage 1.4.2 ($\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} \neq \hat{0}$ **: Construction du centre de la rotation** $r' \circ r$**).**
Soit O *et* O' *les centres respectifs de* r *et* r'.

1. *Construire la droite* (Δ') *passant par* O' *telle que* $r' = s_{(\Delta')} \circ s_{(OO')}$ *et en deduire que mes*$(\widehat{\overrightarrow{O'O},\vec{u'}}) = \frac{\alpha'}{2}$.
2. *D'autres part, construit la droite* (Δ) *passant par* O *telle que* $r = s_{(OO')} \circ s_{(\Delta)}$ *et déduire que mes*$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OO'}}) = \frac{\alpha}{2}$.
3. *En déduire que* $r' \circ r = s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$ *et que mes*$(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}) = \frac{\alpha+\alpha'}{2}$.
4. *Déduire alors que les droites* (Δ) *et* (Δ') *sont sécantes en un point* Ω *; Compare alors donc* $r' \circ r(\Omega)$ *et* Ω.
5. *Conclure.*

Esquisse de solution (**Construction du centre de** $r' \circ r$ **si** $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} \neq \hat{0}$**).** 1. *La droite* (Δ') *etant construite telle que* $r' = s_{(\Delta')} \circ s_{(OO')}$*, alors mes*$(\widehat{\overrightarrow{OO'};\vec{u'}}) = \frac{\alpha'}{2}$

2. *La droite* (Δ) *est construte sur la figure ci-contre et comme* $r = s_{(OO')} \circ s_{(\Delta)}$ *alors* $mes(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OO'}}) = \frac{\alpha}{2}$



3. $r' \circ r = (s_{(\Delta')} \circ s_{(OO')}) \circ (s_{(OO')} \circ s_{(\Delta)}) = s_{(\Delta')} \circ (s_{(OO')} \circ s_{(OO')}) \circ s_{(\Delta)} = s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$ *et* $mes(\widehat{\vec{u}; \vec{u'}}) = mes(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OO'}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{OO'}; \vec{u'}}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} = \frac{\alpha+\alpha'}{2}$
4. *On a* $mes(\widehat{\vec{u}; \vec{u'}}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} = \frac{\alpha+\alpha'}{2} \neq k\pi\ k \in \mathbb{Z}$. *Donc* (Δ) *et* (Δ') *sont sécantes. Ainsi, il existe un unique point* Ω *dun plan tel que* $\{\Omega\} = (\Delta) \cap (\Delta')$. *en plus,* $r' \circ r(\Omega) = s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}(\Omega) = \Omega$.
5. *On conclut que* $r' \circ r$ *est la rotation de centre* Ω *et d'angle* $2(\widehat{\vec{u}; \vec{u'}}) = \hat{\alpha} + \hat{\alpha'}$. *Où* $\{\Omega\} = (\Delta) \cap (\Delta')$

Résumé

1.4.1 Composée de rotations de même centre

Propriété 1.4.1. *Soit* r *et* r' *deux rotations de même centre* O *et d'angles respectifs* α *et* α'. $r' \circ r$ *est une rotation de centre* O *et d'angle* $\alpha + \alpha'$.

Dans le cas particulier où :

- $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} = \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est l'application identique.
- $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} = \hat{\pi}$, alors $r' \circ r$ est la symétrie de centre O.

Remarques 1.4.1. *Pour tout nombre réels* α *et* α', *on a :* $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$ *; donc* $r \circ r' = r' \circ r$. *On dit que la composée des rotations de même centre est commutative.*

Exemple 1.4.1. *Soit* X *un point du plan. Prenons* $r_1(X, \frac{2\pi}{3})$, $r_2(X, \frac{\pi}{3})$, $r_3(X, -\frac{\pi}{3})$ *et* $r_4(X, \frac{\pi}{6})$ *quatre rotations de centre* X.

- $r_1 \circ r_2$ *est la rotation de centre* X *et d'angle* π, *donc la la symétrie de centre* X.
- $r_2 \circ r_3$ *est l'application identité du plan.*
- $r_3 \circ r_4$ *est la rotation de centre* X *et d'angle* $-\frac{\pi}{6}$.

1.4.2 Composée de deux rotations de centre distincts

Activité d'apprentissage 1.4.3. *Soit* r *et* r' *deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs* α *et* α'. *Fixons* M *et* N *deux points distincts du plan,* M_1, M' *et* N_1, N' *les images respectives de* M *et* N *respectivement par* r *et* r'. *Donner la nature et les éléments caractéristiques de* $r' \circ r$ *dans les cas suivants :*

1. $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} \neq \hat{0}$;

2. $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} = \hat{0}$.

Activité d'apprentissage 1.4.4 **($\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} = \hat{0}$: Construction du vecteur de la translation de $r' \circ r$).** *Soit $O"$ l'image de O par r'. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ de la translation $r' \circ r$ est $\overrightarrow{OO"}$.*

Résumé

Propriété 1.4.2. *Soit r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et α'.*

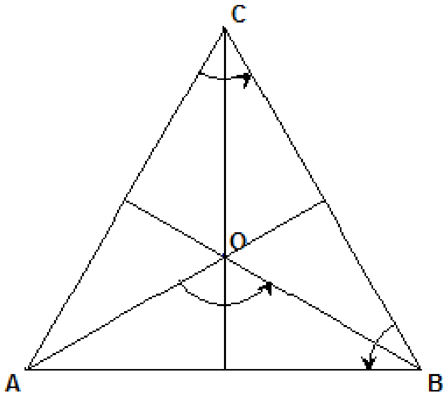
- *Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} \neq \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ dont le centre est donné par l'activité 1.4.2 ;*
- *Si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} = \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est une translation dont le vecteur est donné par l'activité 1.4.4.*

Dans les cas particuliers où :

$\hat{\alpha} = \hat{\alpha'} = \hat{\pi}$, alors $r(O, \alpha) = S_O$ et $r'(O', \alpha') = s_{O'}$. Et aussi $\hat{\alpha} + \hat{\alpha'} = \hat{0}$, donc, $r' \circ r$ est une translation. En notant $O" = s_{O'}(O)$, on a : $s_{O'} \circ s_O(O) = O"$ et $\overrightarrow{OO"} = 2\overrightarrow{OO'}$. Donc $r' \circ r = t_{2\overrightarrow{OO'}}$. De même, $r \circ r' = t_{2\overrightarrow{O'O}}$

On conclut que la composée de deux symétries centrales est une translation. Et la composée de deux rotations de centres distincts n'est pas commutative.

Exemple 1.4.2. *Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de sens direct. On considère les rotations r et r' de centres respectifs A et C d'angle $\frac{\pi}{3}$.*
$r' \circ r$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. De plus, $r' \circ r(A) = B$ et $r' \circ r(B) = C$ donc le centre de cette rotation est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$, c'est-à-dire le point O.
$r' \circ r^{-1}$ est une translation. En plus, on a $r' \circ r^{-1}(A) = B$, donc $r' \circ r^{-1} = t_{\overrightarrow{AB}}$.



Exercice d'application 1.4.1. *Soit $ABCD$ un carré de centre O et sens direct. On considère les rotations : $r_1 = r(B, \frac{\pi}{2})$, $r_2 = r(A, \frac{\pi}{2})$ et $r_1 = r(O, -\frac{\pi}{2})$.*

1. *Déterminer l'image de C par $r_2 \circ r_1$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.*
2. *Déterminer l'image de C par $r_3 \circ r_1$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_3 \circ r_1$.*
3. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_3 \circ r_2$.*

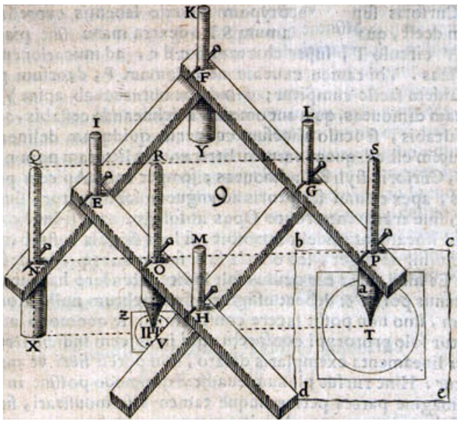
Exercice. *ABC est un triangle de sens direct, $ABED$ et $ACGF$ sont les carrés construits extérieurement à ABC sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. On désine par H le projeté orthogonal de A sur (BC), K le milieu de $[DF]$, I le centre du carré $ABED$ et J le centre du carré $ACGF$.*

1. *Faite une figure.*
2. *On considère les quarts de tour direct r et r', de centres respectifs I et J. Démontrer que : $r \circ r' = r'^{-1} \circ r^{-1} = s_K$.*
3. *Déterminer l'image de la droite (AH) par s_K. En déduire que les points K, A et H sont alignés.*
4. *Soit A' l'image du point A par s_K.*
   a) *Démontre que $r(C) = A'$. En déduire que : $(EC)\perp(A'B)$.*
   b) *Démontrer de même que : $(BG)\perp(A'C)$.*
5. *Déduire des questions précédentes que les droites (EC), (BG) et (AH) sont concourantes.*

Exercices du livre

1.5 Leçon 5 : Composée de deux homothéties

Motivation de la leçon : Un pantographe tel que présenté par la figure ci-contre, est un instrument de dessin, formé de tiges articulées, qui permet de reproduire un motif à l'échelle exacte, agrandie ou réduite, en utilisant les propriétés de l'homothétie pour conserver les proportions entre le dessin original et la copie. Son principe fut énoncé de manière scientifique en 1603 par le mathématicien jésuite Christoph Scheiner, pionnier de l'optique instrumentale et codécouvreur des taches solaires.



Durée : 50 minutes.

OPO : A la fin de cette leçon l'apprenant doit être capable d'identifier et de caractériser une homothétie, la composée d'une homothétie avec une translation et la composée d'une homothétie avec une rotation.

Introduction

Nous avons vu en classe de séconde qu'une homothétie est entièrement définie par un point, appélé centre, et un nombre réel non nul appélé rapport. Ainsi, l'homothétie h de centre O et de rapport k ($k \neq 0$), notée $h_{(O,k)}$ ou $h(O,k)$ ou simplement h s'il ya pa de confusion, est l'application du plan dans lui même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Par suite, toute homothétie $h_{(O,k)}$ est une transformation et sa transformation réciproque h^{-1} est $h^{-1}_{(O,\frac{1}{k})}$. Ceci implique la propriété caractéristique de h en ce sens que si M' et N' sont les images respectives de M et N par h, alors on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Nous déduisons dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ que, l'expression analytique d'une homothétie h de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ de rapport k avec $M\binom{x'}{y'} = h(M\binom{x}{y})$, est donnée par : $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0; \\ y' = ky + (1-k)y_0. \end{cases}$

Situation Problème : Vous assistez à l'élaboration du plan de maison de votre cher papa par un brillant ingénieur en géni civil. L'ingénieur souhaite reproduire à identique en réduisant ou en agrandissant une des pièces figurant sur le plan tel qu'a été instruit votre père. Alors son employeur, ancien scientifique en retraite, pense dans un premier temps à la composée de deux homothéties. Un avis partagé aussi par l'ingénieur qui ajoute : "j'aurai juste besoin soit d'une homothétie, soit d'une translation pour vous satisfaire" ; Ce que votre papa ne semble pas comprendre. Expliquez lui concrètement en donnant les outils appropriés l'affirmation de l'ingénieur.

Activité d'apprentissage 1.5.1. *Soit h et h' les deux homothéties de centre respectifs O et O', de rapport respectif k et k', dont fait reférence votre papa. Fixons M un point du plan.*

1. *On suppose ici que $O = O'$. Notons $M_1 = h(M)$ et $M' = h'(M_1)$.*
   a) *Montrer que $\overrightarrow{OM'} = kk'\overrightarrow{OM}$.*
   b) *En deduire la nature et les éléments caractéristiques de $h' \circ h$*
2. *Maintenant, nous considérons $O \neq O'$. Soit N un point du plan distinct de M. On pose en plus $M_1 = h(M)$, $N_1 = h(N)$, $M' = h(M_1)$ et $N' = h(N_1)$. En utilisant les propriétés caractétéristiques des homothéties et des translations, Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h' \circ h$.*
3. *Que concluez-vous au père aux vu des explications données aux questions 1. et 2. ?*
4. *Supposons que $kk' \neq 1$. Posons alors Ω le centre de l'homothétie $h' \circ h$. Soit M un point du plan et M' le point tel que $M' = h' \circ h(M)$. Montrer que $\Omega \in (MM) \cap (OO')$.*
5. *Supposons maintenant que $kk' = 1$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ de translation de $h' \circ h$ est $\vec{u} = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.*

Esquisse de solution . 1. *$O = O'$ $M_1 = h(M)$ et $M' = h'(M_1)$.*

a) *Montrons que $\overrightarrow{OM'} = kk'\overrightarrow{OM}$.*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM'} &= k'\overrightarrow{OM_1} \text{ car } h'(M_1) = M' \\ &= k'k\overrightarrow{OM} \text{ car } M_1 = h(M) \end{aligned}$$

b) *Déduisons la nature et les éléments caractéristique de $h' \circ h$.*

Nous venons de montrer que $\overrightarrow{OM'} = kk'\overrightarrow{OM}$ et en plus $h' \circ h(O) = O$ donc d'après la propriété caractéristique des homothéties, $h' \circ h$ est une homothétie de centre O et de rapport $k'k$.

2. *$O \neq O'$ N un point du plan du dessin distinct de M avec : $M_1 = h(M)$ et $M' = h'(M_1)$ et $N_1 = h(N)$ et $N' = h'(N_1)$. $kk' \neq 1$. On a : D'après la propriété caractéristique des homothétie, on a $\overrightarrow{M'N'} = k'\overrightarrow{M_1N_1}$ et $\overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN}$ et ainsi, $\overrightarrow{M'N'} = kk'\overrightarrow{MN}$. Une fois de plus d'après les propriétés caractéristiques des homothéties et des translations, on a :*
   - *Si $kk' \neq 1$, alors $h' \circ h$ est une homothétie de rapport $k'k$.*
   - *Par contre si $kk' = 1$, alors $h' \circ h$ est une translation.*
3. *Nous pouvons dire au père que l'ingénieur a raison mais sauf qu'il aurait du prendre la pène de distinguer les cas $kk' \neq 1$ et $kk' = 1$.*
4. *On a $M' = h' \circ h(M)$ donc $\Omega \in (MM')$ en plus, $h' \circ h(O) = h'(O)$ ainsi O, O' et Ω sont alignés d'où $\Omega \in (OO')$. Donc Ω est le point d'intersection de (OO') et (MM').*
5. *Dans le cas où $kk' = 1$, pour déterminer le vecteur de translation $\vec{u}$, il suffit de déterminer l'image M' d'un point M par $h' \circ h$. Dès lors, $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$. En d'autres termes, on a :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{Oh' \circ h(O)} \\
&= \overrightarrow{Oh'(O)} \\
&= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'h'(O)} \\
&= \overrightarrow{OO'} + k'\overrightarrow{O'O} \\
&= \overrightarrow{OO'} - \frac{1}{k}\overrightarrow{OO'} \quad \text{car } k' = \tfrac{1}{k} \\
&= \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}
\end{aligned}$$

   Ainsi prendre aussi $\vec{u} = \frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$

Résumé

Propriété 1.5.1 (**Composition de deux homothétie de même centre**). *Soit h et h' deux homothéties de même centre O et de rapports respectifs k et k'. $h' \circ h$ est l'homothétie de centre O et de rapport kk'.*

Remarques 1.5.1.
- *Si $kk' = 1$, alors $h' \circ h$ est l'application identique.*
- *Si $kk' = -1$, alors $h' \circ h$ est la symétrie de centre O.*
- *On a : $kk' = k'k$ donc $h' \circ h = h \circ h'$; Donc pour tout point O, la composition des homothétie de centre O est commutative.*

Propriété 1.5.2 (**Composée de deux homothéties de centres distincts**). *Soit $h_{(O,k)}$ et $h'_{(O,k')}$ deux homothéties de centres distincts O et O'.*
- *Si $kk' \neq 1$, alors $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk'. Le centre est déterminé par le question 4. de l'activité 1.5.1.*

– *Si $kk' = 1$, alors $h' \circ h$ est une translation. Son vecteur est déterminé par la question 5. de l'activité 1.5.1*

Remarques 1.5.2. – *Toute homothétie conserve le parallélisme ;*
– *Toute homothétie conserve le barycentre, les angles orientés et leur mesures ;*
– *Toute homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k^3|$.*

Il se dégage de cette remarque qu'en utilisant le fait que les homothéties conservent le parallélisme et q'un point son image et le centre de l'homothétie sont alignés, on trace par un trait où la couturière va placer sa fermeture.

Exemple 1.5.1. 1. *Soient A et B deux points distincts du plan. h et h' sont des homothéties de centres respectifs A et B de rapports rapports respectifs α et β. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = h' \circ h$.*

a) *Pour $\alpha = 3$ et $\beta = -\frac{2}{3}$*

b) *Pour $\alpha = 2$ et $\beta = \frac{1}{2}$*

2. *ABC est un triangle de sens direct. I est le point de $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. la parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) au point J.*

a) *Déterminer deux homothéties h et h' qui transforment chacun $[BC]$ en $[IJ]$.*

b) *Construire le centre de $h' \circ h$ et de $h \circ h'$.*

1.6 Leçon 6 : Homothéties-Translation-Rotations

OPO : A la fin de cette Leçon l'élève devra être capable d'identifier et de caractériser la composée d'une homothétie et d'une translation d'une part et la composée d'une homothétie et d'une rotation d'autre part.

Situation Problème : Soient h une homothétie, t une translation, et r une rotation ; M et M' deux points du plan. Dans chacun des cas suivants, peut-on trouver une transformation du plan permettant d'obtenir M' ?

1. $M' = t \circ h(M)$
2. $M' = h \circ r(M)$
3. $M' = r \circ h(M)$

Activité d'apprentissage 1.6.1. *Supposons que h une homothétie de centre O et de rapport k, $t = t_{\vec{u}}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ et r la rotation de centre O et d'angle α.*

1. *Déterminer $g = t_{\vec{u}} \circ h$ pour $k = 1$.*

2. *On suppose que $k \neq 1$. Sout M un point du plan. On note $M_1 = h(M)$ et $M' = t_{\vec{u}}(M_1)$.*

   a) *Vérifier que $M' = t \circ h(M)$.*

   b) *Montrer que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} + \vec{u}$. En déduire que M est invariant par g si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$.*

   c) *On note Ω l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$. Montrer que $\overrightarrow{O\Omega} = k\overrightarrow{O\Omega} + \vec{u}$.*

   d) *En utilisant b) et c), déduire que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. En déduire la nature et les éléments caractéristique de g.*

3. *On suppose $k \neq 0$ et $k \neq 1$. Et que $\varphi = h \circ t$.*

   a) *Montrer que $\varphi \circ t_{-\vec{u}} \circ h^{-1} = Id$ et en déduire que $\varphi^{-1} = t_{-\vec{u}} \circ h^{-1}$.*

   b) *En déduire de 2) que φ^{-1} est une homothétie de centre Ω' et de rapport $\frac{1}{k}$ avec $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$. Conclure sur la nature et les éléments caractéristiques de φ. Puis compare g et φ.*

Esquisse de solution.

1. *Pour $k = 1$, $h = Id$ donc $g = t_{\vec{u}}$.*

2. *Supposons $k \neq 1$.*

   a) $t \circ h(M) = t(M_1) = M'$.

   b) $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = k\overrightarrow{OM} + \vec{u}$.

   M est invariant par g si et seulement si $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM} + \vec{u}$. C'est-à-dire : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k-1}\vec{u}$.

   c) *D'après ce qui précède, $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{k-1}\vec{u} \iff \overrightarrow{O\Omega} = k\overrightarrow{O\Omega} + \vec{u}$.*

   d) $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM'} = -k\overrightarrow{O\Omega} - \vec{u} + k\overrightarrow{OM} + \vec{u} = k\overrightarrow{\Omega M}$. *Ainsi g est une homothétie de centre Ω et de rapport k.*

3. *Ici, $k \neq 0$ et $k \neq 0$ avec $\varphi = h \circ t$.*

   a) $\varphi \circ t_{-u} \circ h^{-1} = h \circ t_{\vec{u}} \circ t_{-u} \circ h^{-1} = Id$ *et comme φ est une transformation, alors $\varphi^{-1} = t_{-\vec{u}} \circ h^{-1}$*

   b) *D'après la question 2), φ^{-1} est une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$ et de centre Ω' tel que $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$. Ainsi φ est l'homothétie de rapport k et de centre Ω' avec $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$. Et donc $g \neq \varphi$.*

Activité d'apprentissage 1.6.2. *Soit r une rotation de centre O et d'angle α ; h est l'homothétie de même centre O et de rapport k. Posons : $\lambda = h \circ r$. Soient M un point du plan. Notons $M_1 = r(M)$ et $M' = h(M_1)$.*

1. *Justifier que $OM = OM_1$ et $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM_1}$. En déduire que $OM' = |k|OM$.*

2. *Prenons $\alpha = \frac{\pi}{4}$:*

   a) *Construire le point $M_1 = r(M)$.*

   b) *Pour $k = -3$, Construire le point $M' = h(M_1)$, en suite montre que $mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha - \pi$.*

c) *Pour* $k=3$, *Contruire le point* $P=h(M_1)$, *en suite montre que* $mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}})=\alpha$.

3. *Déduire de* 1. *et* 2. *la caractérisation de l'application* λ.

4. *On pose à présent* $\theta=r\circ h$ *et plus tôt* $M_1=h(M)$ *et* $M'=r(M_1)$.

a) *Montrer que* $\overrightarrow{OM_1}=k\overrightarrow{OM}$ *et* $OM'=OM_1$. *En déduire que* $OM'=|k|OM$.

Pour $\alpha=\frac{\pi}{4}$,

b) *Pour* $k=-3$, *construire* $M_1=h(M)$ *et ;*

c) *Construire le point* $M'=r(M_1)$ *puis montre que* $mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})=\alpha-\pi$.

d) *Pour* $k=2$, *Construire le point* $Q=h(M)$ *et montre que* $mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OQ}})=\alpha$.

e) *En utilisant a), b), c) et d) caractériser* θ.

Esquisse de solution. 1. *On a* $r(M)=M_1$ *et* $M'=h(M_1)$ *donc* $OM=OM_1$ *et* $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM_1}$ *i.e,* $OM'=|k|OM_1=|k|OM$.

2. $\alpha=\frac{\pi}{4}$

a) *Faites une esquisse*

b) $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})=mes(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM'}})+mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM_1}})=-\pi+\alpha$

3. $k=3$, *après construction de* P, *On a :* $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}})=mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM_1}})=\alpha$

4. *Des questions 1. et 2. On déduit que :* $\lambda(M)=M' \Longleftrightarrow \begin{cases} OM'=|k|OM, & \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})=\alpha & si\ k>0 \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})=\alpha-\pi & si\ k<0 \end{cases}$

5. $\theta=r\circ h$ *et* $\alpha=\frac{\pi}{4}$

a) *Comme* $M_1=h(M)$, *alors* $\overrightarrow{OM_1}=k\overrightarrow{OM}$ *et par suite* $M'=r(M_1)$ *d'où* $OM'=OM_1$.

Ainsi, $OM'=|k|OM$.

$\alpha=\frac{\pi}{4}$

b) $k=-3$ *et construction de* $M_1=h(M)$.

c) *Après avoir construit* $M'=r(M_1)$, *Nous avons :*

$mes(\widehat{\overrightarrow{OM});\overrightarrow{OM'}}=(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM_1}})+mes(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM'}})=\alpha-\pi$

d) *Pour* $k=2$, *Construisons* $Q=h(M_1)$ *et alors,* $mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OQ}})=mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM_1}})=\alpha$.

Nous déduisons de : a), b) et c) que : $\theta(M)=M' \Longleftrightarrow \begin{cases} OM'=|k|OM, & \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})=\alpha & si\ k>0 \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})=\alpha-\pi & si\ k<0 \end{cases}$

Résumé

1.6.1 Composée d'une homothétie et d'une translation

Propriété 1.6.1. *Soit h une homothétie de centre O de rapport non nul k et t la translation de vecteur non nul $\vec{u}$.*

1. *La transformation $t \circ h$ est :*
   - **a)** *la translation t si $k = 1$;*
   - **b)** *L'homothétie de centre Ω et de rapport k si $k \neq 1$ avec $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$.*
2. *La transformation $h \circ t$ est :*
   - **a)** *La translation t si $k = 1$;*
   - **b)** *L'homothétie de centre Ω' et de rapport k si $k \neq 1$ avec $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$.*
3. *Si $k \neq 1$, alors $t \circ h$ n'est pas toujours égale à $h \circ t$.*

Exemple 1.6.1. *Fixons O un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur. h l'homothétie de centre O et de rapport -5. t est la translation de vecteur $\vec{u}$. Donne la nature et les éléments caractéristiques de $\phi = h \circ t$ et $\rho = t \circ h$.*

1. *ϕ est l'homothétie de centre Ω et de rapport -5. Avec Ω défini par : $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{-5}{1-(-5)}\vec{u} = -\frac{5}{6}\vec{u}$.*
2. *ρ est l'homothétie de rapport -5 et de centre Ω'. Où Ω' défini par : $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{1}{1-(-5)}\vec{u} = \frac{1}{6}\vec{u}$.*

Propriété 1.6.2. *Le plan est muni du répère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit k un nombre réel non nul et f l'application du plan dans lui-même, qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que : $\begin{cases} x' = kx + p; \\ y' = ky + q. \end{cases}$, où p et q sont des nombres réels. Alors :*

1. *Si $k = 1$, f est une translation de vecteur $\vec{u}\binom{p}{q}$.*
2. *Si $k \neq 1$, f est une homothétie de rapport k.*

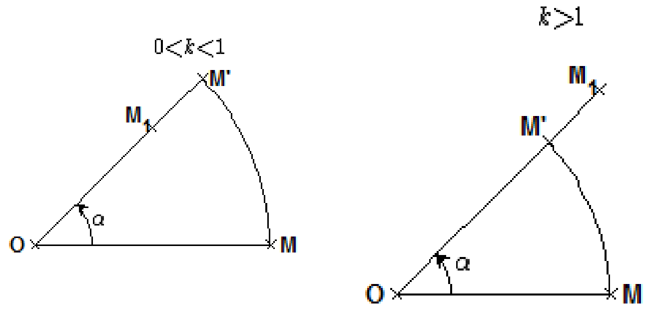
Exemple 1.6.2. *Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que : $\begin{cases} x' = 3x + \pi, \\ y' = 3y - 1. \end{cases}$*
f est une homothétie de rapport 3. Son centre est le point invariant Ω de cordonnées $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ce résultat s'obtient aussi en remplaçant respectivement x' et y' par x et y, étant donné que Ω est le point invariant.

1.6.2 Composée d'une Homothétie et d'une rotation

Propriété 1.6.3. *Soient r la rotation de centre O et d'angle α et h l'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$. On a : $r \circ h = h \circ r$ et :*

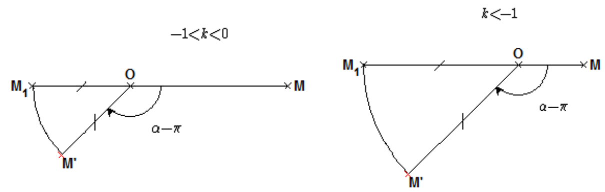
1. *Si* $k > 0$, *alors*

$$r \circ h(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} OM' = kOM, \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha. \end{cases}$$



2. *Si* $k < 0$, *alors*

$$r \circ h(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} OM' = -kOM, \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = -\pi + \alpha. \end{cases}$$



Remarques 1.6.1. 1. *La composée d'une homothétie de rapport* k *et d'une rotation d'angle de mesure* α *fait subir à une confiiguration géométrique, une rotation et une modification de ses dimensions tout en conservant la nature, l'image est alors semblable à la configuration initiale : cette composée est alors appelée similitude de rapport* k *et de même centre que* h *et* r*. Elle multiplie les longueurs des segments par* $|k|$ *et les aires par* k^2*.*

2. *Si une application* g *est telle que pour tous points* M *et* N *d'image respectives* M' *et* N' *par* g*, avec le rapport* $\frac{M'N'}{MN}$ *donnant un réel positif* k*, alors* g *est la similitude de rapport* k*.*

Exemple 1.6.3. 1. *Soit* $ABCD$ *un carré direct. On pose* $R = r(O, \frac{\pi}{2})$, $h = h(O, -\frac{1}{2})$ *et* $f = h \circ R$*.*

a) $f(O) = O$

b) $f(B) = h \circ R(B) = h(R(B)) = h(C) = A.$

2. *Soit* S *la similitude qui transforme, dans le carré précédent,* A *en* O *et* B *en* C*.*

a) S *admet-elle un point invariant ? si oui déterminez le. Ce dernier s'appelle le centre de la similitude* S*.*

b) *Déterminer le rapport de* S*.*

3. *Soit* EFH *un triangle équilatéral direct de centre* G*.* $g = r(G, \frac{\pi}{3}) \circ h_{(G,3)}$*. Construire* $E'F'H'$ *image de* EFH *par* g*.*

Exercice d'application 1.6.1. ABC *est un triangle et Soient les transformations suivantes :* $h = h(B, k)$, $h' = h'(C, k')$, $t = t_{\vec{u}}$ *et* $r = r(C, \alpha)$*.*

1. *Dans cette question on suppose que :* $k = 3$ *et* $k' = -\frac{2}{3}$*.*

a) *Donner la nature et les éléments caractéristique de* $h' \circ h$*.*

b) *Construire l'image de* A *par* $h' \circ h$ *et en déduire une détermination du centre de* $h' \circ h$*.*

2. *Ici,* $k = \frac{3}{5}$ *et* $k' = \frac{5}{3}$*. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de* $h' \circ h$*.*

3. *Posons maintenant :* $h' = -3$, $\vec{u} = -2\overrightarrow{BA}$ *et* α *quart de tour indirect. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :*

a) *$t\circ h'$ et $h'\circ t$.*

b) *$r\circ h'$.*

4. *Le plan étant muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, On pose $A\binom{-2}{3}$ et $B\binom{0}{4}$ avec $k=1-\sqrt{2}$. Déterminer l'expression analytique de $h'\circ t$.*

1.7 Leçon 7 : Expression analytique d'une transformation plane et lieux Géométriques

Motivation : Face à certains problèmes mathématiques, les propriétés des transformations du plan peuvent aider considérablement. Ainsi, la bonne maitrise de ces outils peut parfois faciliter l'identification et la construction de certains lieux géométrique.

Durée : 45 minutes.

OPO : Identifier et montrer qu'une application d'expression analytique connue dans lui-même est une transformation plane, Déterminer l'expression analytique de sa transformation réciproque ; La justification des configurations et la détermination des lieux géométrique en utilisant la force des propriétés des transformations n'est pas en reste.

Sitation Problème : Marc technicien informatique chez un opérateur mobile identifie la position $M\binom{x'}{y'}$ d'une antenne sur le terrain à partir de sa position $M\binom{x}{y}$ théorique en utilisant un logiciel dont le programme central utilise la relation : $\begin{cases} x'=2x-y+1 \\ y'=-x+3y-2 \end{cases}$. Ce logiciel fonction corectement si à chaque position théorique $M\binom{x}{y'}$, sur le terrain Marc voit exactement une seule antenne ; au quel cas Marc le fera confiance. Marc peut-il alors faire confiance à cet outil de travail ?
Maintenant, Marc vient d'achever son service de maintenance sur deux antennes fixées respectivement en A et B. Il se rend à present sur la zone d'appel servant de test ; de sorte que sur cette zone, sa position avec A et B soient un triangle rectangle. Son amie Manuella doit réceptionner les appels au point d'equilibre entre A, B et la position de Marc. Où doit se déplacer Manuella lorsque Marc effectue ses tests ?

Activité d'apprentissage 1.7.1. *1. Soit f une application du plan dans lui même telle que pour tout point $M\binom{x}{y}$ on associt le point $M'\binom{x'}{y'}$ vérifiant : $\begin{cases} x'=ax+by+c \\ y'=a'x+b'y+c' \end{cases}$.*

a) *Montrer que f est une bijection si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$.*

b) *Dans ce cas exprimer alors x' et y' en fonction x et de y.*

c) *Déduire donc une expression analytique de f^{-1}.*

d) *Conclure alors sur l'usage du logiciel de travail de Marc.*

2. *Fixons A et B deux points du plan et I milieu de $[AB]$ puis M un point du plan tel que le triangle ABM soit rectangle.*

a) *En remarquant que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$, déterminer une homothétie h dont on présisera les éléments caractéristique, qui transforme M en G.*

b) *Montrer que M appartient au cercle (C) de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.*

c) *Déduire et construire le lieu géométrique de G lors que M varie.*

d) *Conclure donc pour le déplacement de Manuella.*

Esquisse de solution. 1. **a)** *Nous avons :*

$$M' = f(M) \iff \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \iff \begin{cases} x' - c = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases}$$ *. Ainsi, f est bijective si et seulement* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ *c'est-à-dire* $ab' - a'b \neq 0$

b) $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \iff \begin{cases} x' - c = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases}$ *Ainsi :* $\Delta_{x'-c} = b'(x'-c) - b(y'-c')$ *et* $\Delta_{y'-c'} = a(y'-c) - a'(x'-c)$ *d'où :* $\begin{cases} x = \frac{1}{ab'-a'b}(b'(x'-c) - b(y'-c')) \\ y = \frac{1}{ab'-a'b}(a(y'-c) - a'(x'-c)) \end{cases}$

c) $M' = f^{-1}(M) \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{ab'-a'b}(b'(x-c) - b(y-c')) \\ y' = \frac{1}{ab'-a'b}(a(y-c) - a'(x-c)) \end{cases}$

d) *Etant donné que $2 \times 3 - (-1) \times (-1) = 5 \neq 0$ alors à chaque position $M\binom{x}{y}$ correspond exactement une seule antenne sur le terrain. Donc, le logiciel de Marc fonction correctement : il peut utiliser cet outil de travail.*

2. *Soit G le point où se situe manuella. Alors G est le centre de gravité du triangle ABM.*

a) *I étant le milieu de $[AB]$, alors : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ Donc G est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.*

b) *ABM étant un triangle rectangle en M Alors M appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de Diamètre $[AB]$ privé des points A et B.*

c) *G décrit alors l'image $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par l'homothétie h.*

d) *Ainsi manuella décrit $\mathcal{C}'$.*

Activité d'apprentissage **1.7.2.** *Soient g et f deux transformations du plan dans lui même d'expressions analytiques respectives* $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ *et* $\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \\ y_1' = a_1'x_1 + b_1'y_1 + c_1' \end{cases}$.

1. *Montrer que $f \circ g$ est une transformation.*

2. *Soient les points* $M\binom{x}{y}$, $M_1\binom{x_1}{y_1}$ *et* $M'\binom{x'}{y'}$ *tels que :* $M_1 = g(M)$ *et* $M' = f(M_1)$. *En remarquant que* $M' = f \circ g(M)$, *exprimer* x' *et* y' *en fonction de* x *et de* y.

Esquisse de solution . 1. *Montrons que* $f \circ g$ *est une transformation.*

Soient X *et* Y *deux point du plan.*

$$\begin{aligned}
f \circ g(X) = f \circ g(Y) &\iff f^{-1} \circ (f \circ g(X)) = f^{-1} \circ (f \circ g(Y)) \text{ car } f \text{ est bijective}\\
&\iff (f^{-1} \circ f) \circ g(X) = (f^{-1} \circ f) \circ g(Y)\\
&\iff Id \circ g(X) = Id \circ g(Y)\\
&\iff g(X) = g(Y)\\
&\iff g^{-1}(g(X)) = g^{-1}(g(Y)) \text{ car } g \text{ est bijective}\\
&\iff (g^{-1} \circ g)(X) = (g^{-1} \circ g)(Y)\\
&\iff X = Y
\end{aligned}$$

Ainsi, $f \circ g$ *est injective.*

Par ailleurs soit Z *un point du plan. Cherchons* M *un point du plan tel que* $f \circ g(M) = Z$.

$$\begin{aligned}
f \circ g(M) = Z &\iff g^{-1} \circ f^{-1}(f \circ g(M)) = g^{-1} \circ f^{-1}(Z)\\
&\iff (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ g)(M) = (g^{-1} \circ f^{-1})(Z)\\
&\iff M = (g^{-1} \circ f^{-1})(Z) \text{qui est un point du plan}
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $M = (g^{-1} \circ f^{-1})(Z)$ *; Ainsi* $f \circ g$ *est surjective. On conclut alors que* $f \circ g$ *est une bijection du plan dans lui même, donc une transformation du plan.*

2. *Exprimons x' et y' en fonction de x et de y.*

$M_1 = g(M) \iff \begin{cases} x_1 = ax + by + c \\ y_1 = a'x + b'y + c' \end{cases}$ *et* $M' = f(M_1) \iff \begin{cases} x' = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \\ y' = a_1'x_1 + b_1'y_1 + c_1' \end{cases}$. *Ainsi,*

$$\begin{cases} x' = a_1(ax + by + c) + b_1(a'x + b'y + c') + c_1 \\ y' = a_1'(ax + by + c) + b_1'(a'x + b'y + c') + c_1' \end{cases}$$

$$i.e., \begin{cases} x' = a_1(ax + by + c) + b_1(a'x + b'y + c') + c_1 \\ y' = a_1'(ax + by + c) + b_1'(a'x + b'y + c') + c_1' \end{cases}$$

$$i.e., \begin{cases} x' = (a_1a + b_1a')x + (a_1b + b_1b')y + a_1c + b_1c' + c_1 \\ y' = (a_1'a + b_1'a')x + (a_1'b + b_1'b')y + a_1'c + b_1'c' + c_1' \end{cases}$$

Résumé

1.7.1 Expression Analytique d'une transformation plane

Propriété 1.7.1. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que :* $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$.
Où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

1. *f est une transformation plane si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.*
2. *L'expression analytique de la transformation réciproque f^{-1} s'obtient en exprimant x et y en fonction x' et y'.*
3. *Soit g une transformation du plan telle que pour tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$, d'expression analytique :* $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$. *Soit f une transformation du plan telle que pour tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ d'expression analytique :* $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a'_1x + b'_1y + c'_1 \end{cases}$.
Alors l'expression analytique de la transformation $f \circ g$ qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$, est donnée par : $\begin{cases} x' = (a_1a + b_1a')x + (a_1b + b_1b')y + a_1c + b_1c' + c_1 \\ y' = (a'_1a + b'_1a')x + (a'_1b + b'_1b')y + a'_1c + b'_1c' + c'_1 \end{cases}$.

Exemple 1.7.1. *On se situe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan. f et g sont les application d'expressions analytiques respectives :* $\begin{cases} x' = 2x - y + 2 \\ y' = 3x + 2y + \frac{2}{3} \end{cases}$, *et* $\begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ y' = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{5} \end{cases}$.

1. *f et g sont-elles des transformations ? si oui déterminer f^{-1} et g^{-1}.*
2. *Déterminer l'expression analytique de $f \circ g$ et celle de $g \circ f$.*

1.7.2 Lieux Geométriques

Propriété 1.7.2 (Technique de récherche d'un lieu géométrique).

1. *Les transformations planes conservent les configurations, les contacts et le parallélisme.*
2. *Pour Construire l'ensemble (Σ') décrit par tous les points M' lorsque le point M décrit un autre ensemble (Σ), les étapes suivantes sont indispensables :*
   - *Construire soigneusement le point M' pour un point M fixé.*
   - *Déterminer alors une transformation qui emmène M en M'. (Σ') est l'image de (Σ) par cette application. (Σ') est alors appeé lieu géométrique des points M' lorsque M décrit (Σ).*

Exemple 1.7.2. *Soit $ABCD$ un carré, M un point de $[AC]$, P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur les côtés $[AC]$ et $[BC]$. Déterminer le lieu géométrique du point I, milieu de $[PQ]$, lorsque M décrit $[AC]$.*

Exercice d'application 1.7.1. *Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). Soit h l'homothétie de centre O et rapport* -3*,* s_A *la symétrie de centre* $A\binom{3}{-1}$*.*

1. *Ecrire les expressions analytiques de h et de* s_A*, puis celle de la transformation* $s_A \circ h$*.*
2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation* $s_A \circ h$*.*

Module 24 : Géométrie dans l'espace
Chapitre : Orthogonalité dans l'espace

Leçon 1 : Droites et plans

Capacités visées :

➠ Avoir une bonne vision de la notion de l'espace.

➠ Maîtriser les positions relatives de deux droites, de deux plans, d'un plan et d'une droite

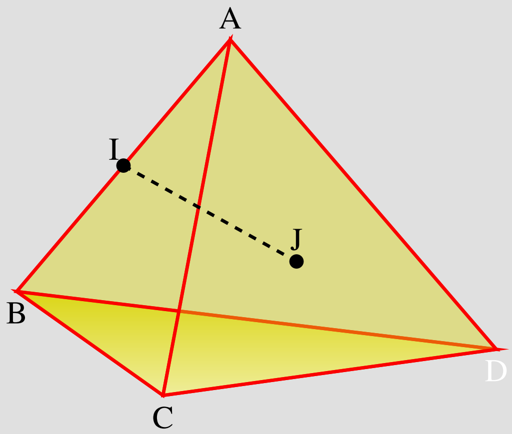
Contrôle de pré-requis

1 Donner la nature de chaque face d'un cube.

2 Deux faces opposées d'un cube ont elles des cotés parallèles ?

Situation Problème

Abanda dispose d'un objet en bois, ayant la forme d'une pyramide ABCD (voir figure ci-contre). Le point I est milieu de [AB], et J est le centre de gravité du triangle ACD. Par I et J, on fait passer une droite (Δ). La droite (Δ) perce-t-elle le plan (BCD) ?



Activité d'apprentissage

Ci-contre ABCDEFGH est pavé droit.

1) Citer deux segments à supports parallèles.

2) Les points A, B, C et F sont-ils situés sur une même face du pavé ?

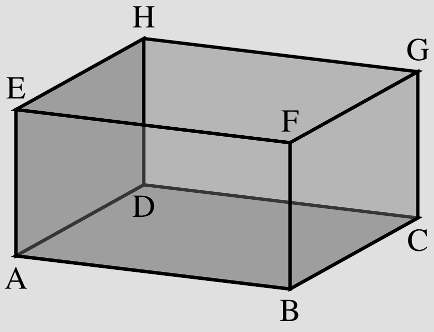
3) Les points A, D, H et E sont-ils situés sur une même face du pavé ?

4) Citer trois segments contenues sur la face DCGH.

5) Les faces ABCD et EFGH ont-elles des points en commun ?

6) Déterminer l'intersection des faces BCGF et ABCD.

7) Préciser la nature du quadrilatère AHGB en justifiant.



Résumé

1. Rappels des notions de base

• Par deux points A et B de l'espace, il passe une et une seule droite notée (AB).

• Par trois points A, B et C de l'espace non alignés définissent un plan noté (ABC).

• Un plan de l'espace est généralement représenté par un parallélogramme.

• Deux droites de l'espace contenues dans un même plan sont coplanaires.

• Deux droites de l'espace secantes ou parallèles sont coplanaires.

• Deux droites distinctes de l'espace, secantes ou parallèles, définissent un unique plan.

• Quatre points de l'espace qui appartiennent à un même plan sont coplanaires.

• Quatre points de l'espace qui ne sont pas coplanaires sont les sommets d'un solide de l'espace appelé tétraèdre.

• Un tétraèdre régulier a ses arêtes de même longueur.

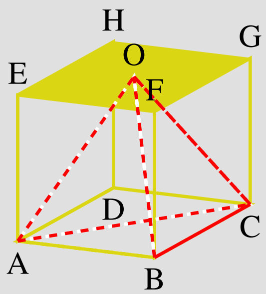
• Si A et B sont deux points d'un plan (P) de l'espace, alors (AB) $\subseteq$ (P).

Exemple

Ci-contre ABCDEFGH est un cube, et O est le centre de la face EFGH. On a :

• Les droites (AD) et (BC) sont coplanaires, et sont contenues dans le plan (ABC).

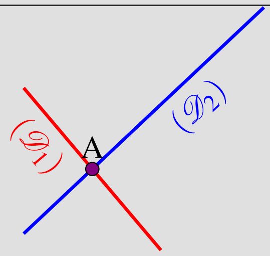
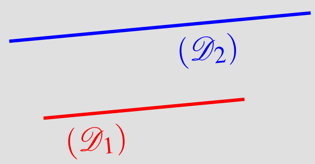
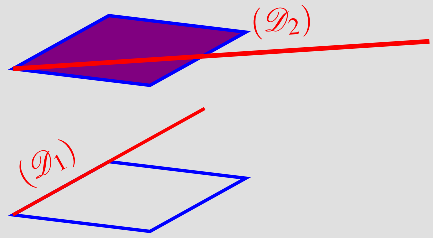
• ABCO est un tétraèdre, et (OG) $\subseteq$ (EFG).



2. Positions relatives de deux droites de l'espace

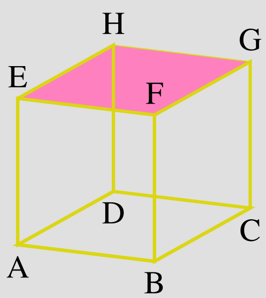
• Deux droites de l'espace sont : soit sécantes, soit parallèles, soit non coplanaires.

• Soient $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites de l'espace.

$(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sécantes	$(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ parallèles	$(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ non coplanaires
		
$(\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2) = \{A\}$	$(\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2) = \emptyset$	$(\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2) = \emptyset$

Remarques

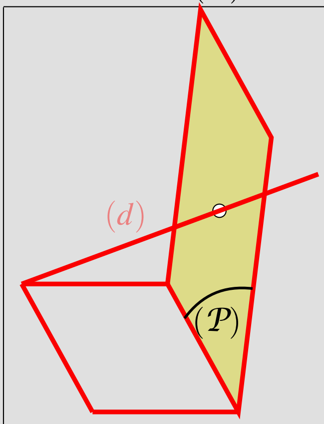
Si $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont parallèles, une sécante à $(\mathscr{D}_1)$ n'est pas forcément une sécante à $(\mathscr{D}_2)$.
En effet, si l'on considère le cube ABCDEFGH ci-contre, les droites (EH) et (BC) sont parallèles, (EA) est une sécante à (EH), mais (EH) et (BC) ne sont pas sécantes.

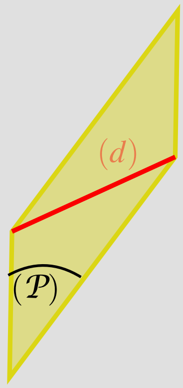


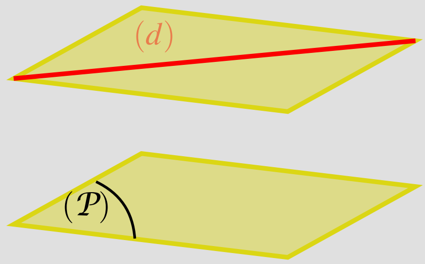
3. Position relative d'une droite et d'un plan

• Une droite et un plan de l'espace sont : soit parallèles, soit sécants.

• Une droite (d) est parallèle à un plan $(\mathcal{P})$ lorsque $(d) \subseteq (\mathcal{P})$ ou (d) est parallèle à une droite contenue dans $(\mathcal{P})$.

<table>
<tr>
<td>


$(d) \cap (\mathcal{P}) = \{\mathrm{A}\}$
$(\mathcal{P})$ et (d) sécants en A.
</td>
<td>


(d) est contenue dans $(\mathcal{P})$
</td>
<td>


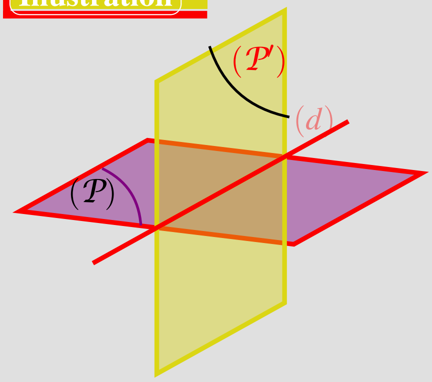
$(d) \cap (\mathcal{P}) = \emptyset$
$(\mathcal{P})$ et (d) sont strictement parallèles.
</td>
</tr>
</table>

4. Positions relatives de deux plans

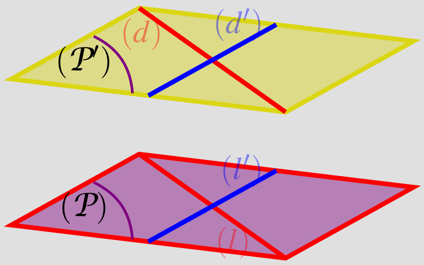
• Dans l'espace, deux plans sont : soit sécants suivant une droite, soient parallèles.

• Deux plans sont parallèles lorsque l'un d'entre eux contient deux droites sécantes et parallèles à l'autre.

Illustration



Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant la droite (d)
$(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}') = (d)$



$$\begin{cases} (l) \subseteq (\mathcal{P}) \\ (d) \subseteq (\mathcal{P}') \\ (l) /\!/ (d) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} (l') \subseteq (\mathcal{P}) \\ (d') \subseteq (\mathcal{P}') \\ (l') /\!/ (d') \end{cases}$$

Alors $(l) /\!/ (\mathcal{P}')$ et $(l') /\!/ (\mathcal{P}')$.
(l) et (l') étant deux droites sécantes contenues dans $(\mathcal{P})$, alors Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.
$(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}') = \emptyset$

5. Plan coupant deux plans parallèles

• Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à ces deux plans les coupe suivant deux droites parallèles.

Illustrations

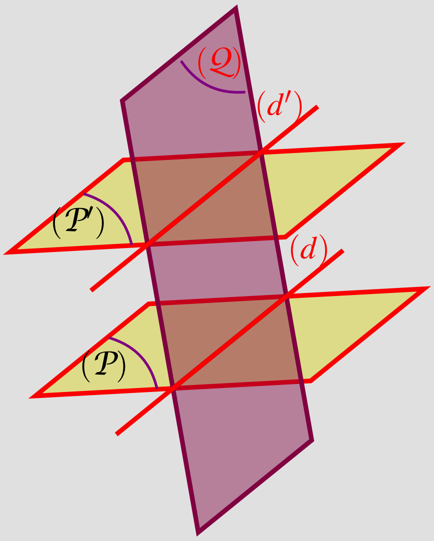
Hypothèses :

◇ $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont des plans parallèles.

◇ Le plan $(\mathcal{Q})$ coupe $(\mathcal{P})$ suivant la droite (d), et $(\mathcal{P}')$ suivant la droite (d').

Conclusion :

Les droites (d) et (d') sont parallèles.



6. Théorème du toit

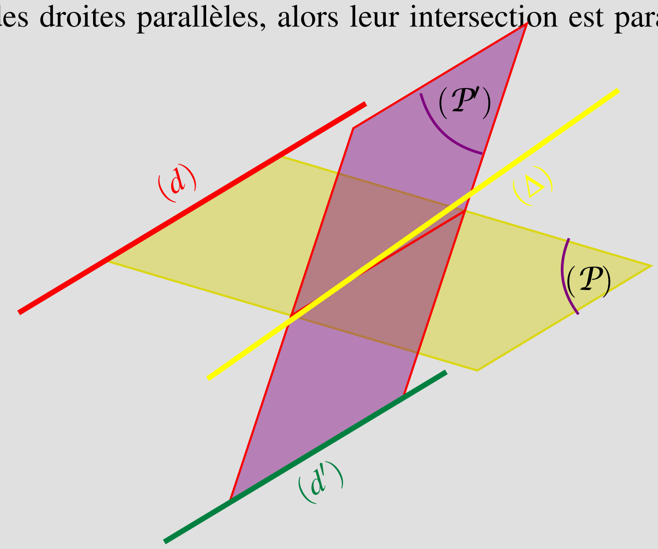
Si deux plans sécants contiennent des droites parallèles, alors leur intersection est parallèle à ces droites.

Illustration

Hypothèse :

$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont deux plans sécants suivant une droite (Δ), (d) et (d') sont deux droites parallèles, et contenues respectivement dans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Conclusion : La droite (Δ) est parallèle à chacune des droites (d) et (d').



Exercices d'applicaion

1

Ci-contre **ABCDEFGH** est un pavé droit où où **I**, **J**, **K** et **L** sont les milieux respectifs de **[DH]**, **[HG]**, **[AB]**, et **[BF]**.

1.1 A chaque fois, sans justifier, donner la position relative des deux droites citées.

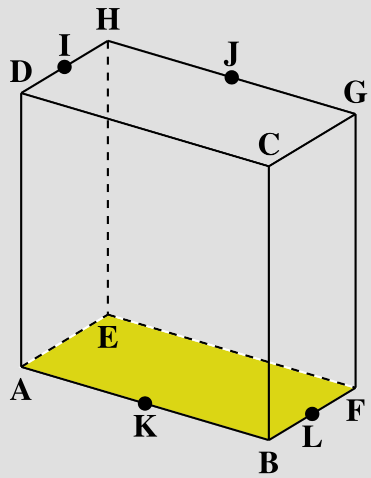
(a) (**DB**) et (**EF**) ; (b) (**IJ**) et (**AF**) ; (c) (**IC**) et (**AB**) ; (d) (**JF**) et (**EH**).

1.2 A chaque fois, sans justifier, donner la position relative des deux plans cités.

(a) (**DCG**) et (**AEF**) ; (b) (**IJA**) et (**HDC**) ; (c) (**IJE**) et (**CKL**).

1.3 A chaque fois, sans justifier, donner la position relative de la droite et du plan cités.

(a) (**IJ**) et (**ABF**) ; (b) (**IJ**) et (**BCG**) ; (c) (**KE**) et (**ABF**).



Solution :

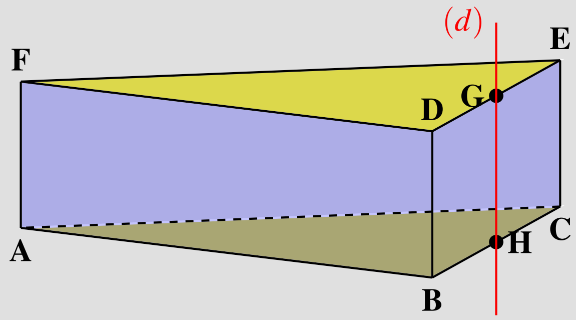
1.1 (a) (DB) et (EF) non coplanaires ; (b) (IJ) et (AF) non coplanaires ;
(c) (IC) et (AB) non coplanaires ; (d) (JF) et (EH) coplanaires et secantes.

1.2 (a) (DCG) et (AEF) parallèles ; (b) (IJA) et (HDC) sont sécants suivant la droite (IJ) ;
(c) (IJE) et (CKL) sont parallèles.

1.3 (a) (IJ) et (ABF) parallèles ; (b) (IJ) et (BCG) sécantes en X où X $\in$ (IJ) $\cap$ (CG) ;
(c) (KE) est contenue dans (ABF).

2

ABCEFD est un prisme droit à base triangulaire. **G** est le milieu de [**DE**] et **H** est le milieu de [**BC**].
Démontrer que la droite (**GH**) est parallèle au plan (**ABD**).



Solution :

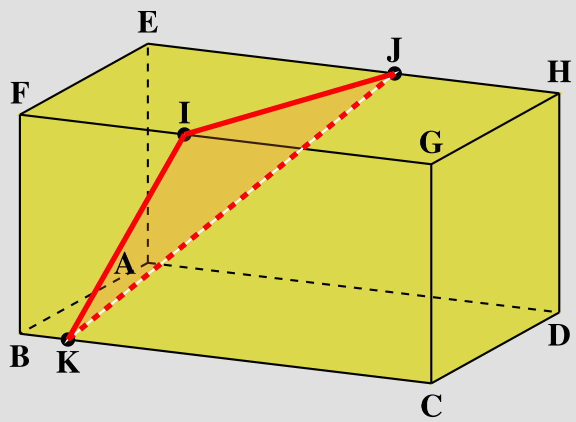
BDEC est un rectangle, G et H sont les milieux respectifs des segments [DE] et [BC]. Alors (GH) est parallèle à (BD). Comme (BD) est contenue dans (ABF), alors (GH) est parallèle au plan (ABF).

3

Enoncé : **ABCDHEFG** est un pavé droit. **I** est un point de [**FG**] et **J** est un point de [**EH**]. **K** est un point de [**BC**]. Justifier que les plans (**ABC**) et (**IJK**) sont sécants suivant une droite (Δ) que l'on précisera.

3.2 Justifier que (Δ) et (**AD**) sont sécantes en un point qu'on notera **L**.

3.3 Déterminer l'intersection du plan (**IJK**) avec (**AD**).



Solution :

3.1 Justifions que les plans (**ABC**) et (**IJK**) sont sécants suivant une droite (Δ)

K appartient aux deux plans (**ABC**) et (**IJK**). Ainsi (**ABC**) $\cap$ (**IJK**) $\neq \emptyset$. Comme (**ABC**) et (**IJK** ne sont pas confondus, alors ces plans sont sécant suivant une droite (Δ).
(**ABC**) et (**EFH**) sont parallèles, et (**EFH**) et (**IJK**) sont sécants suivant la droite (IJ).
Donc (Δ) est précisément la droite passant par K et paralléle à (IJ).

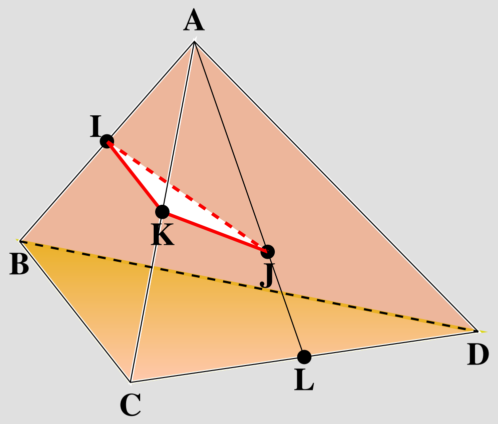
3.2 Justifions que (Δ) et (**AD**) sont sécantes en un point qu'on notera **L**.

(Δ) et (**AD**) sont contenues dans (**ABC**). Ainsi (Δ) et (**AD**) sont t parallèles ou sécantes.
Si (Δ) et (**AD**) sont parallèles, alors (**AD**) et (**IJ**) sont parallèles car (Δ) et (**IJ**) sont parallèles. Ainsi (**AD**) et (**IJ**) sont coplanaires. Ce qui n'est pas le cas. Donc (Δ) et (**AD**) sont sécantes en

un point L.

3.3 L'intersection de (**IJK**) avec (**AD**) est le point **L**.

4



ABCD est un tétraèdre, **I**, **K** et **L** sont les milieux respectifs des segments [**AB**], [**AC**] et [**CD**]. On note **J** le centre de gravité du triangle **ACD**.

4.1 Justifier que le point D appartient au plan (**IJK**).

4.2 Montrer que les plans (**IJK**) et (**BCD**) contiennent des droites parallèles.

4.3 En déduire que les plans (**IJK**) et (**BCD**) sont sécants suivant une droite (Δ) à préciser.

4.4 Prouver alors que (**IJ**) et (**BCD**) sont sécants.

4.5 Expliquer la construction du point d'intersection de la droite (**IJ**) avec le plan (**BCD**).

Solution :

4.1 Justifions que le point D appartient au plan (**IJK**).

K est le milieu de [AC], alors (**KD**) est une médiane de **ACD**.

Comme J est le centre de gravité de **ACD**, alors D $\in$ (**JK**).

Puisque (**JK**)$\subseteq$ (**IJK**), alors D $\in$ (**IJK**).

4.2 Montrons que (**IJK**) et (**BCD**) contiennent des droites parallèles.

I et K sont les milieux respectifs des segments [**AB**] et [**AC**], alors (**IK**) //(**BC**).

(**IK**) et (**BC**) sont des droites contenues respectivement dans (**IJK**) et (**BCD**).

Donc (**IJK**) et (**BCD**) contiennent des droites parallèles.

4.3 Deduisons en que les plans (**IJK**) et (**BCD**) sont sécants.

D est un point commun aux plans (**IJK**) et (**BCD**), alors (**IJK**) $\cap$ (**BCD**) $\neq \emptyset$.

(**I**) $\notin$ (**BCD**), alors (**IJK**) et (**BCD**) ne sont pas confondus.

D'où (**IJK**) et (**BCD**) sont sécants suivant une droite passant par D.

(**IK**) et (**BC**) sont des droites parallèles contenues respectivement dans (**IJK**) et (**BCD**).

Ainsi (Δ) est la droite passant par D et parallèle à (**IK**).

4.4 Prouvons alors que (**IJ**) et (**BCD**) sont sécants.

(**IJ**), (Δ) et (**IK**) sont coplanaires car droites contenues dans le plan (**IJK**).

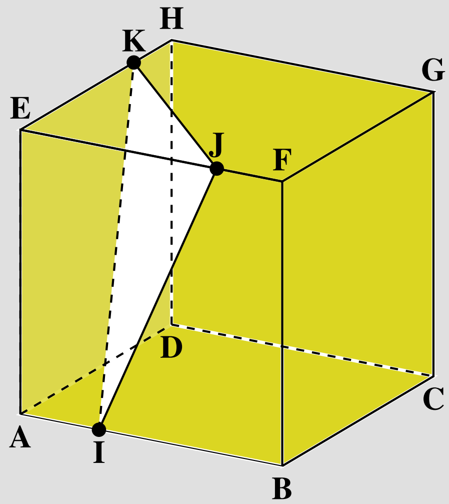
Comme (**IK**) // (Δ), (**IK**) et (**IJ**) sécantes, alors (**IJ**) et (Δ) sécantes en point **X**.

(Δ) étant contenue dans (**BCD**), alors **X** $\in$ (**BCD**).

La droite (**IJ**) n'est pas contenue dans (**BCD**), alors (**IJ**) et (**BCD**) sont sécants.

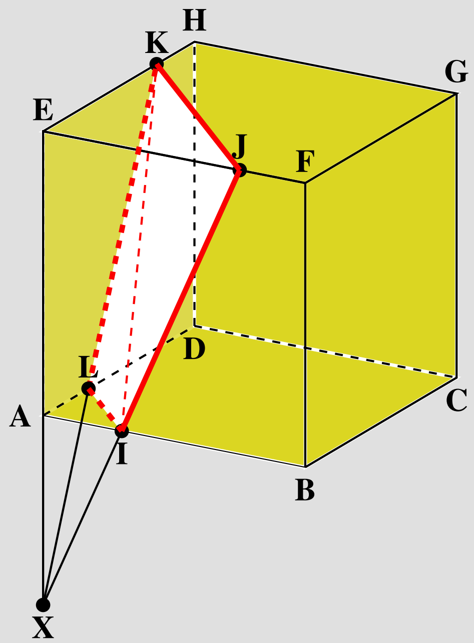
4.5 Le point d'intersection de la droite (**IJ**) avec le plan (**BCD**) est le point d'intersection de (Δ) avec (**IJ**).

⑤ Section d'un cube par un plan



Ci-contre **ABCDEFGH** est un cube. **I**, **J** et **K** appartiennent respectivement aux segments [**AB**], [**EF**] et [**EH**]. On note que (**IJ**) et (**BF**) ne sont pas parallèles, n'est pas milieu de [**AE**], (**JK**) et (**HG**) ne sont pas parallèles. Construire la section du cube ci-contre par le plan (**IJK**).

Solution



Pour construire la section du cube par le plan (**IJK**), on va devoir déterminer les intersections de (**IJK**) avec chaque arête du cube.

Le segment [**IJ**] est l'intersection de (**IJK**) avec la face **ABFE**. Le segment [**JK**] est l'intersection de (**IJK**) avec la face **EFGH**. Les droites (**AE**) et (**IJ**) sont coplanaires et sécantes en un point **X**. Les droites (**AD**) et (**KX**) sont coplanaires et sécantes en un point **L**, et **L** est un point de [**AD**]. Ainsi [**LK**] est l'intersection de (**IJK**) avec la face **ADHE**. La section du cube par le plan (**IJK**) est le quadrilatère **IJKL**.

Methode

- Pour déterminer la section d'un polyèdre qui est un pavé ou un tétraèdre par un plan , on détermine les intersections du plan avec chacune des faces du polyèdre. Ceci en utilisant si possible :

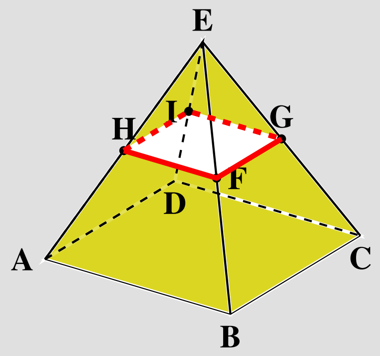
➨ La propriété sur un plan sécant à deux plans parallèles.

➨ Le théorème du toît

- La section d'un polyèdre par un plan est généralement un polygone.

Devoirs

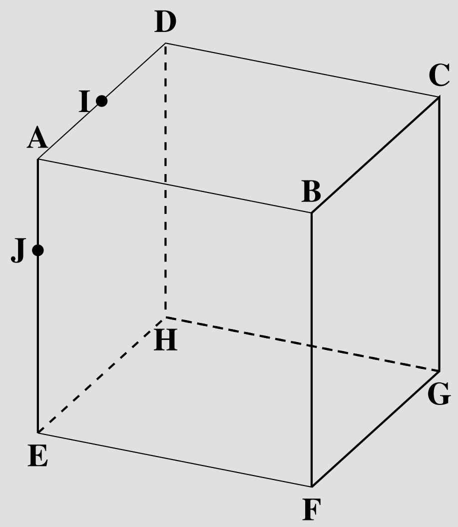
1 **ABCDE** est une pyramide régulière ayant pour base le carré **ABCD** et de sommet **E**. Les points **G**, **F**, **H** et **I** sont les milieux respectifs de [**EC**], [**EB**], [**EA**], [**ED**].



1. Démontrer que (**GF**) est parallèle à (**AD**).
2. Montrer que les points **G**, **F**, **H** et **I** sont coplanaires.
3. Montrer que les plans (**HFG**) et (**ABC**) sont parallèles.

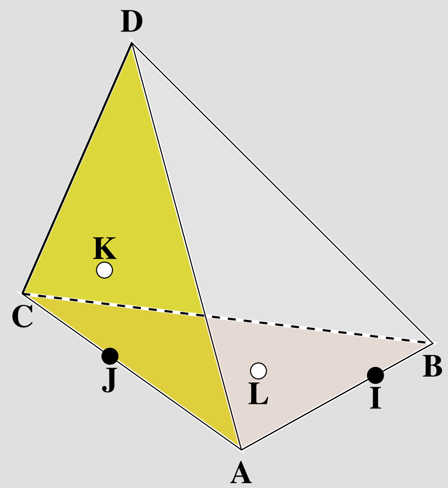
2 Ci-contre **ABCDEFGH** est un cube, **I** est le milieu de [**AD**] et **J** le point de [**AE**] tel que **AJ** $= \dfrac{1}{3}$ **AE**.

1. Déterminer les intersections des plans suivants :
   (a) (**ABC**) et (**CFG**).
   (b) (**BDF**) et (**EHG**).
   (c) (**ABF**) et (**CHG**).
2. Expliquer pourquoi la droite (**BD**) est parallèle au plan (**EFG**), puis pourquoi la droite (**AC**) est aussi parallèle au plan (**EFG**).
3. Peut-on dire que deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles ?
4. (a) Quelles sont les intersections du plan (**FIJ**) avec les faces **ABFE** et **ADHE** ?
   (b) Que peut-on dire de l'intersection de (**FIJ**) avec la face **BFGC** ?
   (c) Tracer la droite (**FK**) qui est l'intersection de (**FIJ**) avec la face (**BFGC**), **K** étant un point de [**CG**].
   (d) Tracer la droite (**KL**) intersection de (**FIJ**) avec la face **DCGH**, **L** étant un point de [**DC**]
   (e) Terminer la construction de la section du cube par le plan (**FIJ**).



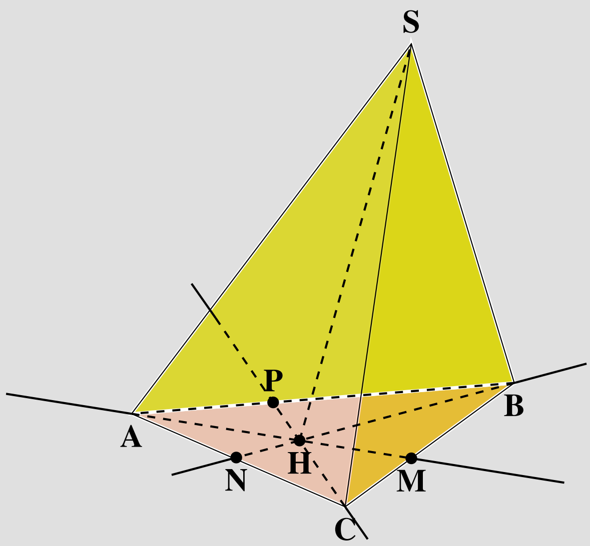
3 Ci-contre **ABCD** est un tétraèdre, **I** est un point de [AB], et **J** est un point de [**AC**], **K** est un point de la face **ACD**, **L** est un point de la face **ABC**.

1. Prouver que la droite (**IJ**) et le plan (**BCD**) sont sécants en un point qu'on notera **E**.
   Construire le point **E** en justifiant.
2. La droite (**IK**) coupe le plan (**BCD**) en un point **F**.
   Construire le point **F** en justifiant.
3. La droite (**LK**) coupe le plan (**BCD**) en un point **G**.
   Construire le point **G** en justifiant.

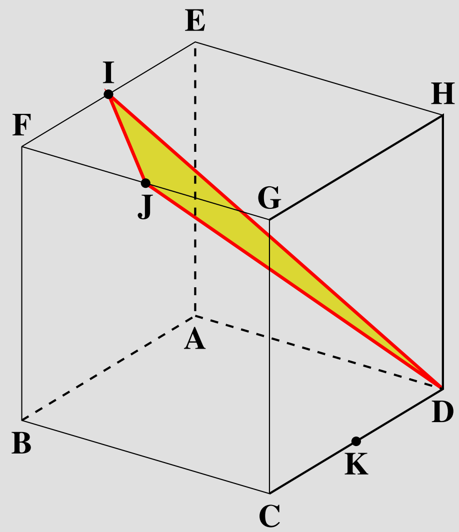


4 Ci-contre, on dispose d'un tétraèdre **SABC**, on note [**AM**],[**BN**] et [**CP**] les trois hauteurs du triangle **ABC**, et **H** est l'orthocentre de **ABC**.

1. Démontrer que les plans (**SAM**) (**SBN**) et (**SCP**) ont une droite en commun.
2. Construire la section du tétraèdre **SABC** par le plan (Γ) passant par **P**, et parallèle à (**BCS**).



5 **ABCDEFGH** est un cube. Les points **I**, **J** et **K** sont les milieux respectifs des segments [**EF**], [**FG**] et [**DC**]. Construire la section du cube par le plan (**IJD**).



Leçon 2 : Orthogonalité dans l'espace

Capacités visées :

➠ Montrer que deux droites de l'espace sont orthogonales.

➠ Montrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

➠ Etablir que deux plans sont perpendiculaires.

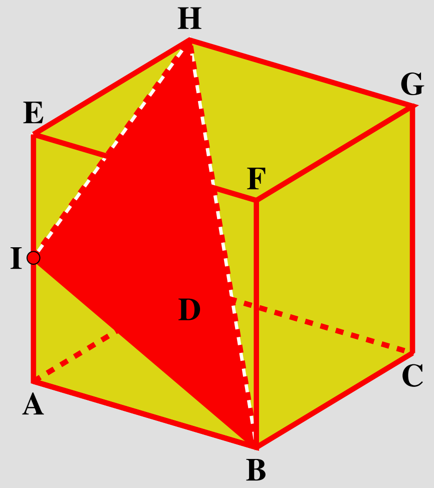
Contrôle de pré-réquis

Soient ABCD un carré de centre I, J et K les milieux respectifs des segments [AD] et [DJ]. EFGH est un quadrilatère convexe tel que EF = GH et (EF)// (GH).

1. Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ?
2. Que peut-on dire des droites (JK) et (BD) ?
3. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?

Situation Problème

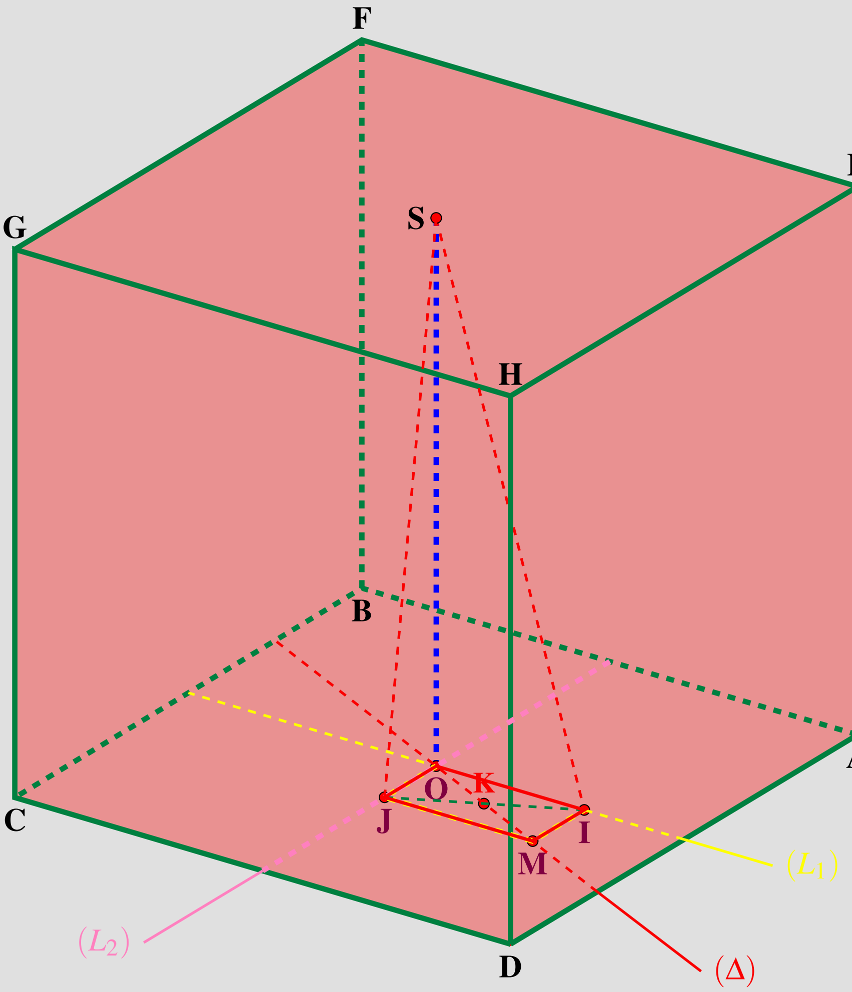
Ci-contre, **ABCDEFGH** est une pièce en forme de cube telle que **HB** = 9 m. **I** désigne le milieu du segment [**AE**]. On place des tiges de fer parfaitement droites et représenteés par les segments [**IB**], [**HB**] et [**IH**]. Les tiges de fer [**IB**] et [**IH**] sont-elles perpendiculaires ? Quelle est la longueur totale de fer utilisée ?



Activités d'apprentissage

ABCDEFGH est un cube, les points **O** et **S** sont les centres des faces **ABCD** et **EFGH**. (Δ), (L_1) et (L_2) sont trois droites contenues dans (**ABC**) et passant par **O**, telles que $(L_1)//$(**AB**) et $(L_2)//$(**AD**). **M** est un point de (Δ), **I** et **J** sont les points respectifs des droites (L_1) et (L_2) tels que **OIMJ** soit un parallélogramme. K désigne le milieu de [OM].

1. (a) Trouver une droite (D_1) passant par A et parallèle à (**EH**).
   (b) Trouver une droite (D_2) passant par A et parallèle à (**DC**).
   (c) Que peut-on dire des droites (D_1) et (D_2) ?
   (d) Que dire des directions des droites (**EH**) et et (**DC**) ?
2. (a) Etablir que (**OS**) // (**BF**).
   (b) En déduire que (**SO**) est orthogonale à chacune des droites (**AB**) et **AD**.



3 En appliquant le théorème de la médiane, exprimer :

(a) $\mathbf{OK}^2$ en fonction de $\mathbf{OJ}^2$, $\mathbf{OI}^2$, et $\mathbf{IJ}^2$.

(b) $\mathbf{SK}^2$ en fonction de SJ^2, $\mathbf{SI}^2$, et $\mathbf{IJ}^2$.

4 (a) Donner la nature de chacun des triangles SOI et SOJ.

(b) Exprimer $2\mathbf{OS}^2$ en fonction de $\mathbf{SJ}^2$, $\mathbf{SI}^2$, $\mathbf{OI}^2$ et $\mathbf{OJ}^2$.

(c) Montrer que **SOK** est un triangle rectangle en O.

(d) En déduire que (**SO**) et (Δ) sont perpendiculaires.

Solution de l'activité

1 (a) Une droite (D_1) passant par A et parallèle à (**EH**) est (**AD**).

(b) Une droite (D_2) passant par A et parallèle à (**DC**) est (**AB**).

(c) Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.

(d) Les directions des droites (**EH**) et (**DC**) sont orthogonales.

Commentaire : On dit que les droites (**EH**) et (**DC**) sont orthogonales.

2 (a) Etablir que (**OS**) // (**BF**).

$(\mathbf{BF}) /\!/ (\mathbf{DH})$ et $(\mathbf{BF}) = (\mathbf{DH})$, alors **DHFM** est un parallélogramme.

Ainsi $(\mathbf{FH}) /\!/ (\mathbf{BD})$. Comme $\mathbf{O} \in (\mathbf{BD})$ et $\mathbf{S} \in (\mathbf{FH})$ et , alors $(\mathbf{FS}) /\!/ (\mathbf{BO})$.

$\mathbf{FS} = \mathbf{BO}$, alors **FSOB** est un parallélogramme. D'où $(\mathbf{BF} /\!/ (\mathbf{OS})$.

(b) Démontrons que $(\mathbf{SO})$ est orthogonale à chacune des droites $(\mathbf{DB})$ et $(\mathbf{AC})$.

La droite $(\mathbf{BF}$ est orthogonale à $(\mathbf{AB})$ et à $(\mathbf{AD})$.

$(\mathbf{BF} /\!/ (\mathbf{OS})$, alors $(\mathbf{SO})$ est orthogonale à chacune des droites $(\mathbf{DB})$ et $(\mathbf{AC})$.

Commentaire : On dit que la droite **SO** est perpendiculaire au plan **ABD** car $(\mathbf{SO})$ est orthogonale à deus droites sécantes du plan $(\mathbf{ABD})$.

3 (a) **OK** est la longueur de la médiane du triangle **OJK** issue de **O**.

$\mathbf{OK}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{OI}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{OJ}^2 - \frac{1}{4}\mathbf{IJ}^2.$

(b) **SK** est la longueur de la médiane du triangle **SJK** issue de **S**.

$\mathbf{SK}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{SI}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{SJ}^2 - \frac{1}{4}\mathbf{IJ}^2.$

4 (a) Nature de chacun des triangles **SOI** et **SOJ**.

$(\mathbf{SO})$ et $(\mathbf{AB})$ sont orthogonales, $(\mathbf{AB}) /\!/ (L_1)$, alors $(\mathbf{SO})$ et (L_1) sont orthogonales.

De plus $(\mathbf{SO})$ et (L_1) sont sécantes en O, alors $(\mathbf{SO})$ et (L_1) perpendiculaires.

La droite (L_1) étant confondue à $(\mathbf{OI})$, alors $(\mathbf{SOI})$ est un triangle rectangle en O.

$(\mathbf{SO})$ et $(\mathbf{AD})$ sont orthogonales, $(\mathbf{AD}) /\!/ (L_2)$, alors $(\mathbf{SO})$ et (L_2) sont orthogonales.

De plus $(\mathbf{SO})$ et (L_2) sont sécantes en O, alors $(\mathbf{SO})$ et (L_2) perpendiculaires.

(L_2) étant confondue à $(\mathbf{OJ})$, alors $(\mathbf{SOJ})$ est un triangle rectangle en O.

(b) Exprimons $2\mathbf{OS}^2$ en fonction de $\mathbf{SJ}^2$, $\mathbf{SI}^2$, $\mathbf{OI}^2$ et $\mathbf{OJ}^2$.

Les triangles **SOI** et **SOJ** sont des triangles rectangles en O.

On a : $\mathbf{SI}^2 = \mathbf{SO}^2 + \mathbf{OI}^2$ et $\mathbf{SJ}^2 = \mathbf{SO}^2 + \mathbf{IJ}^2$. Ainsi $\mathbf{SI}^2 + \mathbf{SJ}^2 - \mathbf{OI}^2 - \mathbf{OJ}^2 = 2\mathbf{SO}^2$.

(c) Montrons que **SOK** est un triangle rectangle en O.

$$\begin{cases} \mathbf{OK}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{OI}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{OJ}^2 - \frac{1}{4}\mathbf{IJ}^2 \\ \mathbf{SO}^2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{SI}^2 + \mathbf{SJ}^2 - \mathbf{OI}^2 - \mathbf{OJ}^2\right) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{SO}^2 + \mathbf{OK}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{SI}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{SJ}^2 - \frac{1}{4}\mathbf{IJ}^2.$$

On obtient alors $\mathbf{SO}^2 + \mathbf{OK}^2 = \mathbf{SK}^2$. D'où **SOK** triangle rectangle en **O**.

(d) Déduisons en que (SO) et (Δ) sont perpendiculaires.

SOK triangle rectangle en **O** alors $(\mathbf{OK})$ et $(\mathbf{SO})$ sont perpendiculaires.

(Δ) et $(\mathbf{OK})$ sont confondues. Donc $(\mathbf{SO})$ et (Δ) sont perpendiculaires.

Résumé

1. Droites orthogonales

On note l'espace par (ε).

Définition

Soient (D_1) et (D_2) des droites de (ε).

• (D_1) et (D_2) sont orthognales lorsque les parallèles à (D_1) et (D_2) en un point A de (ε) sont perpendiculaires.

• (D_1) et (D_2) sont orthognales lorsque (D_1) est perpendiculaire à une droite parallèle à (D_2).

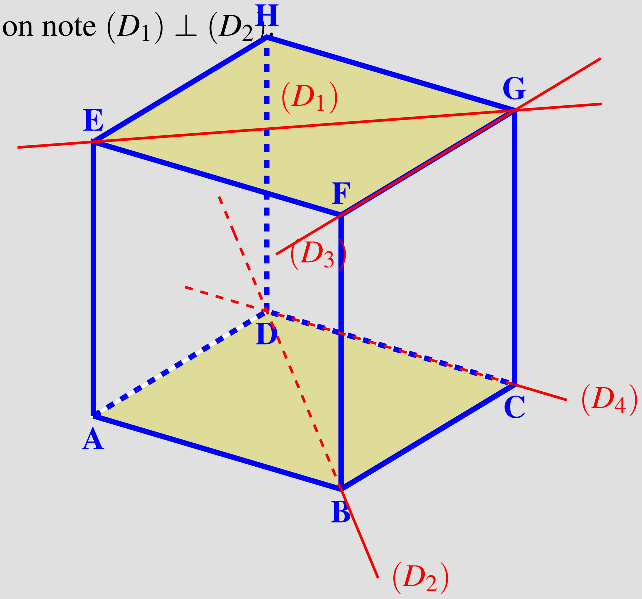
• Lorsque (D_1) et (D_2) sont orthognales, on note $(D_1) \perp (D_2)$.

Exemple

Ci-contre ABCDEFGH est un cube.

• (D_2) est parallèle à (**FH**), et (**FH**) et (D_1) sont perpendiculaires. Donc (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

• La parallèle à (D_3) passant par **B** est la droite (**BC**). La parallèle à (D_4) passant par **B** est (**AB**). Comme (**AB**) et (**BC**) sont perpendiculaires, alors (D_1) et (D_2) sont orthogonales.



Remarques

Dans l'espace,

➦ Deux droites orthogonales et sécantes sont perpendiculaires.

➦ Deux droites orthogonales ne sont pas forcement perpendiculaires.
Par exemple ci-dessus, (D_1) et (D_2) sont orthogonales, sans être perpendiculaires vu qu'elles ne sont pas coplanaires.

➦ Deux droites orthogonales à une même droites ne sont pas forcement parallèles. Par exemple ci-dessus (HG) est orthogonale à (HD), et (BC) est orthogonale à (HD), mais (HG) et (BC) ne sont pas parallèles.

➦ Si (d_1), (d_2) et (Δ) sont des droites telles que $(d_1) \mathbin{/\!/} (\Delta)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$, alors $(d_1) \perp (d_2)$,

2. Droites et plans perpendiculaires

Définition

Soient (d) une droite, et (P) un plan de (ε).

• (d) et (P) sont perpendiculaires lorsque (d) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).

N.B : Lorsque (d) et (P) sont perpendiculaires, (d) et (P) sont sécantes.
La notation $(d) \perp (P)$ symbolise que (d) est perpendiculaire au plan (P).

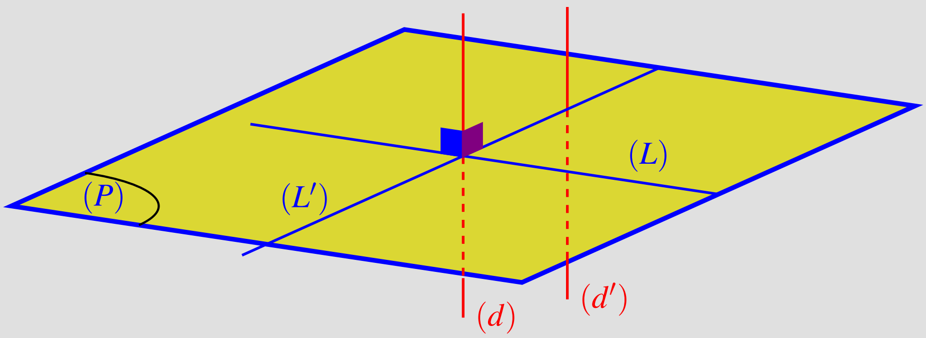
Illustration

Hypothèses :

(L) et (L') sont deux droites sécantes contenues dans plan (P).

$(d) \perp (L)$ et $(d) \perp (L')$.

Conclusion : $(d) \perp (P)$.



N.B : La droite (d') est parallèle à (d). Donc $(d') \perp (P)$.

Propriétés

Soient (d), (d') des droites de (ε), (P) et (P') deux plans de (ε).

- Si $(d) \perp (P)$, alors (d) est orthogonale à toute droite contenue dans (P).
- Si $(d) \mathbin{/\!/} (d')$ et $(d) \perp (P)$, alors $(d') \perp (P)$.
- Si $(P) \mathbin{/\!/} (P')$ et $(d) \perp (P)$, alors $(d) \perp (P')$.
- Si $(d) \perp (P)$ et $(d') \perp (P)$, alors $(d) \mathbin{/\!/} (d')$.
- Par un point A de (ε), passe une unique droite (Δ) perpendiculaire à (P).
- Par un point A de (d), passe un unique plan (Γ) perpendiculaire à (d).
- Si $(d) \perp (P)$ et $(d) \perp (P')$, alors $(P) \mathbin{/\!/} (P')$ ou $(P) = (P')$.

3. Plan médiateur d'un segment

Définition

Soit A et B deux points distincts de (ε). Le **plan médiateur** de [AB] est le plan passant par le milieu de [AB], et perpendiculaire à (AB).

Propriété

Posons $(\Gamma) = \{\mathrm{M} \in (P) / \ \mathrm{MA} = \mathrm{MB}\}$

Soient A et B deux points distincts de (ε), et (P) le plan médiateur de [AB].

(P) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.

Preuve :

• Soit M $\in (P)$, et I le milieu de [AB].

Si M = I, on a : MA = MB.

Si M $\neq$ I, on a : (MI) $\perp$ (AB) car (MI) $\subseteq (P)$ et (AB) $\perp (P)$. Ainsi (MI) est une médiatrice. D'où MA = MB et par conséquent

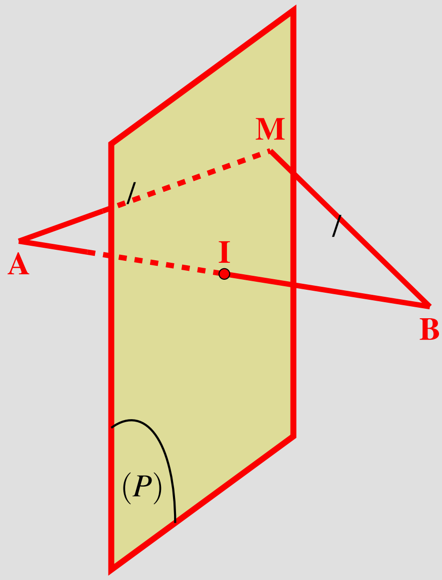
$(P) \subseteq (\Gamma)$.

• Soit M $\in (\Gamma)$, et I le milieu de [AB].

Si M = I, M $\in (P)$.

Si M $\neq$ I, MAB est un triangle isocèle en M car MA = MB. Ainsi (MI) est une médiatrice de [AB], et (MI) $\perp$ (AB). D'où M $\in (P)$, et $(P) \subseteq (\Gamma)$.

$(P) \subseteq (\Gamma)$ et $(\Gamma) \subseteq (P)$, alors $(P) = (\Gamma)$



4. Projection orthogonale sur un plan

Soit (P) un plan, et A un point de (ε).

Si A $\in (P)$, alors A est le projeté orthogonal de A sur (P).

Si A $\notin (P)$, alors le projeté orthogonal de A sur (P) est le point d'intersection de (P), avec la droite perpendiculaire à (P) et passant par A.

5. Plans perpendiculaires

Définition

Deux plans sont perpendiculaires ou orthogonaux, lorsque l'un deux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Si (P) et (P') sont deux plans orthogonaux, on note $(P) \perp (P')$.

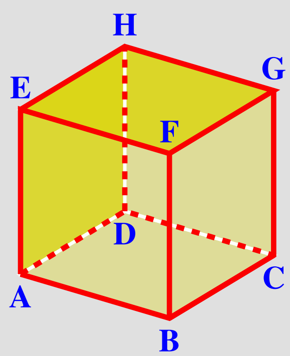
NB : Deux plans orthogonaux sont sécants.

Exemple

Ci-contre ABCDEFGH est un cube.

• (EFG) $\perp$ (ADH) car la droite (AE) $\subseteq$ (ADH), et (AE) $\perp$ (EFG).

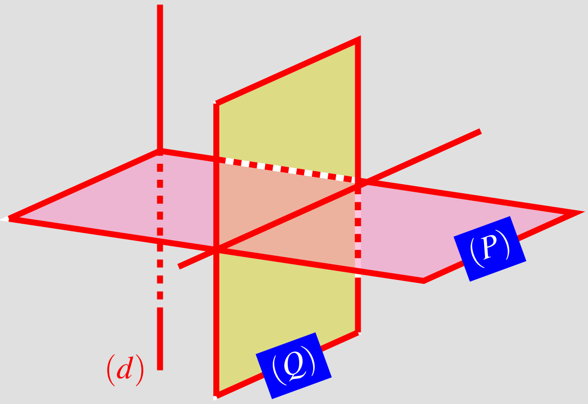
• (DCH)$\perp$ (ABC) car (DH) $\subseteq$ (DCH), et (DH) $\perp$ (ABC).



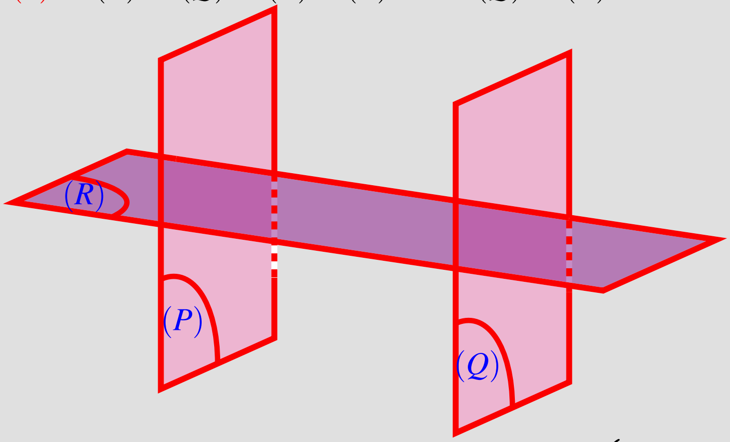
Propriétés

Soient (P), (Q) et (R) des plans, et (d) une droite de (ε).

(1) Si $(d) \perp (P)$ et $(d) \mathbin{/\!/} (Q)$, alors $(P) \perp (Q)$.



$\color{red}{(2)}$ Si $(P) \perp (Q)$ et $(P) /\!/ (R)$, alors $(Q) \perp (R)$.



(3) En supposant que $(P) \cap (Q) = (d)$, on a : $\begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (Q) \end{cases} \Leftrightarrow (d) \perp (R)$.

Preuve

(1) $(d) /\!/ (Q)$, alors $(d) \subseteq (Q)$ ou $(d) /\!/ (d')$ avec $(d') \subseteq (Q)$.
Si $(d) \subseteq (Q)$, alors $(P) \perp (Q)$ car $(d) \perp (P)$.
Si $(d) /\!/ (d')$,comme $(d) \perp (P)$, alors $(d') \perp (P)$. D'où $(P) \perp (Q)$.

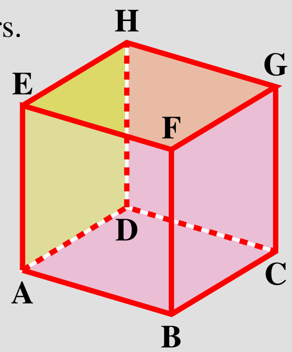
‘

(2) $(P) \perp (Q)$, alors il existe une droite (l) telle que $(l) \subseteq (P)$ et $(l) \perp (Q)$.
$(P) /\!/ (R)$, alors $(l) /\!/ (R)$. $(l) \perp (Q)$ et $(l) /\!/ (R)$, alors d'après (1), $(Q) \perp (R)$

La preuve de (3) sera faite ultérieurement avec l'usage des vecteurs.

Remarque :

Si deux plans sont perpendiculaires à un même plan, ils ne sont pas forcément parallèles.
En effet, si on considère un cube ABCDEFGH, les plans (ABC) et (DCG) sont perpendiculaires au plan (BCG), mais les plans (ABC) et (DCG) ne sont pas parallèles.

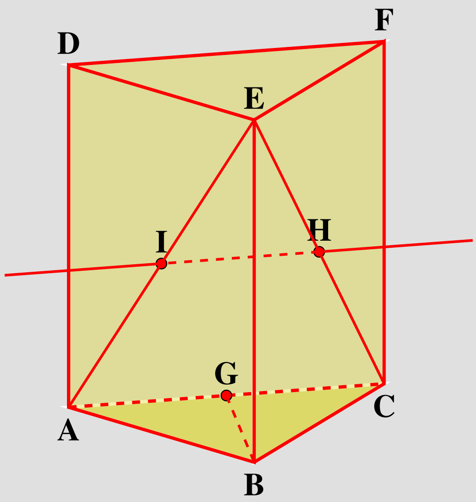


Exercices d'application

➊

Enoncé : Ci-contre ABCDEF est un prisme droit où les faces ABC et DEF sont des triangles osocèles de sommets principaux respectifs B et E. Les points H, I et G sont les milieux respectifs des segents [EC],[EA] et [AC].

Démontrer que (HI) est orthogonale à (BG).



Solution : ABC est un triangle isocèle en B, et G est le milieu de [AC], alors $(BG) \perp (AC)$.

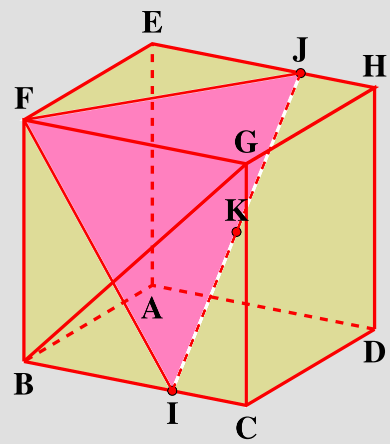
H et I sont les milieux respectifs des segents [EC] et [EA], alors selon la propriété des droites des milieux dans un triangle, on a $(IH) \mathbin{/\mkern-4mu/} (AC)$.

$(BG) \perp (AC)$ et $(IH) \mathbin{/\mkern-4mu/} (AC)$, alors (HI) est orthogonale à (BG).

➋

Enoncé :

Dans lespace, on considère le cube **ABCDEFGH** darête 1, représenté ci-dessous. Les points **I** et **J** sont appartiennent respectivement aux segments [BC] et [EH], et sont tels que : $\mathbf{BI} = \frac{2}{3}\mathbf{BC}$ et $\mathbf{EJ} = \frac{2}{3}\mathbf{EH}$ Le point **K** est le milieu du segment [**IJ**]. On veut donner un programme de construction du point **P**, projeté orthogonal de **G** sur le plan (**FIJ**).



1) Démontrer que (**FGK**) est le plan médiateur du segment [**IJ**].
2) En déduire que (**IJ**) est orthogonale à (**FGK**).
3) Démontrer que (**IJ**) est orthogonale à (**FGP**).
4) Démontrer que $\mathbf{P} \in (\mathbf{FGK})$, et en déduire que **F**, **P** et **K** sont alignés.

Solution :

1) Démontrons que (**FGK**) est le plan médiateur du segment [**IJ**].
$\mathbf{KI} = \mathbf{KG}$, $\mathbf{FJ} = \sqrt{\mathbf{FE}^2 + \mathbf{EJ}^2} = \sqrt{\mathbf{BF}^2 + \mathbf{BI}^2} = \mathbf{FI}$,
$\mathbf{GJ} = \sqrt{\mathbf{HG}^2 + \mathbf{HJ}^2} = \sqrt{\mathbf{CG}^2 + \mathbf{CI}^2} = \mathbf{GI}$
$\mathbf{KI} = \mathbf{KG}$, $\mathbf{FJ} = \mathbf{FI}$ et $\mathbf{GJ} = \mathbf{GI}$, alors **F**, **G** et **K** appartiennent au plan médiateur de [**IJ**].
Comme **F**, **G** et **K** ne sont pas alignés, alors (**FGK**) est le plan médiateur de [**IJ**].
2) Déduisons en que (**IJ**) est orthogonale à (**FGK**).
(**KFG**) est le plan médiateur de [**IJ**], alors (**IJ**) est orthogonale à (**FGK**).
3) Démontrons que (**IJ**) est orthogonale à (**FGP**).

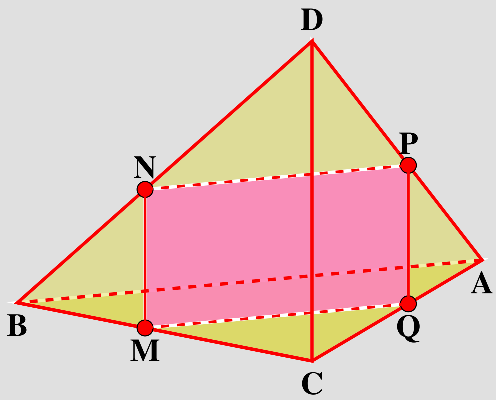
P, projeté orthogonal de **G** sur le plan (**FIJ**) alors (**GP**) est orthogonale au plan (**FIJ**).
(**IJ**) $\subseteq$ (**FIJ**) et (**GP**) $\perp$ (**FIJ**), alors (**GP**) et (**IJ**) sont orthogonales.
(**FG**) $\subseteq$ (**FGK**) et (**IJ**) $\perp$ (**FGK**), alors (**IJ**) et (**FG**) sont orthogonales.
(**IJ**) est orthogonale à deux droites sécantes de (**FGP**), alors (**IJ**) $\perp$ (**FGP**).

4) Démontrons que **P** $\in$ (**FGK**), et déduisons en que **F**, **P** et **K** sont alignés.
(**IJ**) $\perp$ (**FGK**) et (**IJ**) $\perp$ (**FGP**), alors (**FGK**) $=$ (**FGP**) ou (**FGK**) $/\!/$ (**FGP**).
Comme (**FGK**) $\cap$ (**FGP**) $\neq \emptyset$, alors (**FGK**) $=$ (**FGP**) ou (**FGK**). D'où **P** $\in$ (**FGK**).
P est un point commun aux plans **FGK** et **FIJ**.
K $\in$ (**IJ**), et (**IJ**) $\subseteq$ (**FIJ**), alors K $\in$ (**FIJ**).
Ainsi la droite (**FK**) est l'intersection des plans (**FIJ**) et (**FGK**).

D'où **P** $\in$ (**FK**) et par la suite **F**, **P** et **K** alignés.

Note Le point **P** est le point d'intersection de la droite passant par **G** et perpendiculaire à (**FK**) car (GP) $\perp$ (FIJ) et P $\in$ (FK).

③



Enoncé : **ABCD** est un tétraèdre tel que les droites (**AB**) et (**CD**) soient orthogonales, **M** est un point de larête [**BC**]. (P) le plan passant par **M** et parallèle aux droites (**AB**) et (**CD**) coupe [**BD**] en **N** ,[**AD**] en **P** et [AC] en **Q** .

1) a) Montrer que les droites (**MQ**) et (**AB**) sont parallèles.
b) Que peut-on dire des droites (**MN**) et (**CD**) ?
2) Montrer que le triangle **QMN** est rectangle en **M**.
3) Montrer que le quadrilatère **MNPQ** est un rectangle.

Solution :

1) a) Montrons que les droites (**MQ**) et (**AB**) sont parallèles.
Les droites (**MQ**) et (**AB**) sont coplanaires car contenues dans le plan (**ABC**).
Ainsi les droites (**MQ**) et (**AB**) sont sécantes ou parallèles.
(**AB**) $\cap$ $(P) = \emptyset$ car (**AB**) $/\!/$ (P). Comme (**MQ**) $\subseteq$ (P), alors (**MQ**) $\cap$ (**AB**) $= \emptyset$.
D'où (**MQ**) et (**AB**) sont parallèles.

b) Les droites (**MN**) et (**CD**) sont parallèles. En effet,
Les droites (**MN**) et (**CD**) sont coplanaires car contenues dans le plan (**BCD**).
Ainsi les droites (**MN**) et (**CD**) sont sécantes ou parallèles.
(**CD**) $\cap$ $(P) = \emptyset$ car (**CD**) $/\!/$ (P). Comme (**MN**) $\subseteq$ (P), alors (**MN**) $\cap$ (**CD**) $= \emptyset$.
D'où (**MN**) et (**CD**) sont parallèles.

2) Montrons que le triangle **QMN** est rectangle en **M**.
(**MN**) $/\!/$ (**CD**) et (**CD**)$\perp$ (**AB**), alors (**AB**) $\perp$ (**MN**).

Comme $(\mathbf{AB}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{MQ})$, alors $(\mathbf{MQ}) \perp (\mathbf{MN})$. D'où **QMN** est rectangle en **M**.

3) Montrons que le quadrilatère **MNPQ** est un rectangle.

Les droites (**NP**) et (**AB**) sont coplanaires car contenues dans le plan (**ABD**).

Ainsi les droites (**NP**) et (**AB**) sont sécantes ou parallèles.

$(\mathbf{AB}) \cap (P) = \emptyset$ car $(\mathbf{AB}) \mathbin{/\!/} (P)$. Comme $(\mathbf{NP}) \subseteq (P)$, alors $(\mathbf{NP}) \cap (\mathbf{AB}) = \emptyset$.

D'où $(\mathbf{NP}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{AB})$. Comme $(\mathbf{MQ}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{AB})$ alors $(\mathbf{NP}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{MQ})$.

Les droites (**PQ**) et (**CD**) sont coplanaires car contenues dans le plan (**ACD**).

Ainsi les droites (**PQ**) et (**CD**) sont sécantes ou parallèles.

$(\mathbf{CD}) \cap (P) = \emptyset$ car $(\mathbf{CD}) \mathbin{/\!/} (P)$. Comme $(\mathbf{PQ}) \subseteq (P)$, alors $(\mathbf{PQ}) \cap (\mathbf{CD}) = \emptyset$.

D'où $(\mathbf{PQ}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{CD})$. Comme $(\mathbf{MN}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{CD})$ alors $(\mathbf{MN}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{PQ})$.

$(\mathbf{MN}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{PQ})$ et $(\mathbf{NP}) \mathbin{/\!/} (\mathbf{MQ})$, alors MNPQ est un parallélogramme

car quadrilatère ayant ses cotés opposés à support parallèles.

MNPQ est un parallélogramme ayant un angle droit à savoir l'angle $\mathbf{Q\widehat{M}N}$.

D'où **MNPQ** est un rectangle.

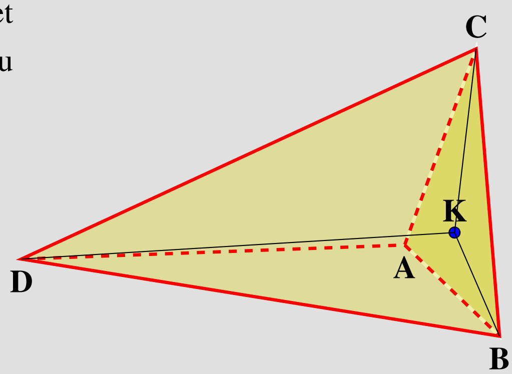
4 Tétraèdre orthocentrique

Enoncé : Soit **ABCD** un tétraèdre tels que $(\mathbf{AB}) \perp (\mathbf{CD})$, et $(\mathbf{BC}) \perp (\mathbf{AD})$. La droite passant par **A** et perpendiculaire au plan (**BCD**) perce ce dernier en un point noté **K**.

1) Démontrer que $(\mathbf{CD}) \perp (\mathbf{ABK})$, et en déduire que (**BK**) est une hauteur du triangle **BCD**.

2) Démontrer que (**DK**) est une hauteur de **BCD**.
Que représente **K** pour le triangle **BCD** ?

3) Démontrer que $(\mathbf{BD}) \perp (\mathbf{ACK})$.
En déduire que $(\mathbf{AC}) \perp (\mathbf{BD})$.



Solution : 1) Démontrons que $(\mathbf{CD}) \perp (\mathbf{ABK})$.

$(\mathbf{CD}) \subseteq (\mathbf{BCD})$ et $(\mathbf{AK}) \perp (\mathbf{BCD})$, alors $(\mathbf{AK}) \perp (\mathbf{CD})$. Comme $(\mathbf{AB}) \perp (\mathbf{CD})$,

alors (**CD**) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (**ABK**). D'où $(\mathbf{CD}) \perp (\mathbf{ABK})$.

Déduisons en que (**BK**) est une hauteur du triangle **BCD**.

$(\mathbf{CD}) \perp (\mathbf{ABK})$, alors comme $(\mathbf{BK}) \subseteq (\mathbf{ABK})$, alors $(\mathbf{CD}) \perp (\mathbf{ABK})$.

Les droites (**CD**) et (**BK**) sont coplanaires, alors elles sont perpendiculaires.

Donc (**BK**) est une hauteur du triangle **BCD**.

2) Démontrons que (**DK**) est une hauteur de **BCD**.

$(\mathbf{BC}) \subseteq (\mathbf{BCD})$ et $(\mathbf{AK}) \perp (\mathbf{BCD})$, alors $(\mathbf{AK}) \perp (\mathbf{BC})$. Comme $(\mathbf{BC}) \perp (\mathbf{AD})$,

alors (**BC**) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (**ADK**). D'où $(\mathbf{BC}) \perp (\mathbf{ADK})$.

Ainsi $(\mathbf{BC}) \perp (\mathbf{DK})$ car $(\mathbf{DK}) \subseteq (\mathbf{ADK})$.

Les droites (**DK**) et (**BC**) sont coplanaires, alors elles sont perpendiculaires.

Donc (**DK**) est une hauteur du triangle **BCD**.

Le point **K** pour l'orthocentre du triangle **BCD**.

3) Démontrons que (**BD**) $\perp$ (**ACK**).

(**BD**) $\subseteq$ (**BCD**) et (**AK**) $\perp$ (**BCD**), alors (**BD**) $\perp$ (**AK**).

(**CK**) est une hauteur de **BCD**, alors (**CK**) $\perp$ (**BD**).

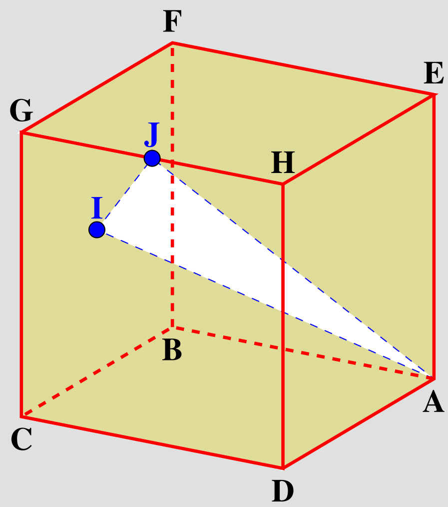
Ainsi (**BD**) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (**ACK**). D'où (**BD**) $\perp$ (**ACK**).

Déduisons en que (**AC**) $\perp$ (**BD**).

(**AC**) $\subseteq$ (**ACK**) et (**BD**) $\perp$ (**ACK**), alors (**BD**) $\perp$ (**AC**).

Note : Un tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales est un tétraèdre orthocentrique.

5



Enoncé : Soit **ABCDEFGH** un cube, **I** le centre du carré **BCGF**, et **J** le milieu du segment [**GH**].

1) Démontrer que la droite (**FC**) est orthogonale au plan (**ABG**), et en déduire que les droites (**BH**) et (**FC**) sont orthogonales.

2) Démontrer que la droite (**BH**) est orthogonale au plan (**ACF**). En déduire que les droites (**BH**) et (**AI**) sont perpendiculaires.

3) Démontrer que **AIJ** est un triangle rectangle en **I**.

Solution :

1) Démontrons que la droite (**FC**) est orthogonale au plan (**ABG**)

(**AB**) $\perp$ (**BC**) et (**AB**) $\perp$ (**BF**), alors (**AB**) $\perp$ (**BCF**) car (**BC**) et (**BF**) sont deux droites sécantes du plan (**BCF**). Comme (FC) $\subseteq$ (**BCF**), alors (**AB**) $\perp$ (**FC**).

(**BG**) $\perp$ (**FC**) car [**FC**] et [**BG**] diagonales du carré **BCFG**.

(**BG**) $\perp$ (**FC**) et (**AB**) $\perp$ (**FC**), alors (**FC**) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (**ABG**). D'où (**FC**) est orthogonale au plan (**ABG**).

Déduisons en que les droites (**BH**) et (**FC**) sont orthogonales.

Les droites (**GH**) et (**BA**) sont parallèles, et ainsi les points A, B, G et H sont coplanaires. Ainsi **H** $\in$ (**ABG**), et (**BH**) $\subseteq$ (**ABG**).

Etant donné que (**FC**) $\perp$ (**ABG**), on a donc : (**BH**) $\perp$ (**FC**).

2) Démontrons que la droite (**BH**) est orthogonale au plan (**ACF**).

(**AC**) $\perp$ (**BD**) car [**AC**] et [**BD**] diagonales du carré **ABCD**.

(**BF**) est orthogonal au plan (**ABC**), et (**AC**) $\subseteq$ (**ABC**), alors (**BF**) $\perp$ (**AC**).

La droite (**AC**) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (**BDF**).

Alors (**AC**) $\perp$ (**BDF**).

Les droites (**BF**) et (**HD**) sont parallèles, alors les points **B**, **H**, **F** et **D** sont coplanaires. Ainsi **H** $\in$ (**BDF**) et (**BH**) $\subseteq$ (**BDF**).

Etant donné que (**AC**) $\perp$ (BDF), on a : (**AC**) $\perp$ (BH).

(**AC**) $\perp$ (BH) et (**FC**) $\perp$ (BH), alors comme (**AC**) et (**FC**) sont deux droites sécantes du plan (ACF), alors (**BH**) $\perp$ (**ACF**).

Déduisons en que les droites (**BH**) et (**AI**) sont perpendiculaires.

I $\in$ (**CF**) et (**CF**) $\subseteq$ (**AFC**), alors **I** $\in$ (**ACF**) et (**AI**) $\subseteq$ (**ACF**).

(**AC**) $\perp$ (**BD**) car [**AC**] et [**BD**] diagonales du carré **ABCD**.

(**BF**) est orthogonal au plan (**ABC**), et (**AC**) $\subseteq$ (**ABC**), alors (**BF**) $\perp$ (**AC**).

La droite (**AC**) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (**BDF**).

Alors (**AC**) $\perp$ (**BDF**).

Les droites (**BF**) et (**HD**) sont parallèles, alors les points **B**, **H**, **F** et **D** sont coplanaires. Ainsi **H** $\in$ (**BDF**) et (**BH**) $\subseteq$ (**BDF**).

Etant donné que (**AC**) $\perp$ (BDF), on a : (**AC**) $\perp$ (BH).

(**AC**) $\perp$ (BH) et (**FC**) $\perp$ (BH), alors comme (**AC**) et (**FC**) sont deux droites sécantes du plan (ACF), alors (**BH**) $\perp$ (**ACF**).

Déduisons en que les droites (**BH**) et (**AI**) sont perpendiculaires.

I $\in$ (**CF**) et (**CF**) $\subseteq$ (**AFC**), alors **I** $\in$ (**ACF**) et (**AI**) $\subseteq$ (**ACF**).

Comme (**BH**) $\perp$ (**ACF**), alors on a : (**BH**) et (**AI**) orthogonales.

Les droites (**GH**) et (**AB**) sont parallèles, alors les points G, H, A et B sont coplanaires, et ainsi H $\in$ (**ABG**). **I** $\in$ (**BG**) et (**BG**) $\in$ (**ABG**), alors I$\in$ (**ABG**).

Ainsi les droites (**BH**) et (**AI**) sont coplanaires. Comme (**BH**) et (**AI**) sont orthogonales, on conclut que (**BH**) et (**AI**) sont perpendiculaires.

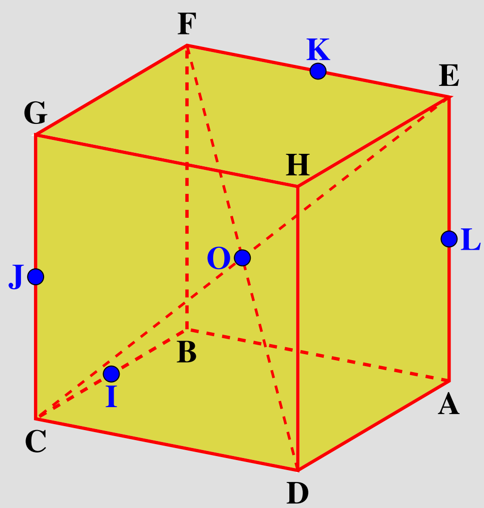
3)Démontrons que **AIJ** est un triangle rectangle en **I**.

I est le milieu de [**BG**] et **J** est le milieu de [**HG**], alors selon la propriété des droites de milieux dans un triangle, (**IJ**) // (**BH**). Comme (BH) $\perp$ (AI), alors (**IJ**) $\perp$ (**AI**).

D'où **AIJ** est un triangle rectangle en **I**.

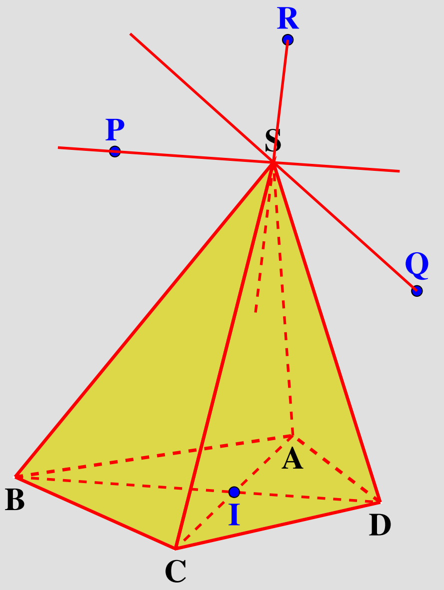
Devoirs

1 **ABCDEFGH** est un cube de centre **O**. On note par **I**, **J**, **K** et **L** les milieux respectifs de [**BC**], [**CG**], (**EF**] et [**AE**].



1) Démontrer que la droite (**OI**) est orthogonale aux droites (**AD**) et (**KL**).
2) Démontrer que la droite (**BG**) est orthogonale au plan (**EFC**).
3) En déduire alors que les droites (**IJ**) et (**EC**) sont orthogonales.
4) Construire le projeté orthogonal du point **L** sur la droite (**BG**).

2 **SABCD** est une pyramide de sommet **S**. Les points **P**, **Q** et **R** sont tels que les droites (**SP**), (**SQ**) et (**SR**) soient respectivement orthogonales aux plans (**ASC**), (**BSD**) et (**PSQ**). On désigne par point **I** le point d'intersection des des droites (**AC**) et (**BD**).



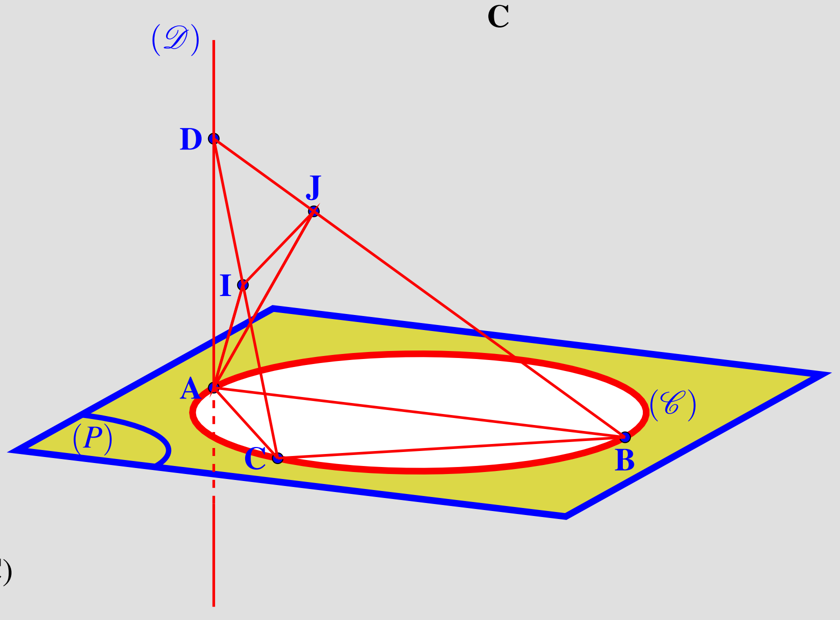
1) (a) Démontrer que la droite (**SI**) est orthogonale aux droites (**SP**) et (**SQ**).

(b) En déduire que la droite (**SI**) est orthogonale au plan (**PSQ**).

2) (a) Démontrer que les droites (**SI**) et (**SR**) sont confondues.

(b) En déduire que les points **S**, **I** et **R** sont alignés.

3 Soit (P) un plan, **A** et **B** deux points distincts de (P), $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [**AB**] contenu dans le plan (P). **C** est un autre point de $(\mathscr{C})$ distinct de **A** et **B**. $(\mathscr{D})$ est la droite orthogonale à (P) en **A**. **D** est un point de $(\mathscr{D})$ distinct de **A**. Dans le plan (**ADC**), **I** est le projeté orthogonal de **A** sur (**DC**). Dans le plan (**ADB**), **J** est le projeté orthogonal de **A** sur (**DB**).



1) Démontrer que les droites (**CD**) et (**BC**) sont perpendiculaires.

2) Démontrer que les plans (**DAC**) et (**BDC**) sont perpendiculaires.

3) (a) Démontrer que la droite (**AI**) est orthogonale au plan (**BCD**).

(b) Démontrer que **AIJ** est un triangle rectangle.

(c) En déduire que les points **B**, **C**, **I** et **J** sont cocycliques.

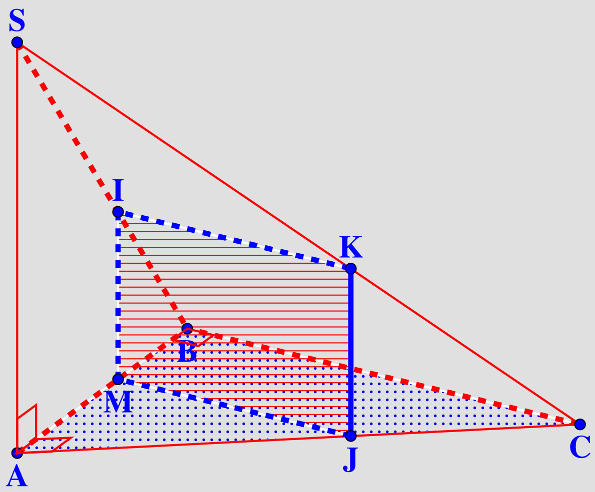
4 **ABCD** désigne un tétraèdre régulier, **I** et **J** les milieux respectifs des segments [**AB**] et [**CD**].

1) Démontrer que les plans (**ICD**) et (**JAB**) sont perpendiculaires.

2) Démontrer que le plan (**ICD**) est perpendiculaire aux plans (**ABC**) et (**ABD**).

3) Démontrer que le plan (**JAB**) est perpendiculaire aux plans (**ACD**) et (**BCD**).

5 Sur la figure ci-contre, **SABC** est un tétraèdre. La droite (**SA**) est orthogonale au plan (**ABC**) et le triangle **ABC** est rectangle en **B**. M est un point du segment [**AB**] différent de **A** et **B**.



1) Justifier que (**SA**) et (**BC**) sont orthogonales.

2) (P) désigne le plan passant par **M** et perpendiculaire à la

droite (**AB**) coupe les segments [**SB**], [**SC**] et [**AC**] en **I**, **K** et **J** respectivement.

a) Montrer que la droite (**IM**) est parallèle au plan (**SAC**) et en déduire que (**IM**) // (**KJ**).
(**On pourra raisonner par labsurde**)

b) Montrer que (**MJ**) // (**BC**) puis que (**MJ**) // (**IK**).

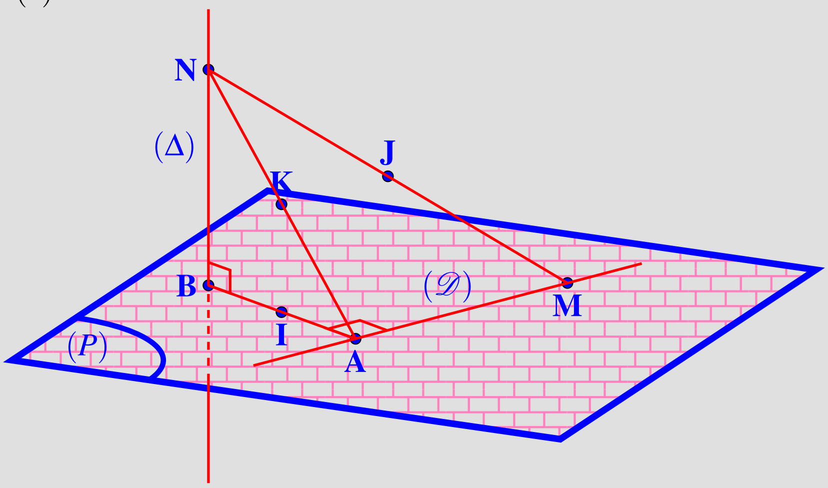
c) Justifier que **IKJM** est un rectangle.

3) On donne **AB** $= 3$, **SA** $=$ **BC** $= 4$, on pose **AM** $= x$, et $S(x)$ désigne laire du rectangle **IKJM**.

a) Exprimer $S(x)$ en fonction de x.

b) Donner la position de **M** pour que $S(x)$ soit maximale.

6 Soit (P) un plan, **A** et **B** deux points de (P) tels que **AB** $= 1$. On désigne par **I** le milieu de [**AB**], et $(\mathscr{D})$ la droite de (P) passant par **A** et perpendiculaire à la droite (**AB**), (Δ) la droite orthogonale à (P) en **B**. Pour tout point **M** de $(\mathscr{D})$ et tout point **N** de (Δ) on désigne par **J** le milieu de [**MN**]. On pose **AM** $= a$ et **BN** $= b$.



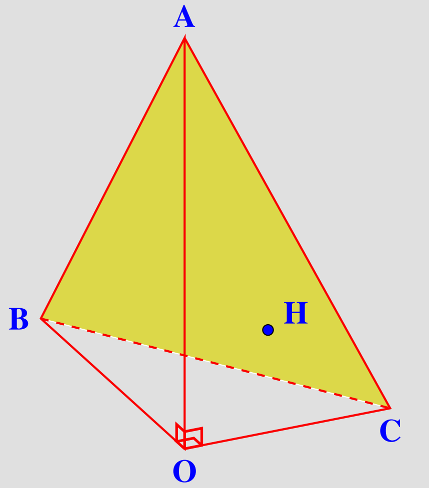
1) Calculer (**MN**) en fonction de a et b.

2) Soit **K** le milieu de [**AN**]. Démontrer que **IKJ** est rectangle en **K**.

3) Calculer **IJ** en fonction de a et b.

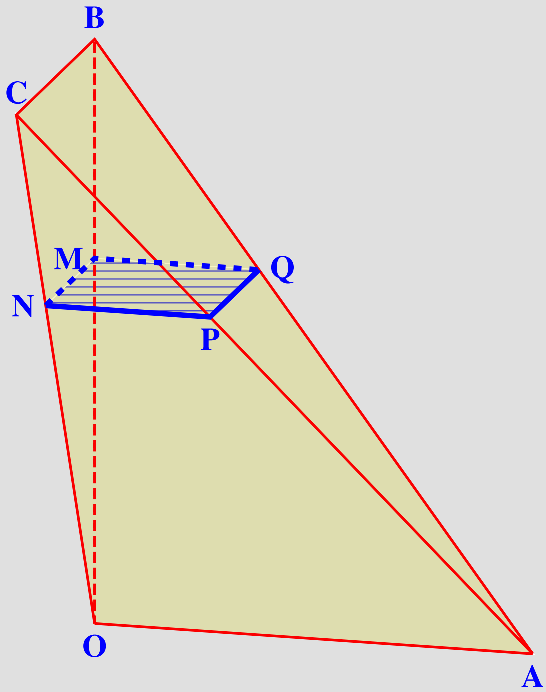
4) On fait varier **M** sur $(\mathscr{D})$, et **N** sur (Δ) de telle sorte que **MN** $= 2$.
La distance **IJ** reste-t-elle constante ?

7 Ci-contre **OABC** est un tétraèdre trirectangle en **O**
c'est à dire les triangles **OAB**, **OAC** et **OBC** sont rectangles en **O**. Le point **H** est le projeté orthogonal du point **O** sur le plan (**ABC**).



1) Montrer que **H** est lorthocentre du triangle **ABC**.
2) Prouver que $\dfrac{1}{\mathbf{OH}^2} = \dfrac{1}{\mathbf{OA}^2} + \dfrac{1}{\mathbf{OB}^2} + \dfrac{1}{\mathbf{OC}^2}$.
3) Exprimer l'aire de **ABC** en fonction de **OA**, **OB** et **OC**.
4) Vérifier que le carré de laire de la face **ABC** est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre **OABC**.

8 **AOBC** est un tétraèdre tel que $\mathbf{OB} = 8$, $\mathbf{OA} = 6$ et $\mathbf{BC} = 4$. Les droites (**OB**) et (**OA**) sont perpendiculaires, et la droite (**OA**) est orthogonale au plan (**OBC**).



1) Montrer que : $(\mathbf{BC}) \perp (\mathbf{BA})$, $(\mathbf{CO}) \perp (\mathbf{OA})$ et $(\mathbf{CO}) \perp (\mathbf{OA})$.
2) Montrer que (**BC**) est orthogonale au plan (**OAB**).
3) Déterminer le volume du tétraèdre **OABC**.
4) Montrer que les quatre points **O**, **A**, **B** et **C** sont équidistants d'un point que l'on précisera.
5) A tout réel α de lintervalle $]0;8[$ on associe le point **M** du segment [**OB**] tel que $\mathbf{OM} = \alpha$. Le plan contenant **M** et orthogonal à la droite (**OB**) rencontre (**OC**), (**AC**) et (**AB**) respectivement en **N**, **P** et **Q**.
   a) Déterminer la nature du quadrilatère **MNPQ**.
   b) La droite (**PM**) est-elle orthogonale à la droite (**OB**) ?
   c) Pour quelle valeur de α, la droite (**PM**) est-elle orthogonale à la droite (**AC**) ?
   d) Déterminer $\mathbf{MP}^2$ en fonction de α.
   e) Pour quelle valeur de α, **PM** est-elle minimale ?

Module 24 : Géométrie dans l'espace
Chapitre : Géométrie analytique dans l'espace

Leçon 1 : Vecteurs de l'espace

Compétences attendues :

➠ Montrer que trois vecteurs de l'espace sont coplanaires ou pas.

➠ Donner une caractérisation vectorielle d'une droite ou d'un plan.

➠ Maitriser la notion de vecteur normal à un plan.

Contrôle de pre-réquis

① Qu'appelle t-on base de vecteurs d'un plan ?

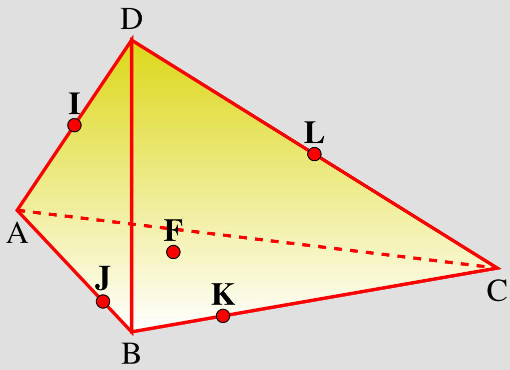
② Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un plan tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.
Calculer $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} - 2\vec{v})^2$.

Situation Problème

Ali a dessiné le tétraèdre ABCD ci-contre à l'aide d'un logiciel de géométrie. Il a marqué les points I et L milieux respectifs de [AD] et [CD], les points J et K tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, puis le point F barycentre des points pondérés $(L, 1)$ et $(J, 2)$.

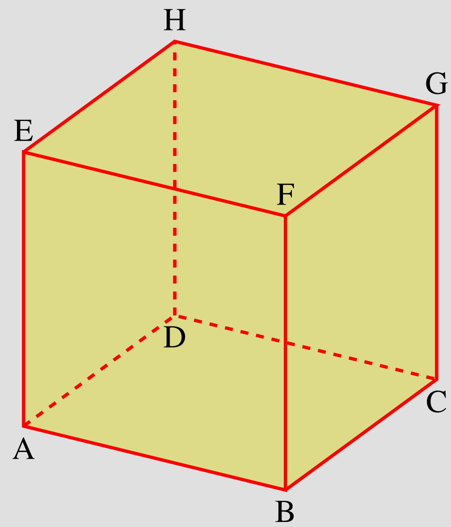
• Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

• F est-il un point de [IK] ?



Activités d'apprentissage

Ci-contre ABCDEFGH est cube. On pose AB $= x$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$.



Activité 1

On désigne par P et Q les points tels que : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EC}$.

1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EH}$.

b) Expliquer pourquoi $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

c) Construire les points P et Q.

2) a) Expliquer pourquoi $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{CQ}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère HPQC ?

3) Citer deux couples de vecteurs orthogonaux.

4) a) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

c) Exprimer en fonction de x, le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.

d) En déduire en degrés, une mesure de l'angle $\widehat{CAH}$.

Activité 2

On désigne par (P) le plan passant par A, B et E, et M un point de l'espace.

1) Citer deux vecteurs orthogonaux à tout vecteur du plan (P) avec justifications.

2) a) Justifier que $(A, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère du plan (P).

b) En déduire que si $M \in (P)$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{j} + b\vec{k}$.

3) On suppose qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{j} + y\vec{k}$ et N est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AN} = x\vec{j}$.

a) Justifier que $N \in (P)$, et que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

b) En déduire que $M \in (P)$.

Activité 3

1) Justifier que les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires.

2) On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$ et Q est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AQ} = \alpha\vec{i}$.

a) Déterminer $(P) \cap (AD)$, et justifier $Q \in (P) \cap (AD)$.

b) En déduire que $\alpha = 0$, puis que $\beta = \gamma = 0$.

Activité 4

$\vec{u}$ désigne un vecteur, K le point de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, et (d) est la droite passant par K et dirigée par $\vec{i}$ et S le point tel que $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{LK}$.

1) Justifier que (d) et (P) sont sécants. On notera L leur point d'intersection.

2) Justifier que $\overrightarrow{LK}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires.

3) Sachant que $\vec{u} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK}$, justifier qu'il existe $(m,n,p) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$.

4) Que peut-on dire de chacun des triplets $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (m,n,p) ?

5) On pose $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ avec x, y, z, x', y' et z' réels, $x \neq 0$ et $x' \neq 0$.

Montrer que : $(\exists\, t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = t\vec{w}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$

Solutions des activités

Activité 1

On désigne par P et Q les points tels que : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EC}$.

1) a) Expression de $\overrightarrow{EP}$ en fonction de $\overrightarrow{EH}$.

$$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FH} = \underbrace{\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}}_{\overrightarrow{EG}} + \underbrace{\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}}_{\overrightarrow{FH}} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{EH}.$$

b) Justifions que $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

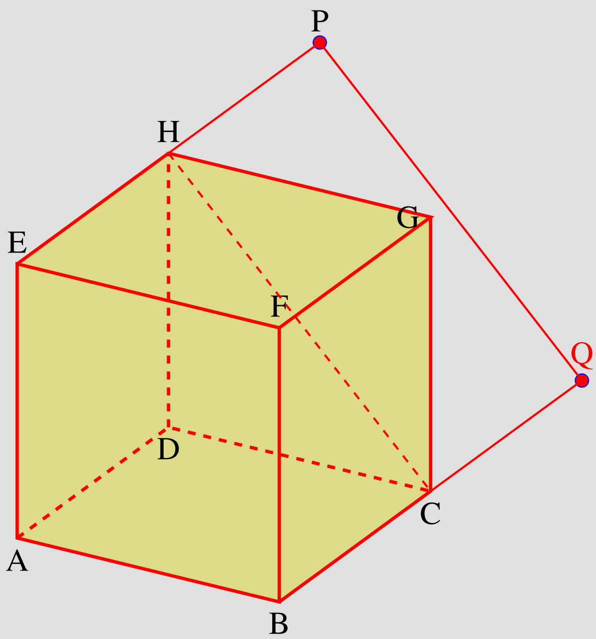
$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AE} = -(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}) = -\overrightarrow{EB}$.

Ainsi $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{BC}$.

D'où $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{BQ}$ sont colinéaires.

c) Construction des points P et Q(voir ci-contre)



2) a) Justifions que $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{CQ}$.

Comme $\overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{HP}$ et $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$, alors H et C sont les milieux respectifs des segments [EP] et [BQ].

Ainsi $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{HP}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CQ}$. Etant donné que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$, on a : $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{CQ}$.

b) Nature du quadrilatère HPQC.

HPQC est un rectangle car $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{CQ}$ et $(HP) \perp (HC)$ vu que (HP) est orthogonal au plan (HDC).

3) Citons deux couples de vecteurs orthogonaux.

$(\overrightarrow{EH}\,;\,\overrightarrow{HD})$ et $(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{HG})$ sont des couples de vecteurs orthogonaux.

4) a) Exprimons $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) Exprimons $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

c) Exprimons en fonction de x, le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= 0 + 0 + x^2 + 0 = x^2 \text{ car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

d) Déduisons en, en degrés, une mesure de l'angle $\widehat{CAH}$.

On a : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = AC \times AH \times \cos\widehat{CAH} = 2x^2 \cos\widehat{CAH}$ car $AH = AC = \sqrt{2}x$.

Comme on aussi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = x^2$, on trouve $\cos\widehat{CAH} = \dfrac{1}{2}$. D'où mes $\widehat{CAH} = 60$ř.

Activité 2

On désigne par (P) le plan passant par A, B et E, et M un point de l'espace.

1) Citons deux vecteurs orthogonaux à tout vecteur du plan (P) avec justifications.

Les droites (AD) et (GF) sont orthogonales au plan (P).

Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont deux vecteurs orthogonaux à tout vecteur du plan (P).

Commentaire : **$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont des vecteurs normaux du plan (P).**

2) a) Justifions que $(A, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère du plan (P).

$\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux vecteurs non colinéaires de (P), et $A \in (P)$.

Donc $(A, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère du plan (P).

b) Déduisons en que si $M \in (P)$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{j} + b\vec{k}$.

$M \in (P)$ et $(A, \vec{j}, \vec{k})$ repère de (P), alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{j} + b\vec{k}$.

Commentaire : **$\overrightarrow{AM}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs coplanaires.**

3) Il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{j} + y\vec{k}$ et N est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AN} = x\vec{j}$.

a) Justifions que $N \in (P)$, et que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

- $\overrightarrow{AN} = x\vec{j}$, alors $N \in (AD)$. Comme $(AD) \subseteq (P)$, alors $N \in (P)$.
- $\overrightarrow{AM} = x\vec{j} + y\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + y\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = y\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = y\vec{k}$.

  Donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

b) Déduisons en que $M \in (P)$.

On a : $\overrightarrow{MN} = y\overrightarrow{AE}$.

- Si $y = 0$, alors $M = N$, et $M \in (P)$ car $N \in (P)$.
- Si $y \neq 0$ et $N \in (AE)$, alors $M \in (AE)$ et comme $(AE) \subseteq (P)$, on a : $M \in (P)$.
- Si $y \neq 0$ et $N \notin (AE)$, alors les droites (MN) et (AE)sont parallèles et par la suite les points A, M, N et E sont coplanaires. Puisque les points A, N et E ne sont pas alignés, on aboutit à $M \in (AEN)$. Étant donné que $(P) = (AEN)$, alors $M \in (P)$.

Commentaire :

(P) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ s'écrive sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Activité 3

1) Justifions que les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires.

A, B et E définissent le plan (P), $D \in (ABC)$ et $(P) \cap (ABC) = (AB)$. Comme $D \notin (AB)$, alors $D \notin (P)$. D'où les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires.

2) $\exists\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$ et Q est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AQ} = \alpha\vec{i}$.

a) Déterminons $(P) \cap (AD)$, et justifions que $Q \in (P) \cap (AD)$.

- $(P) \cap (AD) = \{A\}$.
- $\overrightarrow{AQ} = \alpha\overrightarrow{AD} \Rightarrow A \in (AD)$.

  $\overrightarrow{AQ} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AE} \Rightarrow A \in (P)$.

  Donc $Q \in (P) \cap (AD)$.

b) Déduisons en que $\alpha = 0$, puis que $\beta = \gamma = 0$.

- De ce qui précède, $(P) \cap (AD) = \{A\}$ et $Q \in (P) \cap (AD)$.

  Donc $Q = A$ et ainsi $\alpha\vec{i} = \vec{0}$. Etant donné que $\vec{i} \neq \vec{0}$, on a alors $\alpha = 0$.
- Comme $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$ et $\alpha = 0$, on a $\beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$.

  $(\vec{j}, \vec{k})$ étant une base de vecteurs de (P), on a : $\beta = \gamma = 0$.

Activité 4

$\vec{u}$ désigne un vecteur, K le point de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, et (d) est la droite passant par K et dirigée par $\vec{i}$ et S le point tel que $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{LK}$.

1) Justifions que (d) et (P) sont sécants. On notera L leur point d'intersection.

- Si K $\in$ (AD), alors (AD) $= (d)$ et on a (d) et (P) sécants.
- Si K $\notin$ (AD), alors (AD)// (d). Comme (AD) et (P) sont sécants, alors (d) et (P) sécants.

2) Justifions que $\overrightarrow{LK}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires.

- L et K sont des points de (d), et (d) est dirigée par $\vec{i}$. Donc $\overrightarrow{LK}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires.

3) Sachant que $\vec{u} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK}$, justifions qi'il existe $(m,n,p) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$.

Il existe un reél m tel que $\overrightarrow{LK} = m\vec{i}$ car $\overrightarrow{LK}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires. Ainsi $m\vec{i} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AK}$.

Il existe un reél $(n,p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AL} = n\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AE}$ car L est un point du plan (ABE).

$\vec{u} = n\vec{j} + p\vec{k} + m\vec{i} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$. D'où le résultat.

4) $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace.

(m,n,p) est le triplet des coordonnes de $\vec{u}$.

5) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ avec x, y, z, x', y' et z' réels, $x \neq 0$ et $x' \neq 0$.

Montrons que : $\overbrace{\exists t \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \vec{v} = t\vec{w}}^{P_1} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0}^{P_2}$

Supposons que P_1 est vraie, et montrons que P_2 est vraie.

Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = t\vec{w}$, alors $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = tx'\vec{i} + ty'\vec{j} + tz'\vec{k}$ et par la suite $(x - tx')\vec{i} + (y - ty')\vec{j} + (z - tz')\vec{k} = \vec{0}$. Ainsi $x - tx' = y - ty' = z - tz' = 0$.

on obtient $x = tx'$, $y = ty'$ et $z = tz'$.

$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} tx' & x' \\ ty' & y' \end{vmatrix} = tx'y' - tx'y' = 0\,;$ $\quad \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ty' & y' \\ tz' & z' \end{vmatrix} = ty'z' - ty'z' = 0\,;$

$\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} tx' & x' \\ tz' & z' \end{vmatrix} = tx'z' - tx'z' = 0.$ D'où P_2 est vraie.

Supposons que P_2 est vraie, et montrons que P_1 est vraie.

On a : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$. Ainsi $xy' = x'y$, $xz' = x'z$ et $yz' = y'z$.

On obtient donc $\dfrac{xy'}{x'} = y$ et $\dfrac{xz'}{x'} = z$ car $\dfrac{x}{x'}$ existe vu que $x' \neq 0$.

$\dfrac{x}{x'}\vec{w} = x\vec{i} + \dfrac{xy'}{x'}\vec{j} + \dfrac{xz'}{x'}\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{u}$.

Il existe un réel t avec $t = \dfrac{x}{x'}$ tel que $\vec{u} = t\vec{w}$. D'où P_1 est vraie et on a le résultat.

Résumé

1. Notion de vecteurs de l'espace

Définitions

◇ Tout couple de points (A,B) de l'espace définit un vecteur de l'espace noté $\overrightarrow{AB}$ tel que :

- Si A et B ne sont pas confondus :
  - ✓ sa direction est celle de la droite (AB) ;
  - ✓ son sens est celui de A vers B.
  - ✓ sa longueur ou norme notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ est la distance AB.

• Si A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.

◇ Deux vecteurs non nuls de l'espace ayant même direction, même sens et même norme sont dits égaux.

◇ Deux vecteurs non nuls sont opposés s'ils ont la même direction, la même norme et ont des sens contraires.

◇ Deux vecteurs non nuls de l'espace sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

◇ Deux vecteurs non nuls de l'espace sont dits orthogonaux lorsqu'ils dirigent deux droites orthogonales de l'espace.

N.B : Lorsque deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriétés

◇ Pour tout point A de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B de l'espace tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

◇ Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

◇ Les règles de calculs sur les vecteurs du plan et la notion de colinéarité restent valables dans l'espace.

◇ Soient A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

2. Vecteurs coplanaires et points coplanaires

Définitions

◇ Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tous non nuls de l'espace.

• $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsqu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

• $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires lorsque $\forall\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, on a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

◇ Soient A, B, C et D quatre points de l'espace distincts deux à deux, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de l'espace.

• A, B, C et D sont coplanaires lorsque $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

• A, B, C et D ne sont pas coplanaires lorsque $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont coplanaires.

• Lorsque A, B et C ne sont pas alignés, le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient coplanaires.

• Le plan (P) ayant pour repère (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient coplanaires.

Remarques

➡ Si A, B et C ne sont pas alignés, alors $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC).

➡ Le plan (P) de repère (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) est le plan passant par A, et dont $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'un de ses couples de vecteurs directeurs.

➡ Un couple de vecteurs directeurs d'un plan (Q) est un couple de vecteurs non colinéaires de (Q).

➨ Si $(\vec{u},\ \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs d'un plan (Q), alors $(\vec{v},\ \vec{u})$, $(\lambda\vec{u},\ \beta\vec{v})$ et $(\lambda\vec{v},\ \beta\vec{u})$ pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sont des couples de vecteurs directeurs de (Q).

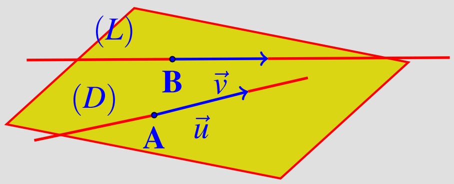
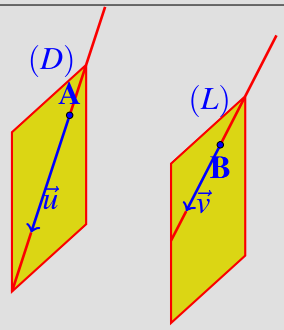
➨ Deux plans sont parallèles lorsque un couple de vecteurs directeurs de l'un est un couple de vecteurs directeurs de l'autre.

Propriétés

◇ **Coplanarité et positions relatives de deux droites**

Soient (D) et (L) deux droites de l'espace de repères respectifs $(\mathrm{A},\vec{u})$ et $(\mathrm{B},\vec{v})$.

- (D) et (L) sont coplanaires si seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires.
- $\left[\ (D)\ /\!/\ (L)\ \right] \Leftrightarrow \left[\ \vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont colinéaires, et }\overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{ et }\vec{u}\text{ ne sont pas colinéaires}\ \right]$.
- $\left[(D)\text{ et }(L)\text{ sont sécantes}\right] \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ coplanaires, et }\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ non colinéaires}\right]$.
- $\left[\ (D)\text{ et }(L)\text{ ne sont pas coplanaires}\ \right] \Leftrightarrow \left[\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ ne sont pas coplanaires}\ \right]$.

	
(D) et (L) sont coplanaires	(D) et (L) ne sont pas coplanaires.

◇ **Coplanarité, et position relative d'une droite et d'un plan**

Soit (D) une droite de repère $(\mathrm{A},\ \vec{u})$ et (P) un plan de repère $(\mathrm{B},\ \vec{v},\ \vec{w})$

- $(D)\subseteq(P) \Leftrightarrow (\mathrm{A}\in(P)$ et, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires$)$.
- $((D)$ est parallèle à $(P)) \Leftrightarrow (\mathrm{A}\notin(P)$ et, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires$)$.
- $((D)$ et (P) sont sécants$) \Leftrightarrow (\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires$)$.

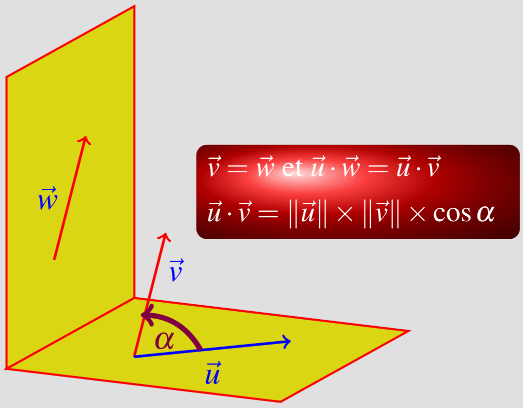
◇ **Coplanarité et parallélisme de plans**

Soient (P) et (Q) deux plans de repères respectifs $(\mathrm{A},\vec{u},\vec{v})$ et $(\mathrm{A},\vec{u'},\vec{v'})$.

$((P)\ /\!/\ (Q)) \Leftrightarrow ([\vec{u},\ \vec{v}$ et $\vec{u'}$ coplanaires$]$ et $[\vec{u},\ \vec{v}$ et $\vec{v'}$ coplanaires$])$

3.Produit scalaire dans l'espace

Définition



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours coplanaires.

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :
  - ✓ Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
  - ✓ Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha$ où $\alpha=\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

• Le carré scalaire de $\vec{u}$ est le réel noté $\vec{u}^2$ tel que $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs de l'espace et (a,b) un couple de réels.

• $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

• $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{i}+\vec{j}) = \vec{u}\cdot\vec{i}+\vec{u}\cdot\vec{j}+\vec{v}\cdot\vec{i}+\vec{v}\cdot\vec{k}$.

• $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = (a\times b)\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

• $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

N.B : Les propriétés relatives au produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

4. Vecteur normal d'un plan

Définition

Soit (P) un plan, et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.

$\vec{u}$ un vecteur normal au plan (P) lorsque $\vec{u}$ est vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan (P).

Exemple

Soient A et B deux points distincts de l'espace et (P) le plan médiateur du segment [AB].

La droite (AB) est orthogonale au plan (P). Donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan (P).

Remarques

➦ Un plan a une infinité de vecteurs normaux tous colinéaires.

➦ Tout vecteur normal à un plan (P) est orthogonal à tout vecteur de (P).

Propriétés

◇ Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

◇ Soit (d) une droite dirigée par $\vec{u}$, et (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- $((d) \mathbin{//} (P)) \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = 0$
- $((d)$ et (P) sécantes$) \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$.
- $((d) \perp (P)) \Leftrightarrow (\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires$)$.

◇ Soient (P) et (Q) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{m}$

- $((P) \mathbin{//} (Q)) \Leftrightarrow (\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires$)$.
- $((P)$ et (Q) sont sécants$) \Leftrightarrow (\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas colinéaires$)$.
- $((P) \perp (Q)) \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{m} = 0$.

5. Bases de vecteurs de l'espace

Définition

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ des vecteurs de l'espace distincts deux à deux.

Tout triplet de vecteurs de l'espace non coplanaires est une base de vecteurs de l'espace.

Remarques Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ des vecteurs non coplanaires de l'espace,

• les triplets $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $(\vec{k},\vec{j},\vec{i})$ et $(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ sont des bases des vecteurs de l'espace.

• $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthogonale de vecteurs de l'espace lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$.

• $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée de vecteurs de l'espace lorsque $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthogonale et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Propriétés

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de vecteurs de l'espace.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet (x,y,z) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. (x,y,z) représente les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

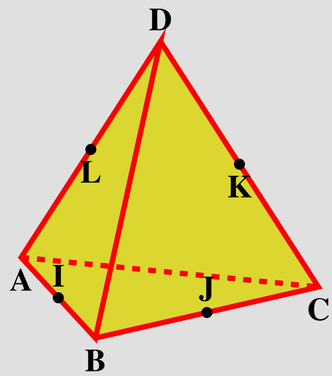
  On notera indifféremment $\vec{u}(x;y;z)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et λ un réel. On a :

- $[\vec{u}+\vec{v}]\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$, $[\vec{u}-\vec{v}]\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}$ et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$.
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$.
- Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Exercices d'applications

1



Enoncé : Ci-contre **ABCD** est un tétraèdre où **I**, **J**, **K** et **L** sont les milieux respectifs de **[AB]**, **[HC]**, **[CD]**, et **[AD]**.

1) a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{IL}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{JK}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$.

b) Justifier que les points **I**, **J**, **K** et **L** sont coplanaires.

2) a) Exprimer $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$.

b) Que peut-on conclure des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$?

Solution :

1) a) Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{IL}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{JK}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{IL}} = \overrightarrow{\mathbf{IA}} + \overrightarrow{\mathbf{AL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{BA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{BD}}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{JK}} = \overrightarrow{\mathbf{JC}} + \overrightarrow{\mathbf{CK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{CD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{BD}}.$$

b) Justifions que les points **I**, **J**, **K** et **L** sont coplanaires.

D'après 1) a), $\overrightarrow{\mathbf{IL}} = \overrightarrow{\mathbf{JK}}$, ainsi les points **I**, **J**, **K** et **L** sont coplanaires.

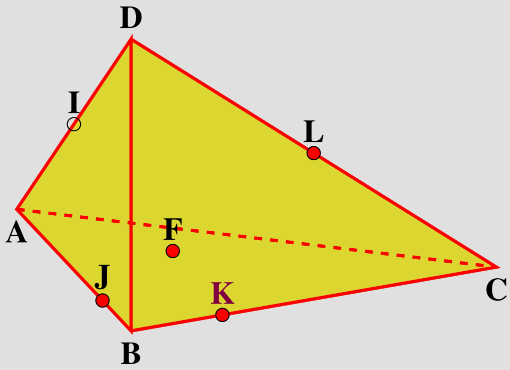
2) a) Exprimons $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$.

$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK}$, alors $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) Donnons une conclusion sur les vecteurs $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{IK} = \alpha\overrightarrow{BD} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Donc $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.

2



Énoncé : Ci-contre **ABCD** est un tétraèdre. Les points **I** et **L** sont les milieux respectifs de [**AD**] et [**CD**], les points **J** et **K** sont tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, puis le point $\mathbf{F} = \text{bar}\{(\mathbf{L},1);(\mathbf{J},2)\}$. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$.

2) Sans utiliser les vecteurs, montrer que **I**, **J** et L définissent un plan.

3) a) Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$.

b) En déduire que les points **I**, **J**, **K** et **L** sont coplanaires.

4) a) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

b) Exprimer dans cet ordre $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

c) **F** est-il un point de [**IK**] ?

5) a) Justifier que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de vecteurs de l'espace.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IK}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

c) Montrer alors à l'aide de calculs que les points **I**, **F** et **K** sont alignés.

Solution :

1) Montrons que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$.

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{k} + \frac{1}{2}(-\vec{k} + \vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{\imath} + \frac{1}{4}(-\vec{\imath} + \vec{j}) = \frac{3}{4}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{j}$.

2) Sans utiliser les vecteurs, montrons que **I**, **J** et L définissent un plan.

Les plans (**ABC**) et (**ADC**) sont sécants suivant la droite (AC).

$\mathbf{J} \notin (\mathbf{AC})$ et $\mathbf{J} \in (\mathbf{ABC})$, alors $\mathbf{J} \notin (\mathbf{ADC})$. Ainsi comme $(\mathrm{IL}) \subseteq (\mathrm{ADC})$, alors $\mathbf{J} \notin (\mathbf{IL})$.

Les points **I**, **J** et **L** ne sont pas alignés. D'où ils définissent un plan.

3) a) Exprimons $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$.

$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{JK}$, alors $\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IK}$. Ainsi $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IJ}$.

b) Déduisons en que les points **I**, **J**, **K** et **L** sont coplanaires.

D'après ce qui précède, on a $\overrightarrow{IK} = \alpha\overrightarrow{IL} + \beta\overrightarrow{IJ}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$.

Donc **K** appartient au plan (**ILJ**). D'où **I**, **J**, **K** et **L** sont coplanaires.

4) a) Exprimons $\overrightarrow{\mathbf{AF}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathbf{AL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$.

$\mathbf{F} = \text{bar}\ \{(\text{L},1);(\text{J},2)\}$, alors $\overrightarrow{\mathbf{LF}} + 2\overrightarrow{\mathbf{JF}} = \vec{0}$ et par la suite $\overrightarrow{\mathbf{LA}} + \overrightarrow{\mathbf{AF}} + 2\overrightarrow{\mathbf{JA}} + 2\overrightarrow{\mathbf{AF}} = \vec{0}$.

Ainsi $\overrightarrow{\mathbf{AF}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{AL}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathbf{AJ}}$.

b) Exprimons dans cet ordre $\overrightarrow{\mathbf{AF}}$, $\overrightarrow{\mathbf{IF}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AF}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{AL}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathbf{AJ}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}) + \frac{2}{3}(\frac{3}{4}\vec{i}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{6}\vec{j} + \frac{1}{6}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{IF}} = \overrightarrow{\mathbf{IA}} + \overrightarrow{\mathbf{AF}} = -\frac{1}{2}\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{6}\vec{j} + \frac{1}{6}\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{6}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{IK}} = \overrightarrow{\mathbf{IA}} + \overrightarrow{\mathbf{AK}} = -\frac{1}{2}\vec{k} + \frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} = \frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}.$$

c) **F** est-il un point de [**IK**] ?

$\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathbf{IF}} = \overrightarrow{\mathbf{IK}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{IF}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathbf{IF}}$. On a $\overrightarrow{\mathbf{IF}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{IF}}$ avec $\lambda \in [0;1]$ où $\lambda = \frac{2}{3}$. Donc F $\in$ [**IK**].

5) a) Justifions que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de vecteurs de l'espace.

Les points **A**, **B**, **C** et **D** ne sont pas coplanaires car ABCD tétraèdre.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ ne sont pas coplanaires.

D'où $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de vecteurs de l'espace.

b) Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{IF}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On a : $\overrightarrow{\mathbf{IF}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathbf{IK}}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) Montrons alors à l'aide de calculs que les points **I**, **F** et **K** sont alignés.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} - \frac{3}{24} = 0\,; \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{12} = 0\,; \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathbf{IF}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$ sont colinéaires, et par la suite **I**, **F** et **K** sont alignés.

Devoirs

1 $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace, et on considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$.

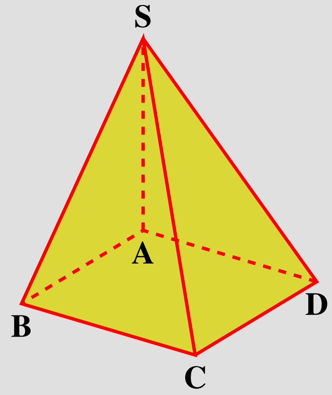
2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2 $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace, et on considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix};\ \vec{v}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}\text{ et }\vec{w}\begin{pmatrix}0\\3\\-6\end{pmatrix}$$

1) Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de vecteurs de l'espace.

2) Trouver les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.



3 **SABCD** est une pyramide régulière de sommet **S**, dont la base **ABCD** est un carré de coté a. Les faces **SAB** et **SAD** sont des triangles isocèles rectangles en **A**.

1) Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{\mathbf{SA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}$, $\overrightarrow{\mathbf{SA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BD}}$, .

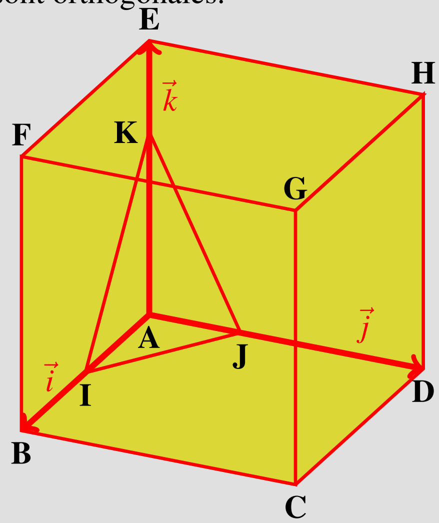
2) Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{SA}};\overrightarrow{\mathbf{SC}}})$, $\overrightarrow{\mathbf{SA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{SC}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{SC}}$.

3) Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{\mathbf{SB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BD}}$, $\overrightarrow{\mathbf{SB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}$.

4 **ABCD** est un tétraèdre régulier de côté a.

1) Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{CD}}$, .

2) En déduire que deux arêtes opposées quelconques de **ABCD** sont orthogonales.



5 **ABCDEFGH** est un cube de côté 1, on pose $\vec{i}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\vec{j}=\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{\mathbf{AE}}$. On désigne par I, J et K les points tels que $\overrightarrow{\mathbf{AI}}=\frac{1}{2}\vec{i}$, $\overrightarrow{\mathbf{AJ}}=\frac{1}{3}\vec{j}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AK}}=\frac{2}{3}\vec{k}$.

1) Justifier que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée de vecteurs de l'espace.

2) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{JK}}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

b) Déterminer un triplet (α,β,γ) de réels tels que $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ soit un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan (**IJK**).

3) On désigne par (d) la droite passant par **A** et orthogonale au plan (**IJK**).

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{CG}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

b) Montrer que (d) et le plan (**ACD**) sont sécants en un point qu'on notera **M**.

c) Trouver le triplet de réels (a,b,c) tel que $\overrightarrow{\mathbf{AM}}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$.

d) Exprimer $\overrightarrow{\mathbf{IM}}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{\mathbf{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$, puis construire **M**.

Leçon 2 : Repérage dans l'espace

Capacités visées :

➠ Maîtriser la notion de repère dans l'espace.

➠ Placer un point M dans un repère de l'espace à l'aide de ses coordonnées.

➠ Déterminer les coordonnées de points ou de vecteurs, des distances.

➠ Justifier à l'aide des coordonnées l'alignement de points ou la coplanarité.

Contrôle de pré-réquis

1 A, B, C et D sont quatre points de l'espace, non coplanaires.

F le barycentre des points pondérés (B, 1), (C, 2) et (D, −1).

a) Comment peut-on qualifier le triplet $(\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AD}})$?

b) Exprimer $\overrightarrow{\mathbf{AF}}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$.

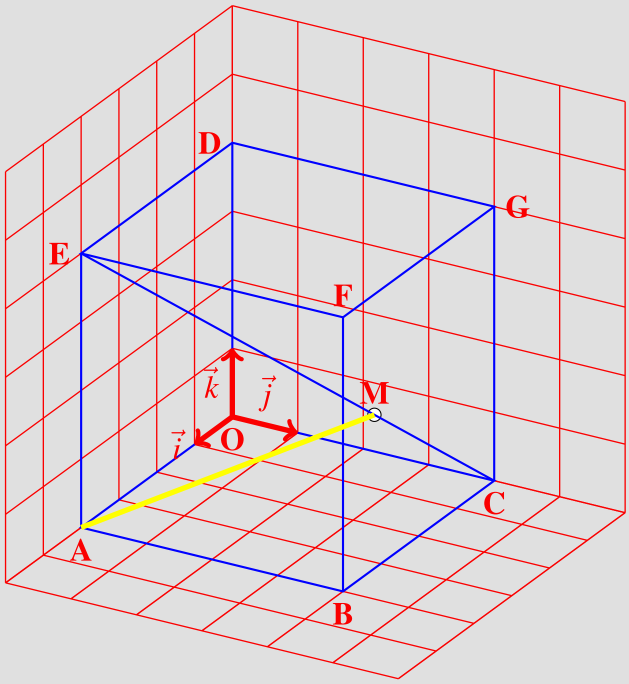
c) Faire une figure et construire le point F.

2 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée des vecteurs de l'espace.

On pose $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, et $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$. Calculer $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Situation Problème

Ci-contre, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée des vecteurs de l'espace. **OABCDEFH** est un cube. **M** est un point variable du segment [**CE**]. On pose $\overrightarrow{\mathbf{CM}} = x\overrightarrow{\mathbf{CE}}$. Comment peut-on faire pour calculer $\mathbf{AM}^2$ en fonction de x ?



Activité d'apprentissage

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soient **O**, **P** et **Q** des points de l'espace distincts deux à deux, et I est le milieu du segment [**PQ**].

a) Justifier l'existence de deux triplets $(x_{\mathbf{P}}, y_{\mathbf{P}}, z_{\mathbf{P}})$ et $(x_{\mathbf{Q}}, y_{\mathbf{Q}}, z_{\mathbf{Q}})$ tels que $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = x_{\mathbf{P}}\vec{i} + y_{\mathbf{P}}\vec{j} + z_{\mathbf{P}}\vec{k}$ et $\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = x_{\mathbf{Q}}\vec{i} + y_{\mathbf{Q}}\vec{j} + z_{\mathbf{Q}}\vec{k}$.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OI}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$.

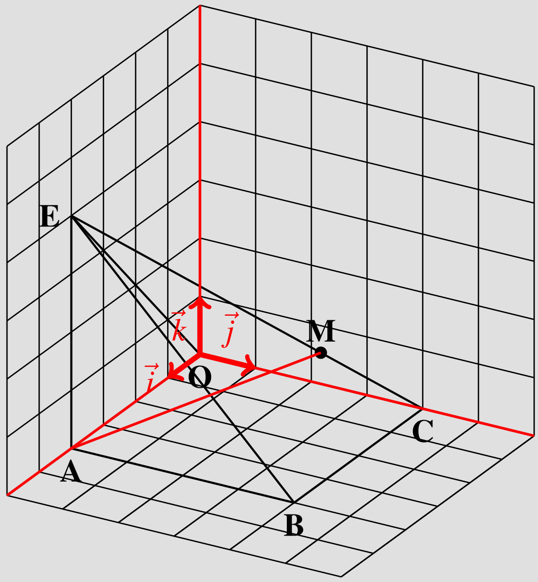
c) Donner une expression de $\|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\|$ lorsque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée.

2) On considère la figure ci-contre où $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée des vecteurs de l'espace. **OABCE** est pyramide de sommet **E**, de base le carré **OABC**, et **M** est un point variable du segment [**CE**]. On pose $\overrightarrow{\mathbf{CM}} = x\overrightarrow{\mathbf{CE}}$.

a) Comment peut-on qualifier le quadruplet $(\mathbf{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$?

b) Déterminer les coordonnées de **A** et **M** dans le repère $(\mathbf{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, et en déduire $\mathbf{AM}^2$ en fonction de x.

c) Construire le point $\mathrm{D}(2,3,3)$ dans $(\mathbf{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sur la figure ci-contre.



Résumé

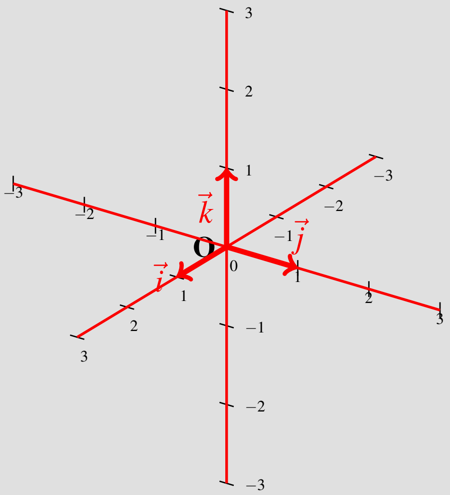
1. Notion de repère de l'espace

Définition

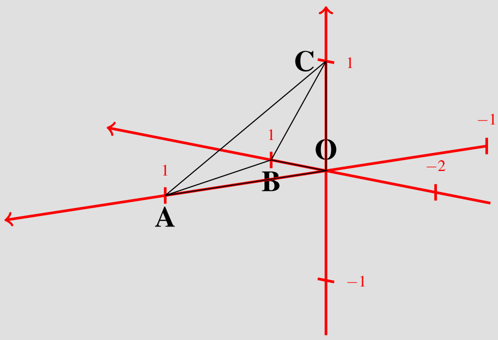
◇ Soient O, A, B et C des points de l'espace, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ des vecteurs de l'espace.

- Le quadruplet $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace lorsque $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace.
  Dans ces conditions,
  ✓ Le point O est appelé origine,
  ✓ L'axe (O, $\vec{i}$) est l'axe des abscisses.
  ✓ L'axe (O, $\vec{j}$) est l'axe des ordonnées.
  ✓ L'axe (O, $\vec{k}$) est l'axe des côtes.
- Le quadruplet $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthogonal de l'espace lorsque $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthogonale des vecteurs de l'espace.
- Le quadruplet $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace lorsque $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée des vecteurs de l'espace.
- Le quadruplet $(\mathrm{O},\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$ est un repère de l'espace lorsque les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.
  Dans ces conditions,
  ✓ $(\mathrm{O},\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$ est le repère $(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}})$.
  ✓ Le point O est appelé origine,
  ✓ La droite (OA) est l'axe des abscisses.
  ✓ La droite (OB) est l'axe des ordonnées.
  ✓ La droite (OC) est l'axe des côtes.

Illustrations



$(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ repère de l'espace



(O, A, B, C) est un repère de l'espace

2. Coordonnées d'un point

Propriété-Définition

◇ Soit $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x,y,z) de réels tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

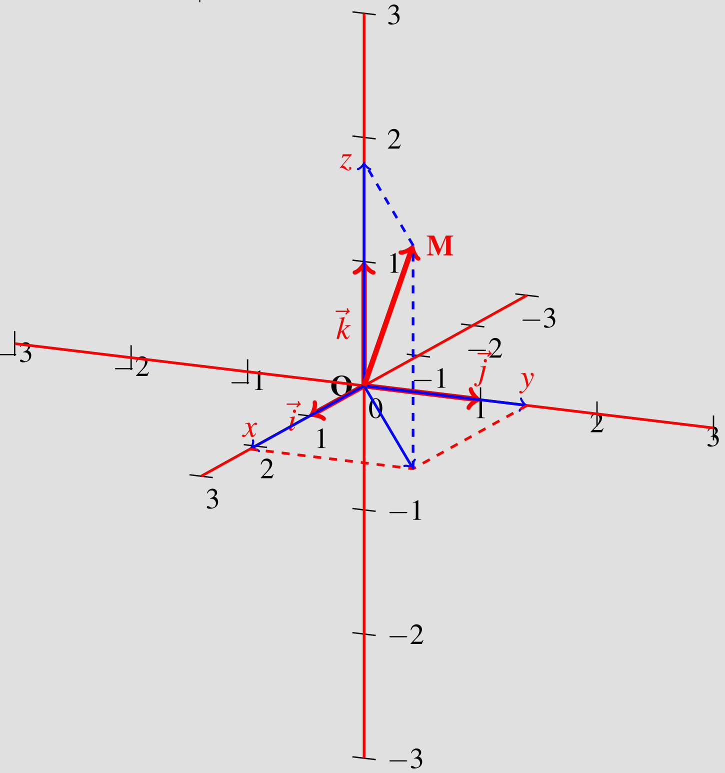
◇ Le triplet (x,y,z) représente les coordonnées de M dans le repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, et on note

$$\mathrm{M}(x,y,z) \text{ ou } \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

◇ x est l'abscisse de M.

◇ y est l'ordonnée de M.

◇ z est la côte de M.



Autres propriétés

◇ On suppose l'espace muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} \\ y_{\mathrm{B}} \\ z_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}$ et on désigne par I le milieu de [AB]. On a :

• $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \\ \frac{1}{2}(z_A + z_B) \end{pmatrix}$.

• Lorsque $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, on a : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

◇ Soit $(A_1,\lambda_1), \cdots, (A_n,\lambda_n)$ n points pondérés de l'espace où $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$ et $n \geq 2$.

• Si $G = \text{bar}\{(A_1,\lambda_1),\cdots,(A_n,\lambda_n)\}$, alors

$G\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \\ \dfrac{\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \\ \dfrac{\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \end{pmatrix}$ avec $A_i\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1,\cdots,n\}$.

Exercice d'application

Enoncé : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, et on considère les points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

1) Donner une représentation des points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

3) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

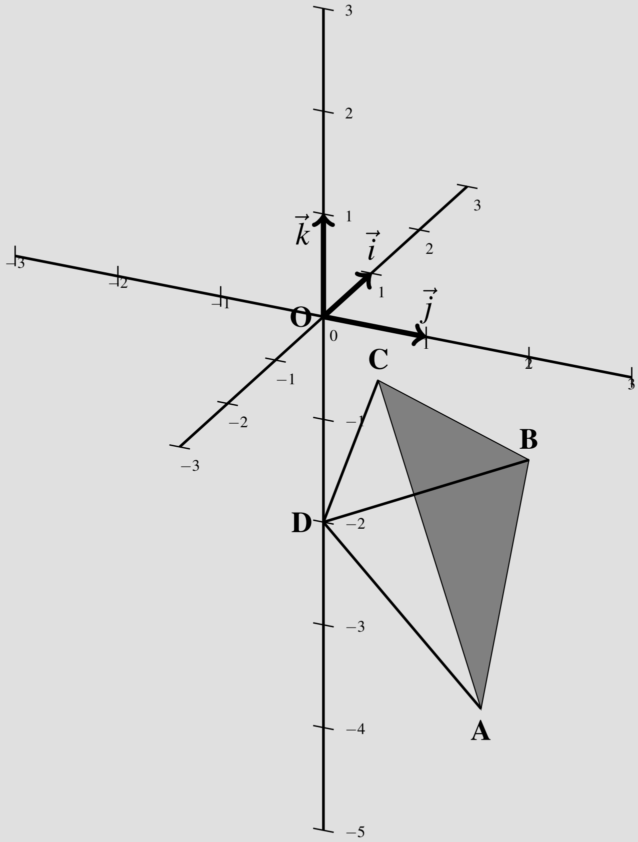
4) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

5) Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité de ABC.

6) Déterminer $\cos \widehat{BAC}$, puis $\sin \widehat{BAC}$, et en déduire l'aire du triangle ABC.

Solution

1) Représentation de A, B, C et D dans $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ci-contre.



2) Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$

$$\begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = 0 \\ z_B - z_A = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x_B - x_A = 0 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = 3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_D - x_A = 1 \\ y_D - y_A = -2 \\ z_D - z_A = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_B - x_C = -1 \\ y_B - y_C = -1 \\ z_B - z_C = 1 \end{cases} .$$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Montrons que A, B et C non alignés.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$ et $2 \neq 0$.

Donc A, B et C non alignés.

4) Montrons que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Soient α, β et γ des réels tels que $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ et montrons que que l'on a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \vec{0}$, alors on a : $\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 & (L_1) \\ -\beta - 2\gamma & = & 0 & (L_2) \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma & = & 0 & (L_3) \end{cases}$.

$2(L_1) + (L_2) \longrightarrow (L_2') : 2\alpha - \beta = 0$ et $2(L_1) - (L_3) \longrightarrow (L_3') : -\alpha - 3\beta = 0$.

Ainsi $\beta = 2\alpha$ et $-7\alpha = 0$. D'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

5) Déterminons les coordonnées du point G, centre de gravité de ABC.

$\mathrm{G} = \mathrm{bar}\,\{(\mathrm{A};1),(\mathrm{B};1),(\mathrm{C};1)\}$. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C}{1+1+1} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1 \times y_A + 1 \times y_B + 1 \times y_C}{1+1+1} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 1 \times z_C}{1+1+1} = -\dfrac{4}{3} \end{cases} . \text{ D'où } \mathrm{G}\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \end{pmatrix}$$

6) • Déterminons $\cos \widehat{BAC}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 2 \times 3 = 6$; $AB = \sqrt{1^1 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et

$AB = \sqrt{0^1 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$,

alors $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{6}{\sqrt{50}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

- Déterminons $\sin \widehat{BAC}$.

Une mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ est dans l'intervalle $]0; \pi[$. D'où $\sin \widehat{BAC} > 0$.

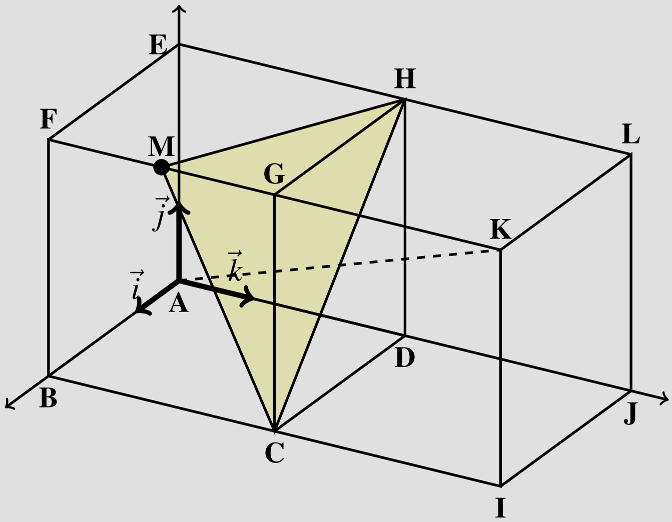
Comme $\sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1$, alors $\sin \widehat{BAC} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

- Déduisons en l'aire du triangle ABC. Soit $\mathscr{A}$ cette aire.

On a : $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times AC}{2} \sin \widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{50}}{2} \times \dfrac{\sqrt{7}}{5} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Devoirs

1 Ci-contre, on dispose de deux cubes ABCDEFGH et DCIJHGKL d'arête 3, et M est le milieu de [FG]. On munit l'espace du repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\vec{k} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



1) Justifier que $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal.

2) Déterminer les coordonnées des points A, K, M, H et C dans $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3) Prouver que les points M, H et C définissent un plan.

4) Prouver que la droite (AK) est orthogonale au plan (MHC).

2 Lespace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les $A(3;2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;2;1)$ et $D(0;4;1)$.

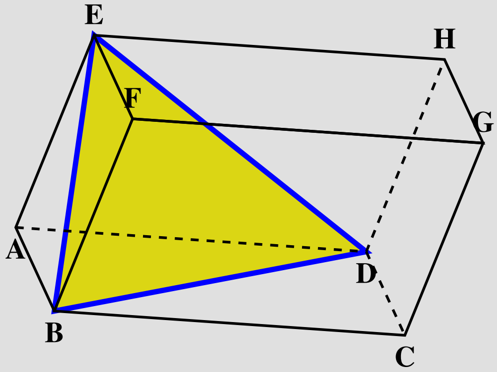
1) Montrer que ABC est un triangle rectangle et que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) Prouver que $(AD) \perp (ABC)$, et calculer le volume V du tétraèdre ABCD.

3) Prouver que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian, et calculer l'aire du triangle BDC.

4) Déterminer les coordonnées du point F tel que B soit le barycentre des points pondérés $(F; 4)$, $(B; 2)$ et $(C; -1)$.

③ Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a représenté le pavé ABCDEFGH où $A(2;0;1)$, $B(7;2;1)$, $D(2;6;1)$ et $E(-3;0;3)$.



1) Déterminer les coordonnées des points C, F, G et H.

2) Prouver que la droite (AG) est sécante au plan (ABG).

3) Soit I le point d'intersection de (AG) avec (BDE).

a) Justifier l'existence de réels α, β tels que $\overrightarrow{BI} = \alpha\overrightarrow{BE} + \beta\overrightarrow{BD}$.

b) Exprimer les coordonnées de I en fonction de α et β.

c) En utilisant le fait que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, trouver alors les coordonnées exactes de I.

d) Vérifier que I est le centre de gravité de BDE.

Leçon 3 : Représentations paramétriques et équations de plans et droites

Compétences attendues :

➠ Déterminer une représentation paramétrique d'une droite.

➠ Déterminer un système d'équations cartésiennes d'une droite.

➠ Déterminer une représentation paramétrique d'un plan.

➠ Déterminer une équation cartésienne d'un plan.

➠ Utiliser les équations ou représentations paramétriques pour étudier les positions relatives des plans et droites.

Contrôle de pré-réquis

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. On considère les points $A(2;1;3)$, $B(0;0;3)$ et $C(-2;1;0)$.
On admet que A, B et C ne sont pas alignés et on donne un point M.

① Cite un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC).

② Complète les pointillés par ce qui convient à l'aide d'une égalité vectorielle.
M appartient au plan (ABC) si et seulement si ....

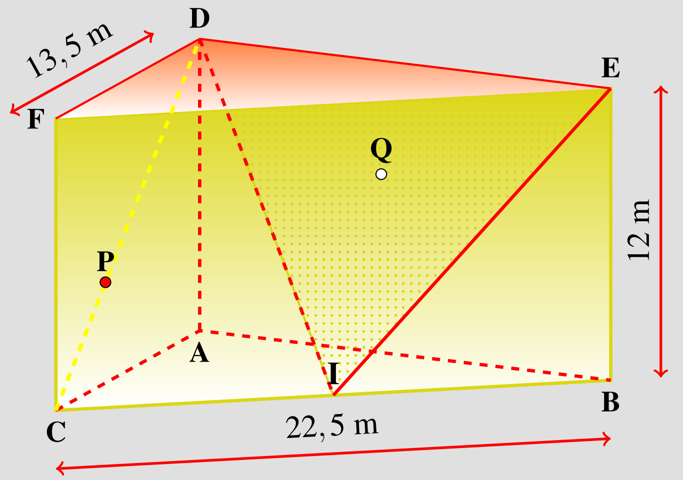
③ Complète les pointillés par ce qui convient à l'aide d'une égalité vectorielle.
M appartient à la droite (BC) si et seulement si ....

Situation Problème

Ci-contre ABCDEF est un prisme droit à base triangulaire avec ABC triangle rectangle en A, et représente un bâtiment d'un supermarché entièrement vitré raccordé au repère orthonormé de l'espace $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où l'unité est le mètre et $\vec{i}=\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$, $\vec{k}=\frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$. En journée, comme dans la nuit, deux points lumineux P et Q décrivent respectivement le segment [DC] et la surface du triangle DEI avec I milieu de [CB]. Un appareil électronique muni d'un écran donne en permanence la côte de P, l'abscisse et l'ordonnée de Q.

Comment peut-on faire pour trouver l'abscisse et l'ordonnée de P lorsque sa côte vaut 6 ?

Comment peut-on faire pour trouver la côte de Q lorsque son abscisse et son ordonnée valent respectivement 2 et 3 ?

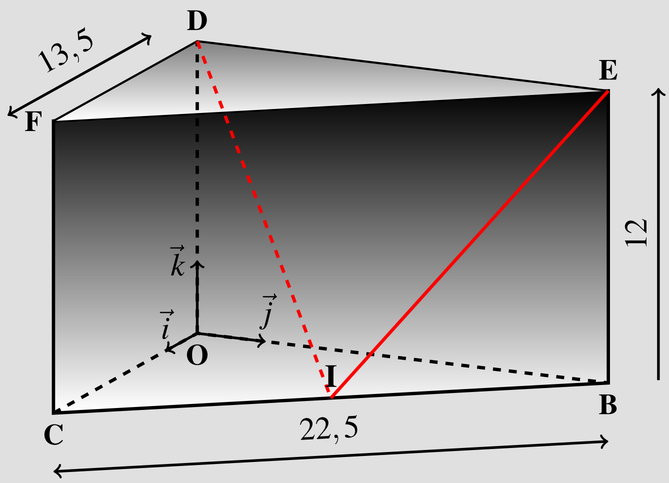


Activités d'apprentissage

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Activité 1

Ci-contre OBCDEF est un prisme droit tel que OBC triangle rectangle en O, $FD = 13,5$, $BC = 22,5$ et $BE = 12$. On désigne par M un point de coordonnées (x,y,z).



1) Donner les coordonnées de B, C, D, E et I.

2) On suppose que $M \in (CD)$.

a) Justifier l'existence d'un réel t tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CD}$.

b) Déterminer x, y et z en fonction de t.

c) Trouver un système de deux équations dont (x,y,z) est solution.

d) En déduire de deux façons l'abscisse et l'ordonnée de M lorsque sa côte vaut 6.

3) On suppose que M est un point du plan (DEI).

a) Justifier l'existence d'un couple réels (α,β) tel que $\overrightarrow{DM} = \alpha\overrightarrow{DE}+\beta\overrightarrow{DI}$.

b) Déterminer x, y et z en fonction de α et β.

c) Trouver une équation dont (x,y,z) est solution.

d) En déduire la valeur de z lorsque $x = 2$ et $y = 3$.

Activité 2

Soit a, b, c et d des nombres réels tels que $a \neq 0$.

(P) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$.

On donne le point $\mathrm{A}\begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1) a) Vérifier que A est un point de (P), et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Montrer que si $\mathrm{M}(x,y,z) \in (P)$, alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = y\vec{u}+z\vec{v}$.

2) a) Soit $\mathrm{M}(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $\mathrm{M} \in (P)$.

b) En déduire la nature de (P).

3) a) Montrer que $\vec{u} \perp \vec{n}$ et $\vec{v} \perp \vec{n}$.

b) Que peut-on conclure du vecteur $\vec{n}$ par rapport à (P) ?

Résumé

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Représentation paramétrique et système d'équations cartésiennes d'une droite

Soit (D) une droite de repère $(\mathrm{A}, \vec{u})$ avec $\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

• Le système $\begin{cases} x = x_0t + x_{\mathrm{A}} \\ y = y_0t + y_{\mathrm{A}} \\ z = z_0t + z_{\mathrm{A}} \end{cases} : t \in \mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de (D), et t est le paramètre.

• Il existe deux quadruplets de réels (a,b,c,d) et (a',b',c',d') avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$ tels que (D) soit l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ vérifiant $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$.

Le système $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de (D).

Remarques

Pour déterminer un système d'équations cartésiennes de (D), on peut procéder comme suit :

• On détermine une représentation paramétrique de (D).

• On élimine le paramètre afin d'obtenir 2 équations linéaires en x, y et z.

• Le système formé des deux équations linéaires en x, y et z est alors un système d'équations cartésiennes de (D).

2) Représentation paramétrique et équations cartésienne d'un plan

On considère un point A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Soit (P) le plan passant par A et donc un couple de vecteurs directeurs est $(\vec{u}, \vec{v})$.

- $\begin{cases} x = \alpha x_0 + \beta x_1 + x_A \\ y = \alpha y_0 + \beta y_1 + y_A \\ z = \alpha z_0 + \beta z_1 + z_A \end{cases}$; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, est une représentation paramétrique de (P).

  α et β sont les paramètres.
- Une équation de (P) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

  Les réels a, b, c et d sont déterminés par élimination des paramètres α et β de la représentation paramétrique de (P).

N.B : Pour écrire une équation cartésienne ou donner ue représentation paramétrique d'un plan, on doit connaitre un point par lequel passe le plan, et un couple de vecteurs directeurs de ce plan.

3) Ensemble (Γ) des points M(x, y, z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

- (Γ) est un plan.
- Si $a \neq 0$, alors A $\begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (\Gamma)$ et $\left(\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est un couple de vecteurs directeurs de (Γ).
- Si $b \neq 0$, alors B $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \in (\Gamma)$ et $\left(\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est un couple de vecteurs directeurs de (Γ).
- Si $c \neq 0$, alors C $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix} \in (\Gamma)$ et $\left(\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}\right)$ est un couple de vecteurs directeurs de (Γ).
- Si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé, alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (Γ).

4. Ensemble (D) des points M(x, y, z) tels que $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ où (a, b, c, d), $(a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$.

- (D) est l'intersection des plans $(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$.
- (D) est l'ensemble vide si $(P) \mathbin{/\!/} (P')$.

• (D) est une droite si (P) et (P') ne sont pas parallèles.

Exercices d'application

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 On donne les points $\mathrm{A}(1;6;4)$, $\mathrm{B}(2;5;3)$, $\mathrm{C}(3;1;1)$ et $\mathrm{D}(8;1;7)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan qu'on notera (ABC).

b) Donner une représentation paramétrique de (ABC).

c) Donner une équation cartésienne de (ABC), puis un vecteur normal à (ABC).

2) (Δ) est la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}(2;-1;3)$.

a) Donner une représentation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de (Δ).

b) Montrer que (Δ) est orthogonale à (ABC).

c) Déterminer les coordonnées de K point d'intersection de (Δ) et (ABC).

d) Que représente K pour D ?

3) Soient les plans $(P): x+y+z-6=0$ et $(Q): x+4y-7=0$.

a) Donner une représentation paramétrique de chacun des plans (P) et (Q).

b) Donner un couple de vecteurs directeurs de chacun des plans (P) et (Q).

c) Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite qu'on notera (d).

d) Donner une représentation paramétrique de (d).

e) (d) et (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

2 L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère un plan (P) et une droite de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=2\alpha+3\beta-1 \\ y=4\alpha-\beta+1 \\ z=-2\alpha+\beta-4 \end{cases} ;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } \begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+7 \\ z=2t+4 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

1) Prouver que (P) et (d) sont sécants.

2) a) Écrire une équation cartésienne de (P).

b) Déterminer alors les coordonnées de K, point d'intersection de (P) et (d).

3) Donner un système d'équations paramétriques du plan (Q) parallèle à (P) et passant par le point de (d) dordonnée 5.

4) On suppose que $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé.
Écrire une équation cartésienne du plan (R) orthogonal à (d), et passant par le point de (P) d'abscisse et de côte nulles.

Devoirs

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 On désigne respectivement par (P), (Q) et (R) les plans de repères $(\mathrm{O},\vec{j},\vec{k})$, $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{k})$ et $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$; (Γ) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ tels que $x-3=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

1) Prouver que (Γ) est une droite dont on précisera un vecteur directeur.

2) Écrire les équations de la droite (D) passant par $\mathrm{A}(3,5,2)$ et parallèle à (Γ).

3) a) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans (P), (Q) et (R).

b Déterminer les intersections de (D) avec les plans (P), (Q) et (R).

2 Écrire une équation du plan (ABC) s'il existe dans chacun des cas suivants :

1) $A(1;1;1)$, $B(1;2;-1)$ et $C(0;1;1)$. **2)** $A(5;-4;1)$, $B(6;3;9)$ et $C(-8;1;7)$.

3) $A(3;4;5)$, $B(4;-2;7)$ et $C(5;-8;9)$. **4)** $A(-1;7;4)$, $B(-2;10;5)$ et $C(3;6;-1)$.

3 Écrire une équation du plan médiateur de [AB] dans chacun des cas suivants :

1) $A(1;1;1)$ et $B(1;2;-1)$; **2)** $A(5;-4;1)$ et $B(6;3;9)$.

4 Dire dans chacun des cas suivants si les plans (P) et (Q) sont sécants ou non. On justifiera la réponse de deux façons. Dans le cas où les plans sont sécants, vérifier s'ils sont perpendiculaire, et donner une représentation paramétrique de leur intersection.

1) $(P) : x+y+2z-3=0$ et $(Q) : -x+4y-5z+6=0$.

2) $(P) : x-2z-1=0$ et $(Q) : y-2z+4=0$.

3) $(P) : x-y-2z-1=0$ et $(Q) : -2x+2y+4z+4=0$.

4) $(P) : 3x+9y-6z-3=0$ et $(Q) : x+3y-2z-1=0$.

5 On considère les points $A(0;1;1)$ et $B(2;2;1)$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. M est un point appartenant à (d), de coordonnées $(-2+u;1+u;-1-u)$, où u est un réel. (P) est le plan d'équation $x+y-z-3u=0$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires.

3) Vérifier (P) est orthogonal à la droite (d) et $M\in(P)$.

4) a) Montrer que le plan (P) et la droite (AB) sont sécants.

b) Déterminer en fonction de u, les coordonnées de N point commun à (P) et (d).

5) a)) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (d).

b) Existe-t-il une valeur du réel u pour laquelle la (MN) est perpendiculaire à (AB) ?

6) a)) Exprimer MN^2 en fonction de u.

b) En déduire la valeur de u pour laquelle MN est minimale et donner cette valeur minimale.

Leçon 4 : Distance d'un point à une droite, distance d'un point à un plan

Capacités visées :

➠ Calculer la distance d'un point à une droite.

➠ Calculer la distance d'un point à un plan.

Contrôle de pré-réquis

1 A quoi correspond la distance d'un point M à une droite (d) ?

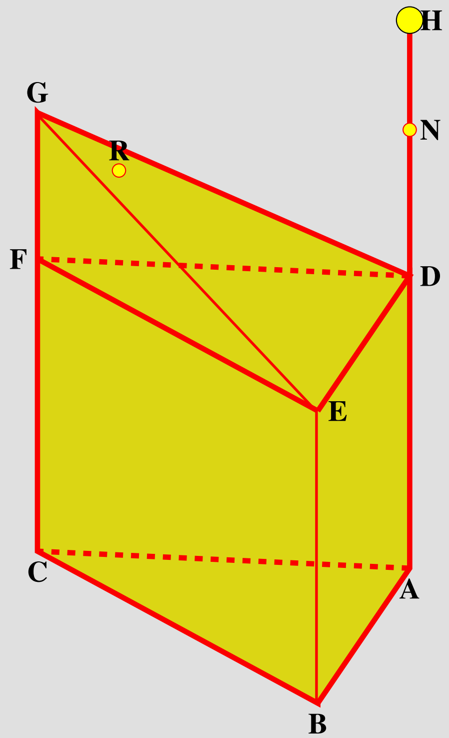
2 A quoi correspond le projeté orthogonal d'un point N sur un plan (P) ?

3 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère $A(2,0,1)$ et le plan $(P) : x+2y=2$.

Déterminer les coordonnées de A', projeté orthogonal de A sur (P).

Situation Problème

La figure ci-contre donne une représentation d'un batiment abritant les services d'une petite radio communautaire. **ABCDEF** est un prisme droit tel que , **ABC** est un triangle rectangle en **A**, **AB** $=7$m, **AC** $=5$m et **AD** $=4$m. **DEFG** est une pyramide telle que **FG** $=2$m. Le segment [**DH**] représente une antenne, et **N** est le point de [**DH**] tel que **DN** $=2$m. Le point **R** appartient à la face **DEG** et vérifie $\overrightarrow{GR} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GD})$. On souhaiterait placer deux barres droites lumineuses L_1 et L_2 toutes de longueurs minimales. L_1 reliant le point **N** à la face **DEG** et L_2 reliant le point **R** avec un point de [**DH**]. Quelles devraient être les longueurs respectives des barres L_1 et L_2.



Activités d'apprentissage

Activité 1

Soient (d) une droite, (P) un plan et M un point de l'espace n'appartenant ni à (d), ni à (P). on note par K et H les projetés orthogonaux respectifs de M sur (d) et (P). Justifier que MK est le plus petit élément de $\{MT/T \in (d)\}$ et que MH est le plus petit élément de $\{MT/T \in (P)\}$.

Activité 2

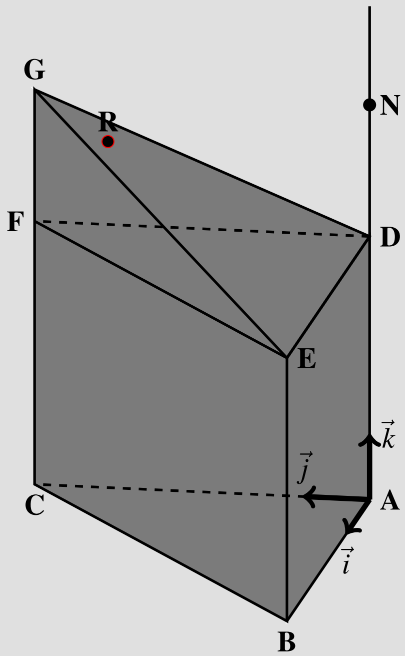
Ci-contre, dans un repère orthonormé $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on dispose d'un prisme droit ABCDEF où ABC est un triangle rectangle en A, AB $=7$, AC $=5$ et AD $=4$. DEFG est une pyramide telle que FG $=2$. et N est le point de la demi-droite [AD) tel que AN $=6$. Le point R vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GR} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GD})$.

1) Déterminer les coordonnées des points D, E, G, R et N.

2) Écrire une équation du plan (DEG), et donner une représentation paramétrique de la droite (AD).

3) On nomme par K le projeté orthogonal de N sur (DEG).
   a) Déterminer les coordonnées de K, et calculer NK.
   b) Que représente la distance NK ?

4) On nomme par H le projeté orthogonal de R sur (AD).
   a) Déterminer les coordonnées de H, et calculer RH.
   b) Que représente la distance RH ?



Activité 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (P) A est un point et $\vec{n}$ est un vecteur non nul de l'espace. On désigne par (P) le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Soit M un point de l'espace n'appartenant pas à (P), et K le projeté orthogonal de M sur (P).

1) a) Montrer que $|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}| = \mathrm{MK} \times \|\vec{n}\|$.

b) En déduire une expression de MK en fonction de $|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}|$ et $\|\vec{n}\|$.

2) On suppose que (P) a pour équation $ax+by+cz+d=0$, $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ et que $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$.

Montrer que $\mathrm{MK} = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Activité 4

(P) et (P') sont deux plans perpendiculaires suivant une droite (D). A est un point de l'espace qui n'appartient à aucun des plans (P) et (P'). H et H$'$ sont les projetés orthogonaux de A respectivement sur (P) et (P'). Soit B le projeté orthogonal de A sur (D) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D).

1) Justifier que A est distinct de chacun des points B, H, et H$'$.

2) On veut montrer que $\mathrm{B} \neq \mathrm{H}$ par l'absurde. Pour cela, on suppose $\mathrm{H} = \mathrm{B}$.

a) Justifier que $(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{AH}')$ et que $\mathrm{H}' \neq \mathrm{B}$.

b) Justifier que $(\mathrm{AH}') \perp (\mathrm{BH}')$, et en déduire que A, B et H$'$ alignés.

c) Trouver une contradiction et conclure.

3) a) En vous inspirant de la question 2), montrer que $\mathrm{B} \neq \mathrm{H}'$.

b) Montrer que $\mathrm{H} \neq \mathrm{H}'$.

4) a) Prouver que les points B, A et H définissent un plan qu'on notera (Q).

b) Établir que (Q) est le plan de vecteur de normal $\vec{u}$.

c) Démontrer que H$'$ appartient au plan (Q).

5) a) Montrer que : $(\mathrm{AH}) \perp (\mathrm{AH}')$, $(\mathrm{AH}) \perp (\mathrm{HB})$ et $(\mathrm{AH}') \perp (\mathrm{BH}')$.

b) Montrer alors que AHBH$'$ est un parallélogramme.

c) En déduire que AHBH$'$ est un rectangle.

6) Montrer alors que $\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AH}'^2}$.

Résumé

On suppose que l'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Distance d'un point à une droite de l'espace

Soit (Δ) une droite de repère $(\mathrm{A}, \vec{u})$, et M un point de l'espace, et H le projeté orthogonal de M sur (Δ).

◇ $\mathrm{H} \in (\Delta)$, et $\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

◇ La distance de M à la droite (Δ) est le réel noté $d(\mathrm{M}, (\Delta))$ tel que $d(\mathrm{M}, (\Delta)) = \mathrm{MH}$.

Remarques

➦ Pour déterminer les coordonnées de H connaissant celles de M, on procède comme suit :

On exprime les coordonnées de H en fonction d'un paramètre réel à partir d'une représentation paramétrique de (Δ), et la valeur du paramètre réel est déterminée en exploitant l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{MH}} \cdot \vec{u} = 0$.

➦ Lorsque $\mathrm{M} \in (\Delta)$, l'on a : $d(\mathrm{M}, (\Delta)) = 0$.

➦ $d(\mathrm{M}, (\Delta))$ est la plus petite distance entre M et un point quelconque de (Δ).

2. Distance d'un point à un plan

Soient $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan (P) passant par un point A donné de l'espace et M un point de l'espace, K le projeté orthogonal de M sur (P).

◇ $K \in (P)$ et $(MK) \perp (P)$.

◇ La distance de M à (P) est le réel noté $d(M,(P)$ tel que $d(M,(P)) = MK$.

◇ $d(M,(P)) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

◇ Si $(P) : ax + by + cz + d = 0$ avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ et $M(x_0;y_0;z_0)$, on a :

$d(M,(P)) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Remarques

➨ Pour déterminer les coordonnées de K connaissant celles de M, on procède comme suit :

- On exprime les coordonnées de H en fonction d'un paramètre réel λ à partir de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{Mk} = \lambda\vec{n}$ où $\vec{n}$ vecteur normal au plan (P).
- On détermine la valeur du paramètre réel en exploitant l'équation de (P).

➨ Lorsque $M \in (P)$, l'on a : $d(M,(P)) = 0$.

➨ $d(M,(P))$ est la plus petite distance entre M et un point quelconque de (P).

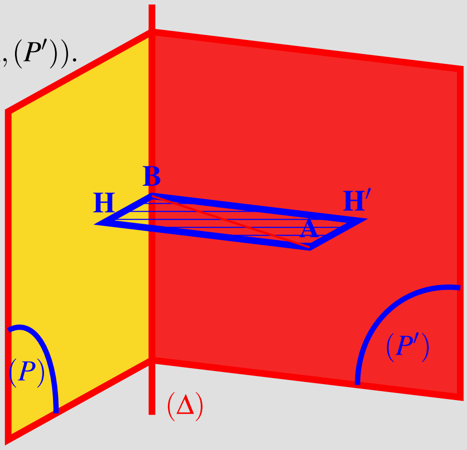
3. Distance d'un point à l'intersection de deux plans perpendiculaires

Soient (P) et (P') deux plans perpendiculaires suivant une droite (D), et A un point de l'espace n'appartenant à aucun de ces plans. On a :

- $d(A,(D)) = \sqrt{d^2+d'^2}$ où $d = d(A,(P))$ et $d' = d(A,(P'))$.

Soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (P) et (P'), B le projeté orthogonal de A sur (Δ). L'on a :

- $AHBH'$ est un rectangle.
- $AH^2 = AH^2 + AH'^2$.



Exercices d'applications

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 On donne les points : $A(0;2;0)$, $B(0;0;6)$, $C(4;0;0)$, $D(0;4;0)$ et $E(0;0;4)$.

On considère le plan (P) le plan d'équation $3y + z = 6$.

1) a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).

b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x + y + z = 4$.

2) a) Justifier que les plans (P) et (CDE) sont sécants. On note (Δ) leur intersection.

b) Déterminer un vecteur directeur de (Δ).

3) a) Déterminer les coordonnées de B' projeté orthogonal de B sur (CDE).

b) Déterminer les coordonnées de C' projeté orthogonal de C sur (Δ).

c) Déterminer alors $d(B,(CDE))$ et $d(C,(\Delta))$.

2 Soient les plans $(P) : 4x+2y-3z=6$ et $(P') : -3x+3y-2z+8=0$.

1) Montrer que (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Donner une représentation paramétrique de (Δ) intersection des plans (P) et (P').

3) Soit $A(1;2;1)$. Calculer $d(A,(P))$ et $d(A,(P'))$, puis en déduire $d(A,(\Delta))$.

Devoirs

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Soit le point $A(2;-1,3)$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $3x+y-2z=10$.

Calculer la distance de A à $(\mathcal{P})$.

2 $(\mathcal{P})$ est le plan d'équation $x+4y-z-4=0$, et $(\mathcal{D})$ est la droite dont un système d'équations est $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$. Déterminer un point M de $(\mathcal{D})$ tel que $d(M, (\mathcal{D}))=2$.

3 On considère les points $B(4;0;0)$, $C(0;-3;0)$ et $D(0;0;2)$.

1) Etablir que les points O, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) Calculer l'aire du triangle BDC et la distance du point O au plan (BDC).

3) En déduire le volume du tétraèdre OBDC.

Leçon 1 : Généralités sur les sphères

Compétences attendues :

- Reconnaitre qu'un ensemble des points de l'espace est une sphère.
- Caractériser l'intersection d'une sphère et d'une droite.
- Caractériser l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Contrôle de pré-réquis

Soient A et B deux points de l'espace, et $r \in]0;+\infty[$, et (P) un plan passant par A et B.

1. Quel est l'ensemble des points M de (P) tels que $\mathrm{AM} = r$?
2. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\mathrm{AM} = r$?
3. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ est-il un cercle ? Justifier.

Situation Problème

Soient un plan (P), A et O des points de l'espace tels que $\mathrm{A} \in (P)$, $\mathrm{O} \notin (P)$ et (0A) n'est pas orthogonal à (P). (Δ) est une droite variable de (P) passant par A. Ω est le milieu de [AO], H est le projeté orthogonal de O sur (Δ) et L est le projeté orthogonal de Ω sur (P). On pose $\mathrm{AO} = r$ et $d = \Omega\mathrm{L}$. Quel est l'ensemble décrit par H lorsque (Δ) pivote autour de A ?

Activités d'apprentissage

Activité 1

A est un point de l'espace, r est un réel strictement positif. (S) est la sphère de centre A, et de rayon r, (Δ) est une droite de l'espace, H est le projeté orthogonal de A sur (Δ).

On pose $d = \mathrm{AH}$.

1) On suppose que $d = r$. Montrer que (Δ) et (S) ont en commun le seul point H.

2) On suppose que $d > r$. Montrer que (Δ) et (S) n'ont aucun point en commun.

3) On suppose $d < r$, et on note par K et K′ les points de $\mathrm{HK} = \sqrt{r^2 - d^2}$ et $\mathrm{HK'} = \sqrt{r^2 - d^2}$.

   a) Montrer que les points K et K′ appartiennent à (S).

   b) Montrer que tout point M de (Δ) distinct de K et K′ n'appartient pas à (S).
   On distinguera les cas où $\mathrm{M} \in [\mathrm{KK'}]$, et $\mathrm{M} \notin [\mathrm{KK'}]$.

   c) Déterminer le nombre de points communs à (Δ) et (S).

Activité 2

O est un point de l'espace, (P) un plan et (S) une sphère de centre O et de rayon r. On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (P) et par d la distance de O à (P).

1) Soit M un point de l'espace. Montrer que : $\mathrm{M} \in (\mathrm{S}) \Leftrightarrow \mathrm{HM}^2 = r^2 - d^2$.
   (On distinguera deux cas : $\mathrm{H} = \mathrm{O}$ et $\mathrm{H} \neq \mathrm{O}$.)

2) Déterminer $(P) \cap (S)$ dans chacun des cas suivants :

a) $r < d$ b) $r = d$ c) $r > d$.

Activité 3

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne respectivement par (P_1), (P_2) et (P_3) les plans médiateurs des segments [AB], [AC] et [AD]. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) a) Que représentent respectivement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour les plans (P_1) et (P_2).

b) Justifier que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ).

c) Justifier que $(\Delta) \perp (AC)$ et $(\Delta) \perp (AB)$. En déduire que $O \in (\Delta)$ et que $(\Delta) \perp (ABC)$.

2) On suppose que $(\Delta) // (P_3)$. On désigne par $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ).

a) Justifier que $(\Delta) \perp (AD)$.

b) En déduire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

c) Est-il possible que (Δ) et (P_3) soient parallèles ?

3) En déduire qu'il existe un unique point Ω de l'espace équidistant de A, B, C et D.

Solutions des activités

Activité 1

Si $d = r$, alors $AH = r$, et ainsi H est un point commun à (Δ) et (S).

Soit T un point de (Δ) distinct de H. Le triangle ATH est rectangle en H car $(AT) \perp (\Delta)$.

Ainsi $AT > AH$. Comme $AH = r$, alors $AT > r$. Donc $T \notin (S)$.

En conclusion (Δ) et (S) ont en commun le seul point H.

2) On suppose que $d > r$. Montrons que (Δ) et (S) n'ont aucun point en commun.

Soit T un point de (Δ) distinct de H. On a $AT > AH$ ou encore $AT > r$. Donc $T \notin (S)$.

De plus $H \notin (S)$. Donc (Δ) et (S) n'ont aucun point en commun.

3) On suppose $d < r$. K et K′ sont les points de (Δ) tels que $HK = \sqrt{r^2 - d^2} = HK'$.

a) Montrons que les points K et K′ appartiennent à (S).

ATK et AEK′ sont des triangles rectangles en K.

Ainsi $AK^2 = HA^2 + HK^2$ et $AK'^2 = HA^2 + HK'^2$.

Le fait que $AH = d$ et $HK = \sqrt{r^2 - d^2} = HK'$ prouve $AK^2 = r^2 = AK'^2$.

D'où $AK = r$ et $AK' = r$. Ce qui prouve que K et K′ appartiennent à (S).

b) Montrons que tout point M de (Δ) distinct de K et K′ n'appartient pas à (S).

- Soit M un point de (Δ) distinct de H, K et K′ et appartenant à [KK′].
  Il existe un réel λ dans $]0;1[$ tel que $HM = \lambda\ HK$.
  HMA est un triangle rectangle en H, alors $AM^2 = HA^2 + HM^2 = d^2(1-\lambda^2) + \lambda^2 r^2$.
  $r^2 - AM^2 = (r^2 - d^2)(1-\lambda^2)$. Comme $1-\lambda^2 > 0$ et $r^2 - d^2 > 0$, alors $r^2 - AM^2 > 0$.
  D'où $AM < r$ et par conséquent $M \notin (S)$.
- Il est à noter que si $M = H$, $M \notin (S)$ car $AH = d$ et $d < r$.
- Soit M un point de (Δ) n'appartenant pas à [KK′].
  Il existe un reél λ plus grand que 1 tel que $HM = \lambda HK$.
  HMA est un triangle rectangle en H, alors $AM^2 = HA^2 HM^2 = d^2(1-\lambda^2) + \lambda^2 r^2$.
  $r^2 - AM^2 = (r^2 - d^2)(1-\lambda^2)$. Comme $1-\lambda^2 < 0$ et $r^2 - d^2 > 0$, alors $r^2 - AM^2 < 0$.

D'où AM $> r$ et par conséquent M $\notin (S)$.

c) Déterminons le nombre de points communs à (Δ) et (S).

De ce qui précède, (Δ) et (S) ont en commun deux points.

Activité 2

1) Soit M un point de l'espace. Montrons que : M $\in (S) \Leftrightarrow$ HM$^2 = r^2 - d^2$.

Si H = O, alors $d = 0$. M $\in (S) \Leftrightarrow$ OM$^2 = r^2 \Leftrightarrow$ OM$^2 = r^2 - d^2$ car $d = 0$.

Si H $\neq 0$, alors (OH) $\perp$ (HM) car (OH) $\perp (P)$ et (HM) $\subseteq (P)$.

Ainsi OHM est un triangle rectangle en H et HM^2 = OM^2 – OH^2.

D'où M $\in (S) \Longleftrightarrow$ HM$^2 = r^2 - d^2$ car OM $= r$ et OH $= d$.

2) a) Si $r < d$ alors $r^2 - d^2 < 0$. Dans ce cas $(P) \cap (S) = \emptyset$.

En effet si $(P) \cap (S) \neq \emptyset$, alors, d'après ce qui précède, il existe un point M tel que HM$^2 = r^2 - d^2$. Ce qui est impossible car $r^2 - d^2 < 0$.

b) Si $r = d$, et M est un point commun à (S) et (P), alors MH $= r^2 - d^2 = 0$.

Ainsi M = H et $(P) \cap (S) = \{$H$\}$.

c) Si $r > d$ et M est un point commun à (S) et (P), alors MH $r^2 - d^2$.

Ainsi $(P) \cap (S)$ est l'ensemble M des points de (P) tels que HM$^2 = r^2 - d^2$.

Cet ensemble est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$ vu que $r^2 - d^2 > 0$.

Activité 3

1) a) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (P_1) car (P_1) est le plan médiateur de [AB].

$\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (P_2) car (P_2) est le plan médiateur de [AC].

b) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (P_1) et $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (P_2) alors comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, on conclut que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ).

c) $(\Delta) \subset (P_1)$ et comme (AB)$\perp$ (P_1) alors $(\Delta) \perp$ (AB).

$(\Delta) \subset (P_2)$ et comme (AC)$\perp$ (P_2) alors $(\Delta) \perp$ (AC).

(Δ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC). Donc $(\Delta) \perp$ (ABC).

OA = OB = OC car O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Donc O $\in (P_1) \cap (P_2) = (\Delta)$. Ainsi O $\in (\Delta)$.

2) a) $(\Delta) \mathbin{/\!/} (P_3) \Leftrightarrow [(\Delta) \subset (P_3)]$ ou $[\exists$ une droite (d) telle que $(d) \subset (P_3)$ et $(\Delta) \mathbin{/\!/} (d)]$.

- Si $(\Delta) \subset (P_3)$, alors comme (AD) $\perp (P_3)$, on en déduit que $(\Delta) \perp$ (AD).
- S'il existe une droite (d) contenue dans (P_3) telle que (Δ) soit parallèle à (d).
  $(d) \subset (P_3)$, alors comme (AD) est orthogonale au plan (P_3), on a : $(d) \perp$ (AD).
  Comme $(d) \perp$ (AD) et $(d) \mathbin{/\!/} (\Delta)$, alors $(\Delta) \perp$ (AD).

b) Déduisons en que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Le plan (ABC) est le plan passant par A et ayant pour vecteur normal $\vec{u}$.

Comme $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, alors D $\in$ (ABC).

Ainsi les points A, B, C et D sont coplanaires.

c) Si (Δ) et (P_3) sont parallèles, alors A, B, C et D sont coplanaires. Impossible car ABCD est un tétraèdre. Donc (Δ) et (P_3) ne sont pas parallèles.

3) D'après ce qui précède, (Δ) et (P_3) sont sécants. Donc il existe un unique point X tel que $X \in (\Delta) \cap (P_3)$. Par la suite, l'on a : $AX = BX = CX$ et $AX = DX$. Prendre $X = \Omega$.

Commentaire :

Le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Résumé

1. Notion de sphère

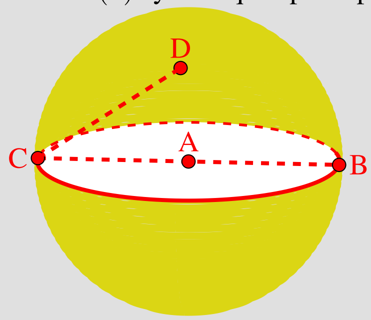
Définitions

Soit A un point de l'espace, et r un réel strictement positif.

- L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $AM = r$ est la sphère de centre A et de rayon r.
- Une corde d'une sphère (S) est un segment formé par deux points de (S).
- Un diamètre d'une sphère (S) est un segment formé par deux points de (S) symétriques par rapport au centre de (S).

Illustration

La figure ci-contre illustre une sphère (S) de centre A.
[BC] est un diamètre diamètre de (S).
[CD] est une corde de (S).



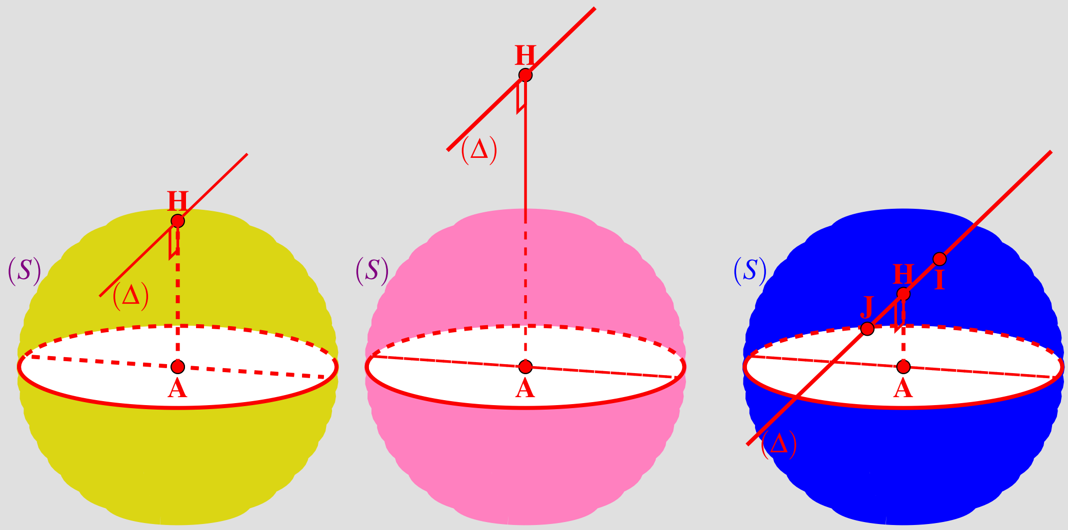
Propriété

Soient A et B deux points de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ est la sphère de diamètre [AB].

2. Position relative d'une droite et d'une sphère

Soit (Δ) une droite, (S) une sphère de centre A et de rayon r, H le projeté orthogonal de A sur (Δ), et d la distance de A à la droite (Δ).

- $d = r \Leftrightarrow (\Delta) \cap (S) = \{H\}$.
- $d < r \Leftrightarrow (\Delta) \cap (S) = \{I, J\}$ avec I et J les points de (Δ) tels que $HI = HJ = \sqrt{r^2 - d^2}$.
- $d > r \Leftrightarrow (\Delta) \cap (S) = \emptyset$.



(P) et (S) tangents en H. (P) et (S) disjoints. (P) et (S) sécants en I et J.

3. Position relative d'un plan et d'une sphère

Soit (P) un plan, O un point de l'espace dont le projeté orthogonal sur (P) est H et (S) la sphère de centre O et de rayon r. On note par d la distance de O au plan (P).

• $r < d \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \emptyset$.

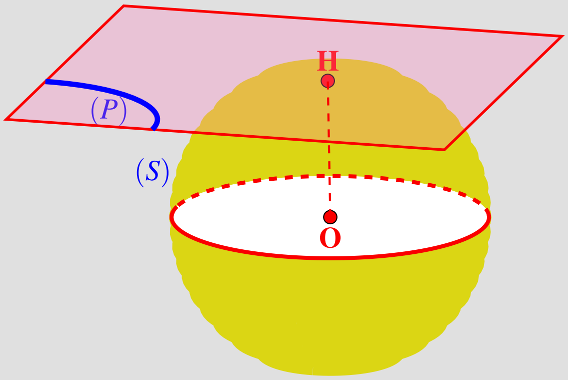
• $r = d \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \{\mathrm{H}\}$ est un singleton.

• Dans ce cas on dit que (P) et (S) sont tangents en H.

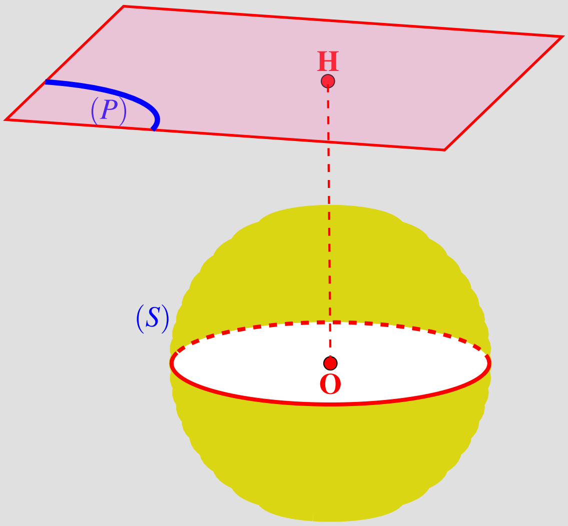
• $r > d \Leftrightarrow (P) \cap (S)$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$.

Dans ce cas, on dit que (P) et (S) sont sécants.

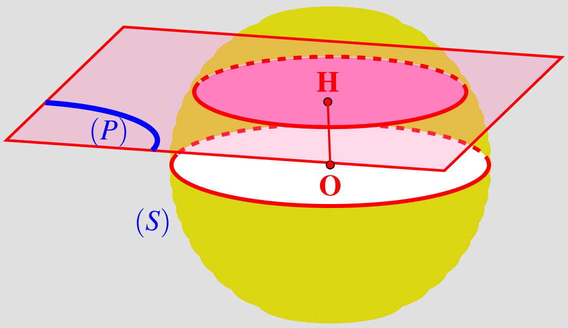
Illustration



(P) et (S) sont tangents en H.



(P) et (S) sont disjoints.



(P) et (S) sont sécants suivant un cercle.

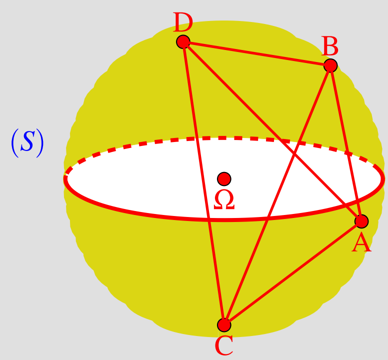
3. Sphère circonscrite à un tétraèdre

• Tout tétraèdre est inscriptible dans une sphère.

• Soit ABCD un tétraèdre. Il existe un unique point Ω de l'espace équidistant de A, B, C et D.

• Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

• Ω appartient aux plans médiateurs des arêtes de ABCD.



Exercice d'application

Soient un plan (P), A et O des points de l'espace tels que $A \in (P)$ et $O \notin (P)$, et (OA) n'est pas orthogonale à (P). (Δ) est une droite variable de (P) passant par A. Ω est le milieu de [AO], H est le projeté orthogonal de O sur (Δ) et L est le projeté orthogonal de Ω sur (P).

On pose $AO = r$ et $d = \Omega L$.

1) Montrer que lorsque (Δ) pivote autour de A, H décrit une sphère (S) dont on déterminera le centre et le rayon.

2) En déduire l'ensemble décrit par H lorsque (Δ) pivote autour de A.

Solution

1) (Δ) pivotant autour de A, montrons que H décrit une sphère de centre et rayon à préciser.

H est le projeté orthogonal de O sur (Δ), alors $(OH) \perp (\Delta)$ ou $H = A$.

- Si $H \neq A$, alors $(OH) \perp (AH)$ car $(AH) = (\Delta)$. Ainsi $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HO} = 0$. Ce qui prouve que H appartient à la sphère de diamètre [AO].
- Si $H = A$, H appartient à la sphère de diamètre [AO].

En conclusion lorsque (Δ) pivote autour de A, H décrit la sphère (S) de centre Ω et de rayon $\frac{r}{2}$.

2) En déduire l'ensemble décrit par H lorsque (Δ) pivote autour de A.

Lorsque (Δ) pivote autour de A, H appartient à (P) et à (S).

Le centre de (S) est Ω, et $d = d(\Omega, (P)) = \Omega L$.

$L \neq A$ car, si $L = A$, on aurait (OA) orthogonal à (P). Ce qui n'est pas le cas.

ΩAL est un triangle rectangle en L. Donc $\Omega L < \Omega A$. C'est à dire $d < \frac{r}{2}$.

En conclusion lorsque (Δ) pivote autour de A, H décrit le cercle de centre L, et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}r^2 - d^2}$.

Devoirs

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 1, et Γ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $3MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MD^2 = 3$. On note par H le centre de gravité de BCD, et par G la barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B,1)$; $(C,1)$ et $(D,1)$.

1) Écrire G comme barycentre des points A et H.

2) Montrer que $HB = HC = HD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3) a) Montrer que (AH) est orthogonale au plan (BCD).
   b) En déduire le projeté orthogonal de G sur (BCD).

4) a) Montrer que pour tout point M de l'espace, l'on a :
   $3MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MD^2 = 3GA^2 + 3GH^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).
   c) Étudier l'intersection de (Γ) avec le plan (BCD).

Leçon 2 : Équation d'une sphère

Compétences attendues :

➟ Écrire une équation d'une sphère.

➟ Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace muni d'un repère orthonormé vérifiant $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

➟ Utiliser les équations pour déterminer l'intersection d'une sphère avec une droite ou un plan.

Contrôle de pré-réquis

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne les points $A(2;1;4)$ et $B(-1;2;3)$.

1. Écrire sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+d$ le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ où $M(x,y,z)$.
2. Exprimer MA^2 en fonction de x, y et z, où $M(x,y,z)$.
3. Traduire à l'aide d'une égalité le fait que M appartient à la sphère de centre A et de rayon 1.

Situation Problème

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité le mètre, un oiseau repérable par un point M mobile, se déplace en gardant une distance constante de 2 m d'un point $A(1;2;3)$ de l'espace. Quelle est la trajectoire décrite par l'oiseau ? Quelle est la distance qui sépare l'oiseau du point $B(7,1,1)$ lorsque M a une côte positive, a pour abscisse 1 et ordonnée $\sqrt{2}$?

Activité d'apprentissage

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(1;2;3)$ et $B(7;1;1)$. On note (S) la sphère de centre A et de rayon 2.

1) Soit $M(x,y,z)\in(S)$.

a) Quelle relation vérifient x, y et z ?

b) Déterminer z lorsque $x=1$ et $y=\sqrt{2}$.

2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-14x-2y-2z+42=0$

3) Soit (Q) le plan d'équation $x-2y+2z=0$.

a) Déterminer les coordonnées de C, projeté orthogonal de B sur (Q).

b) Étudier l'intersection de (S) et (Q).

Solution de l'activité

1) Soit $M(x,y,z)\in(S)$.

a) Relation vérifiée par x, y et z.

$M\in(S)\Leftrightarrow MA=2\Leftrightarrow MA^2=4\Leftrightarrow(x-7)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4.$

Une relation vérifiée par x, y et z est : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$.

Commentaire : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ est une équation de (S).

b) Déterminons z lorsque $x=1$ et $y=\sqrt{2}$.

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4\Rightarrow(\sqrt{2}-2)^2+(z-3)^2=4\Rightarrow(z-3)^2=-2+4\sqrt{2}.$

On trouve $z=\sqrt{-2+4\sqrt{2}}+3$ ou $z=-\sqrt{-2+4\sqrt{2}}+3$.

2) Nature et éléments caractéristiques de (Γ) l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-14x-2y-2z+42=0$.

Soit $\mathrm{M}(x,y,z)\in(\Gamma)$. On a $x^2+y^2+z^2-14x-2y-2z+42=0$. Par la suite,
$(x-7)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-7^2-1^2-1^2+42=0$. Ainsi
$(x-7)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ et $\mathrm{BM}=3$.
D'où (S) est a la sphère de centre B et de rayon 3.

3) Soit (Q) le plan d'équation $x-2y+2z=0$.

a) Coordonnées de C, projeté orthogonal de B sur (Q).

Soit (x,y,z) le triplet de cordonnées de C. On a : $x-2y+2z=0$, et il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\lambda\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal de (Q).
Ainsi $x=\lambda+7$, $y=-2\lambda+1$, $z=2\lambda+1$ et $x-2y+2z=0$.
On obtient $9\lambda=-7$. D'où $\mathrm{C}(\frac{56}{9};\frac{23}{9};-\frac{5}{9})$.

b) Étude de l'intersection de (S) et (Q).

La distance de B à (Q) est $d=\dfrac{|7-2+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{7}{3}$.

Le rayon de (S) est 3 et $\dfrac{7}{3}<3$. D'où l'intersection de (S) avec (Q) est

le cercle de centre C, et de rayon $\sqrt{3^2-\left(\dfrac{7}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$.

Résumé

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Équation d'une sphère

Soient un point $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}},z_{\mathrm{A}})$, et (S) la sphère de centre A et de rayon r.

- (S) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ tels que $(x-x_{\mathrm{A}})^2+(y-y_{\mathrm{A}})^2+(z-z_{\mathrm{A}})^2=r^2$.
- La relation $(x-x_{\mathrm{A}})^2+(y-y_{\mathrm{A}})^2+(z-z_{\mathrm{A}})^2=r^2$ est l'équation réduite de (S).
- Si (Γ) est une sphère, il existe des réels a, b, c et d tels que la relation $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ soit une équation de (Γ).

2. Ensemble (T) des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, avec a, b, c et d réels donnés.

En posant $\lambda=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}-d$, on a :

- $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{c}{2}\right)^2-\lambda$.
- Si $\lambda=0$, alors $(T)=\{\Omega\}$ où $\Omega\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$.
- Si $\lambda<0$, alors $(T)=\emptyset$.
- Si $\lambda>0$, alors (T) est la sphère de centre $\Omega\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

3. Système d'équations d'un cercle dans l'espace

Soient a,b,c,a',b',c',d', λ et r des réels tels que $r>0$, $(a',b',c')\neq(0,0,0)$ et $\lambda=\dfrac{|aa'+bb'+cc'+d|}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$.

Pour $\lambda < r$, on a :

• $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \\ a'x+b'y+c'z+d=0 \end{cases}$ est le système d'équations d'un cercle (C) de l'espace.

• Le centre de (C) est le projeté orthogonal de $\Omega(a,b,c)$ sur le plan d'équation $a'x+b'y+c'z+d=0$.

• Le rayon de (C) est égal à $\sqrt{r^2-\lambda^2}$.

Remarque :

Dans l'espace, on ne parle pas d'équation de cercle, mais d'un système d'équations de cercle.

Devoirs

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1 On désigne par (S) une sphère.

Ecrire une équation de (S) dans chacun des cas suivants :

1 (S) a pour diamètre [AB] où $A(1;3;-4)$ et $B(5;3;1)$.

2 (S) Ea pour centre $\Omega(0;2;1)$, et est tangent à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=3t \\ y=t+1 \quad ; t\in\mathbb{R}. \\ z=5t \end{cases}$$

3) (S) a pour centre $D(2;-2;5)$ et tangent au plan d'équation $x-2y+3z=4$.

2 (Γ) est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant le système ci-dessous :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z+31=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$$

1) Montrer que (Γ) est un cercle.

2) Déterminer les coordonnées du centre de (Γ), ainsi que le rayon de (Γ).

3 On désigne par (Δ) la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-2;-1;2)$ et passant par le point $A(3;-3;1)$. (S) est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-x+2y-4z+3=0$.

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (S).

2) Donner une représentation paramétrique de (Δ).

3) Prouver que (S) et (Δ) sont tangents.

4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (S) et (Δ).

4 (S) est une sphère de rayon 1, passant par le point $A(1;2;2)$, et tangente à chacun des plans d'équations $x=0$ et $3x-4y=0$.

Déterminer les coordonnées du point I, centre de (S).

5 On donne les points $O(0;0;0)$, $A(3;2;6)$, $B(1;2;4)$ et $C(4;-2;5)$.

1) a) Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

b) Écrire une équation du plan (ABC).

2) G est le barycentre des points pondérés (O, 3) ; (A, 1) ; (B, 1) et (C, 1).

Déterminer les coordonnées de O.

3) (Γ) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 5$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma) \cap (ABC)$.

c) Étudier la position relative de (Γ) et la droite (AB).

MODULE 22 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

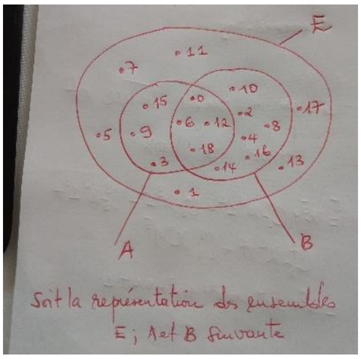
CHAPITRE : DENOMBREMENT

INTERET : ……………………………………………………………………………

MOTIVATION :

Dans la vie courante, on est souvent appelé à travailler sur des groupes de personnes, d'animaux ou d'objets, voir s'ils appartiennent au même ensemble ou même encore voir s'ils sont compatibles…cette leçon aide donc les apprenants à résoudre ces problèmes ou exercices avec une certaine aisance.

PRE-REQUIS :



Soit la représentation sagittale des ensembles E, A et B suivante.

1. Ecrire en extension les ensembles E, A et B puis préciser le cardinal de chacun d'eux.
2. Existe-t-il des éléments de A qui ne sont pas dans E ? que dit-on des ensembles A et E ?
3. Ecrire l'extension des éléments de E qui ne sont pas dans A. comment nomme-t-on cet ensemble ? quel est le nombre de ces éléments ?

LECON 1: LES ENSEMBLES

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève devra :

- Déterminer le cardinal d'un ensemble.
- Déterminer les éléments de la réunion, de l'intersection ou encore du complémentaire d'un ensemble.

SITUATION PROBLEME :

Sharon s'amuse à énumérer tous les multiples de 2 compris entre 30 et 50 dans un ensemble appelé A ; tous les multiples de 5 compris entre 30 et 50 dans un ensemble appelé

B. elle voudrait savoir si ces ensembles sont finis. De plus, son petit frère, Benjamin, qui fait la classe de PD, lui dit que 31 n'est pas dans l'intersection des deux ensembles. Le petit frère a-t-il raison ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 30 et 50 ; D l'ensemble des entiers naturels multiples de 2 compris entre 30 et 50 et F ; l'ensemble des entiers naturels multiples de 5 compris entre 30 et 50.

1. Énumérer tous les éléments de D, E et F.

Les éléments de D sont : 30 ; 32 ; 34 ; 36 ; 38 ; 40 ; 42 ; 44 ; 46 ; 48 ; 50 ; 52 ; 54 ; 56 ; 58 ; 60.

Les éléments de E sont : 30 ; 31 ; 32 ; 33 ; 34 ; 35 … ; 47 ; 48 ; 49 ; 50

Les éléments de F sont : 30 ; 35 ; 40 ; 45 et 50.

2. Déterminer le nombre d'éléments de ces ensembles.
   Card E=21 ; Card D=16 et Card F=5
3. Énumérer tous les éléments de E qui sont à la fois dans D et dans F.
   Ces éléments sont : 30 ; 40 et 50

RESUME :

Soit n un entier naturel et A un ensemble.

- A est un **ensemble fini** si on peut compter tous ses éléments.
- A est un ensemble fini si on peut établir une bijection de $\{1,\ 2, 3 \dots n\}$ vers A.
- Le **cardinal** d'un ensemble fini A est le nombre d'éléments de l'ensemble A. on le note **Card A**.

PROPRIETES :

Soient A, B et E trois ensembles finis.

- A est inclu dans B si tout élément de A est élément de B. on note $A \subset B$ et on a :
  $\mathbf{A \subset B \leftrightarrow \forall x \in A; x \in B.}$

Exemple :………………………

- Le complémentaire de A dans E noté $\complement_E^A$ *ou encore* $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Exemple : $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ et $A = \{0, 2; 4; 6; 8\}$. Alors $\complement_E^A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

- La **réunion** de A et B et notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B.
- L'**intersection** de A et B et notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont à la fois dans A et dans B.

Exemple :

Remarque : Deux ensembles A et B sont disjoints $A \cap B = \emptyset$.

AUTRES PROPRIETES :

- Si $A \subset B$ alors, $Card\ A \leq Card\ B$.
- Si Card E=n et Card A=p ; alors Card $C_E^A = n - p$.
- $Card(A \cup B) = Card\ A + Card\ B - Card(A \cap B)$.
- $Card\ \emptyset = 0$.

Exemple :

Dans une classe de PD de 100 élèves, 50 jouent au foot, 60 au hand et 80 pratiquent au moins l'un des deux sports. Déterminer le nombre d'élèves qui :

1. Pratique à la fois les deux sports.
2. Pratique seulement le football.
3. Pratique seulement le handball.
4. Ne pratique aucun des deux sports.

Solution : ………………………..

AUTRES DEFINITIONS :

- Soit E un ensemble non vide. Un ensemble de parties de E forme une partition de E si :

✓ Elles sont non vides.
✓ Elles sont deux à deux disjointes.
✓ Leur réunion est égale à E.

Exemple : soit l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Alors les ensembles $A = \{0,2,4,6\}$ et $B = \{1,3,5\}$ forment une partition de E.

Il en est de même pour les ensembles $R = \{0,1,2\}$; $S = \{3,6\}$ et $T = \{4,5\}$.

- Soient A et B deux ensembles non vides. On appelle **produit cartésien de A par B** l'ensemble noté **A x B** et défini par : $A \times B = \{(a; b); a \in A; b \in B\}$.

  Exemple : $= \{0,1,2\}$ et $B = \{1,3\}$

Remarque : **Card(AxB)=Card A x Card B .**

Définition:

Soient $A_1; A_2; \dots; A_n$ des ensembles non vides. On appelle Produit Cartésien de $A_1; A_2; \dots; A_n$ l'ensemble noté $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ tels que $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1;\ a_2; \dots;\ a_n);\ a_1 \in A_1;\ a_2 \in A_2; \dots a_n \in A_n\}$

PROPRIETES :

- $Card\ (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = Card\ (A_1) \times Card\ (A_2) \times \dots \times Card(A_n)$.
- $A \times A = A^2$ et $A \times A \times A = A^3$.
- Si $A \neq B$ alors $A \times B \neq B \times A$.
- Si $A = \emptyset\ ou\ B = \emptyset; alors\ A \times B = \emptyset$.

EXERCICES D'APPLICATION :

1. On jette deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Déterminer :
   a) Le nombre de résultats possibles.
   b) Le nombre de résultats dont la somme est égale à 5.
2. Le menu d'un restaurant est constitué d'une entrée, d'un plat de résistance, d'un dessert et d'une boisson. Ce restaurant dispose de 5 types d'entrées, 7 plats de résistance, 4 desserts et 5 boissons.
   a) Combien y a-t-il de menus possibles ?
   b) Combien de menus comportent le menu numéro 2 ?
   c)

LEÇON 2: P-UPLETS, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève devra :

- Utiliser un tableau à double entrée ou un arbre de choix pour compter
- Dénombrer les p-listes, les arrangements de p éléments ou encore les combinaisons de p éléments d'un ensemble fini.

SITUATION PROBLEME :

Un jeu consiste à tirer 3 billes parmi 6. Boris fait un tirage successif en remettant à chaque fois la boule tirée ; Christian fait aussi un tirage successif sans toutefois remettre la boule tirée et Samuel tire simultanément ses trois boules. Parmi ces trois joueurs, lequel effectue le plus grand nombre de tirages ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 6. On tire successivement 4 fois de suite 1 jeton du sac en remettant à chaque fois le jeton tiré avant d'effectuer le tirage qui suit. Déterminer le nombre de résultats de 4 jetons dans l'ordre des tirages.

Le nombre de résultats dans l'ordre des tirages est : $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

RESUME :

DEFINITION :

Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle **p-uplet** de E tout élément de E^p. On a : $E^p = E \times E \times ... \times E$.

Propriété :

Le nombre de p-uplet de E est $\boldsymbol{Card(E^p) = n^p}$.

Exemple : soit $E = \{0, 4, a, b\}$. Alors le nombre de 4-uplet de E est 4^4. Le nombre de 7-uplet de E est 4^7

Définition :

Soient A et B deux ensembles non vides. Une **application de A vers B** est toute correspondance qui à chaque élément de A associe un et un seul élément de B.

Exemple : De combien de façons peut-on ranger 10 livres dans une armoire à 4 compartiments ? Chaque compartiment pouvant contenir les 10 livres ?

R : il s'agit ici de trouver le nombre d'applications d'un ensemble de 10 éléments vers un ensemble à 4 éléments. $\boldsymbol{4^{10}}$

Remarque :

- Un p-uplet est une disposition ordonnée dans laquelle un même élément peut-être repété jusqu'à p fois.
- On utilise les p-uplets dans une épreuve à tirages successifs avec remise.
- Soit E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p. Alors le nombre d'applications de E vers F est n^p.

Exemple : Un sac contient deux boules blanches, 4 rouges et 5 noires toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise 3 boules du sac. Déterminer le nombre de tirages :

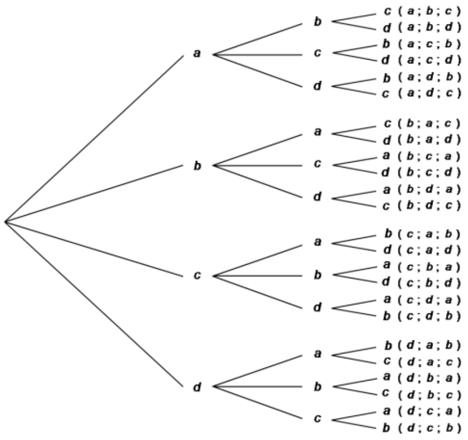
a) Possibles.
b) Contenant 3 boules noires.
c) Contenant 3 boules rouges.
d) Contenant 3 boules unicolores.
e) Contenant une seule boule noire.

Remarque :

Pour compter, on peut aussi faire appel à un arbre de choix ou alors à un tableau à double entrée.

Exemple :

- Former des mots de 3 lettres 2 à 2 distincts à l'aide des éléments de l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$.



- On lance deux dés cubiques parfaits. Quel est le nombre de lectures de numéros sur la face supérieure ? Pour ce faire, nous utiliserons un tableau à double entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Au total, nous avons….

DÉFINITION :

Soit E un ensemble à n éléments, p un entier naturel non nul plus petit que n. On appelle **arrangement** de p élément de E, tout p-uplet formés d'éléments 2 à 2 distincts.

PROPRIÉTÉ :

Soit E un ensemble à n éléments, p un entier naturel non nul plus petit que n. le nombre d'arrangements de p éléments de E est $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.

Remarque :

- Un arrangement est une disposition ordonnée sans répétition.
- On utilise les arrangements dans une épreuve à tirage successifs sans remise.

Exemple : soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, u, y\}$

1. Le nombre d'arrangements de 3 éléments de E est…

Le nombre d'arrangements de 6 éléments de E est…

2. Dans une course à 08 coureurs, on donne un prix aux trois premiers. Déterminer le nombre de podiums possibles sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo.

PROPRIÉTÉ :

Soit $n \in IN^*$. On pose $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$. $''\, n!''$ se lit **factorielle n**.
Par convention, $0! = 1$

Exemple : 4 !=…… 6 !=………………

DÉFINITION :

Soit $n \in IN^*\ et\ p \leq n$. Alors **n !=n(n-1) !** et $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

On a : $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

DÉFINITION :

Soit $f: A \to B$ une application. f est injective si deux éléments distincts de A ont deux images distinctes par f. ie $\forall x, y \in A; x \neq y \leftrightarrow f(x) \neq f(y)$.

Remarque : si A et B sont deux ensembles finis non vides et $: A \to B$ une application injective, alors $CardA \leq CardB$.

PROPRIÉTÉ :

Soit $n \in IN^*\ et\ p \leq n$. Alors le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

PROPRIÉTÉ :

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. On appelle **permutation de E** tout arrangement des n éléments de E.

Remarque : une permutation de E est une application bijective de E vers E.

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n élément est $A_n^n = n!$

Remarque : soit le mot AFRIQUE. Le nombre d'anagrammes d'AFRIQUE est 7 !

DEFINITION :

Soit $n \in IN^*\ et\ p \leq n$. On appelle **combinaison** de p éléments de E toute partie (sous ensemble) de E ayant p élément.

PROPRIÉTÉ :

Soit $n \in IN^*\ et\ p \leq n$. Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est $\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$.

Remarque : Soit $n \in IN^*$. On a : $\boldsymbol{C_n^0 = 1}$; $\boldsymbol{C_n^1 = n}$; $\boldsymbol{C_n^n = 1 \ \ et \ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}}$.

- Une combinaison est une disposition non ordonnée et sans répétition.
- On utilise les combinaisons dans une épreuve à tirages simultanés.

Exemple : 15 projecteurs sont disponibles pour éclairer un laboratoire scientifique. De combien de façons peut on l'eclairer avec exactement 08 projecteurs ?

Exemple 2 : on veut constituer un comité de 05 membres dans une classe de 50 élèves contenant 20 garçons.

a) Quel est le nombre de résultats possibles ?
b) Quel est le nombre de comités contenant exactement 3 garçons ?
c) Quel est le nombre de comités contenant au moins deux filles ?

PROPRIETES :

Soit $n \in IN^* \ et \ p \leq n$. Alors

- $\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}$ **et** $\boldsymbol{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p}$ (Cette égalité est appelée **triangle de Pascal**). C'est une présentation des coefficients binomiaux dans un triangle.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

- Soient a et b deux nombres réels ; n un entier naturel non nul. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Cette égalité est appelée **Binôme de Newton**.

Exemple : Développer de manière performante $(x+1)^5$....

(L'enseignant développe en explicitant ligne après ligne aux élèves …)

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Lors du congrès d'une association ayant 20 membres, on veut designer un bureau constitué d'un président, un secrétaire, un trésorier et un censeur. Cette association compte 08 femmes.

I. Dans le cas où il y'a cumul de poste,

1. Combien de bureaux différents peut-on former ?
2. Combien de bureaux sont constitués de femmes ?

II. Il n'ya pas de cumul de poste

1. Combien de bureaux peut-on former ?
2. Combien de bureaux contiennent deux hommes ?
3. Combien de bureaux contiennent au plus deux hommes ?

III. Une urne contient 5 boules blanches, 4 rouges et 3 bleues. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Combien y a-t-il de manières de tirer :

1. Aucune boule rouge ?
2. Exactement une boule rouge ?
3. Exactement deux boules rouges ?
4. Trois boules rouges ?
5. Trois boules quelconques ? que remarque-t-on ?
6. Trois boules de couleurs différentes deux à deux ?
7. Au moins une boule rouge ?

Module 23 : Configuration et transformation élémentaire du plan

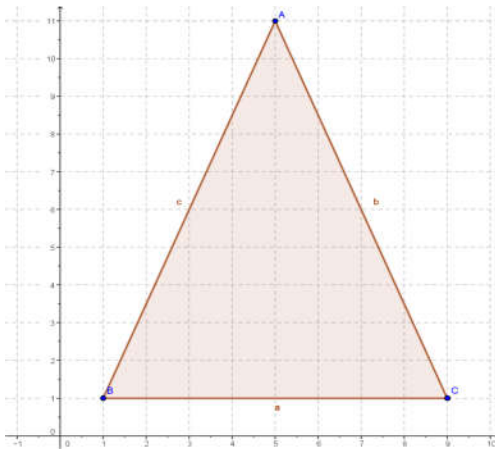
Chapitre : Géométrie analytique du plan

Motivation :
On sait calculer la distance entre deux points ; qu'en est il de la distance d'un point à une droite ?
Pré requis :
- Calcul de la distance entre deux points
- Représentation d'une droite et d'un cercle dans un repère orthonormé
- Trigonométrie

Objectifs : L'apprenant doit être capable de
- Déterminer la distance d'un point à une droite
- Déterminer l'équation normale d'une droite
- Déterminer l'équation paramétrique d'un cercle
- Equation des tangentes à un cercle passant par un point

Situation problème :

Le terrain de M Olka à la forme du triangle ci-contre. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique le mètre, on repère les sommets $A\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$.
M Olka désire placer un puits d'ouverture circulaire de $1m$ de diamètre près du sommet A de telle sorte que les bords du puits soient tangents aux droites (AB) et (AC). Aider M Olka à déterminer les coordonnées du centre du puits



Leçon 1 : droites du plan

Objectifs : L'apprenant doit être capable de
- Déterminer la distance d'un point à une droite
- Déterminer l'équation normale d'une droite

1. Distance d'un point à une droite

Activité
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Représenter la droite (D) d'équation $x + y - 3 = 0$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Que représente le vecteur $\vec{u}$ pour la droite (D) ?
2) Déterminer l'équation de la droite (L) passant par le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
3) Comment sont les droites (D) et (L) ? Déterminer le point de contact H entre ces droites et calculer la distance AH.

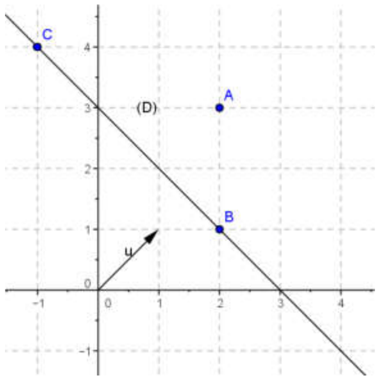
4) Comparer la distance AH à $\frac{|x_A+y_A-3|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|x_A+y_A-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}$ puis conclure.

5) Reprendre l'exercice avec la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ et le point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.

6) Déterminer alors les cordonnées du point I situé à demi mètre de chacune des droites (AB) et (AC) de la situation problème.

Solution

1) Représenter la droite (D) d'équation $x + y - 3 = 0$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que représente le vecteur $\vec{u}$ pour la droite (D) ?



Le vecteur $\vec{u}$ représente le vecteur normal de la droite (D).

2) Déterminer l'équation de la droite (L) passant par le point $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (L)$. $det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Longrightarrow x - y + 1 = 0$ c'est l'équation de la droite (L)

3) les droites (D) et (L) sont perpendiculaires. Le point de contact H se détermine en résolvant le système :

$\begin{cases} x + y - 3 & = & 0 \\ x - y + 1 & = & 0 \end{cases}$ et on obtient $H\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la distance $AH = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

4) Comparer la distance AH à $\frac{|x_A+y_A-3|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|x_A+y_A-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}$ puis conclure.

$\frac{|x_A+y_A-3|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|x_A+y_A-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|2+3-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = AH$. Donc $AH = \frac{|x_A+y_A-3|}{\|\vec{u}\|} = dist((D), A)$

5) Reprendre l'exercice avec la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ et le point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.

Tout calcul fait, on obtient $dist((D), A) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6) Exercice !

Définitions

D1. L'équation $ax + by + c = 0$ avec a, b des réels tous non nul et c un réel, est appelée équation cartésienne d'une droite (D).

- On appelle vecteur normal à (D) le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dont la direction est perpendiculaire à celle de (D).
- On appelle vecteur directeur de (D) le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dont la direction est parallèle à celle de (D).

D2. L'équation $y = mx + d$ avec m et d des réels, est appelée équation réduite d'une droite (D)

- Le réel m est le coefficient directeur ou la pente de la droite. Dans l'activité précédente, $m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \tan(\widehat{(D), \vec{\imath}}) = -1$
- Le réel d est l'ordonnée à l'origine. Pour l'activité, $d = 3$

D3. On appelle équation paramétrique de la droite (D) de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et passant par le point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$, le système d'équations : $\begin{cases}x & = & at + x_A\\y & = & bt + y_A\end{cases}$ avec t un réel non nul.

Propriété

Soient la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ et le point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$. La distance du point A à la droite (D) est donnée par : $dist\big((D), A\big) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice d'application.

On considère la droite (D) d'équation : $3x + 4y - 2 = 0$ et les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

1) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ et un vecteur directeur $\vec{v}$ de (D) et déduire son équation paramétrique.
2) Calculer la distance de chacun des points A et B à la droite (D).
3) Déterminer l'équation de chacune des droites passant par A, l'une perpendiculaire à (D) et l'autre parallèle à (D).
4) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite (D).

Solution

2. Positions relatives des droites

Propriétés

P1. Soient (D) et (D') deux droites de vecteurs normaux et directeurs respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$.

- (D) et (D') sont perpendiculaires si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 0$ ou bien si $\vec{v}\cdot\overrightarrow{v'} = 0$.
- (D) et (D') sont parallèles si le déterminant $det\big(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\big) = 0$ ou bien si $det\big(\vec{v}, \overrightarrow{v'}\big) = 0$ ou encore si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

P2. Soient (D) et (D') deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + d$ et $y = m'x + d'$

- (D) et (D') sont perpendiculaires si $m \times m' = -1$
- (D) et (D') sont parallèles si $m = m'$.

Exercice d'application

3. Equation normale

Activité

Considérons la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$

1) Calculer $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$ puis montrer l'existence d'un réel θ tel que l'équation de (D) puisse se mettre sous la forme $x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$ avec k à préciser.
2) Montrer que la distance d'un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ à la droite (D) est donnée par : $dist\big((D), A\big) = |x_A\cos\theta + y_A\sin\theta + k|$

Solution

1) $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$ or $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $cos^2\alpha+sin^2\alpha=1$ donc $\exists\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$. En divisant l'équation de (D) par $\sqrt{a^2+b^2}$ on obtient : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \Rightarrow x\cos\theta+y\sin\theta+k=0$. Avec $k=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
2) La distance d'un point $A\binom{x_A}{y_A}$ à la droite (D) est donnée par : $dist\big((D),A\big)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_A+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_A+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=|x_A\cos\theta+y_A\sin\theta+k|$

Définition

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. L'équation $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ est appelée équation normale de la droite (D).

Propriété

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$

P1. Il existe un réel $\theta\in\,]-\pi;\pi]$ tel que l'équation normale de (D) s'écrive $x\cos\theta+y\sin\theta+k=0$ avec $k=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

P2. La distance d'un point $A\binom{x_A}{y_A}$ à la droite (D) est donnée par : $dist\big((D),A\big)=|x_A\cos\theta+y_A\sin\theta+k|$.

Exercice d'application

Déterminer l'équation normale de la droite (D) d'équation $x+y+\sqrt{2}=0$ puis déduire la distance du point $A\binom{0}{\sqrt{2}}$ à la droite (D)

Solution

Leçon 2. Cercle du plan

Objectifs : L'apprenant doit être capable de

- Déterminer l'équation paramétrique d'un cercle
- Equation des tangentes à un cercle passant par un point

1. Equation paramétrique d'un cercle

Activité

Soit (Γ) l'ensemble des points situés à R centimètre du point $\Omega\binom{a}{b}$. R, a, et b sont des réels.

1) Quelle est la nature de (Γ) ?
2) Montrer que l'équation de (Γ) peut se mettre sous la forme $\left(\frac{x-a}{R}\right)^2+\left(\frac{y-b}{R}\right)^2=1$.
3) Déduire l'existence d'un réel θ tel que l'équation de (Γ) puisse se mettre sous la forme :
$\begin{cases} x &= R\cos\theta+a \\ y &= R\sin\theta+b \end{cases}$

Solution

1) (Γ) est le cercle de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon R
2) soit M $\binom{x}{y}\in(\Gamma)$. On a : $\Omega M=R \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow \left(\frac{x-a}{R}\right)^2+\left(\frac{y-b}{R}\right)^2=1$ (1)

3) On sait que $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ donc d'après (1), $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \frac{x-a}{R} & = & \cos\theta \\ \frac{y-b}{R} & = & \sin\theta \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x & = & R\cos\theta + a \\ y & = & R\sin\theta + b \end{cases}$.

Définition

La représentation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon R est donnée par :

$\begin{cases} x & = & R\cos\theta + a \\ y & = & R\sin\theta + b \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

Exercice

Déterminer l'équation paramétrique du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

Solution

2. Positions relatives des cercles et des droites

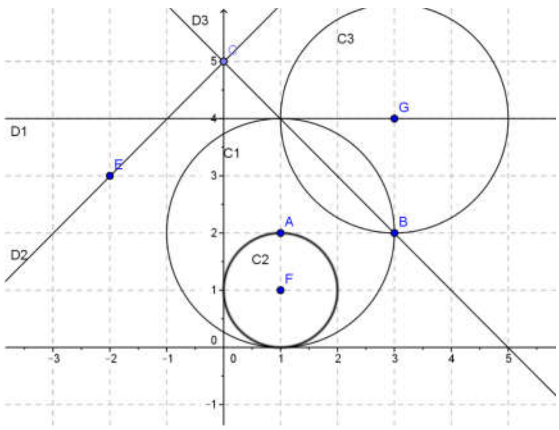
Activité

Soient (C_1), (C_2) et (C_3) les cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$. Désignons par A, F et G les centres respectifs des cercles (C_1), (C_2) et (C_3). Soient les droites (D_1), (D_2) et (D_3) d'équations respectives $y - 4 = 0$, $x - y + 5 = 0$ et $x + y - 5 = 0$.

1) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les cercles (C_1), (C_2) et (C_3) et les droites (D_1), (D_2) et (D_3).
2) Calculer les distances du centre A du cercle (C_1) respectivement aux droites (D_1), (D_2) et (D_3) puis déduire les règles des positions d'une droite par rapport à un cercle. Déterminer si possible les coordonnées des points de contact
3) Calculer la distance AG comparer à $R_1 + R_3$ et à $|R_1 - R_3|$. A partir de cette comparaison, donner une règle par rapport à la position de deux cercles. Faire de même pour les distances AF et FG

Solution

1) Figure ci-contre.
2) $dist\big(A, (D_1)\big) = \frac{|y_A - 4|}{\sqrt{0^2+1^2}} = 2 = R_1$ Et on remarque que la droite (D_1) et le cercle (C_1) sont tangents.
$dist\big(A, (D_2)\big) = \frac{|x_A - y_A + 5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2 = R_1$.
On remarque que la droite (D_2) et le cercle (C_1) sont disjoints.
$dist\big(A, (D_3)\big) = \frac{|x_A + y_A - 5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2 = R_1$.
On remarque que la droite (D_3) et le cercle (C_1) sont sécants en deux points.



Les coordonnées des points de contact pour le premier et le dernier cas sont données par la résolution des systèmes $S_1\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 & = & 0 \\ y & = & 4 \end{cases}$ et $S_3\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 & = & 0 \\ x + y - 5 & = & 0 \end{cases}$ formés des équations des ensembles (C_1) et (D_1) d'une part et (C_1) et (D_3) d'autre part.

3) $AG = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$ on a $|R_1 - R_3| = 0 < AG < 4 = R_1 + R_3$ c'est-à-dire $|R_1 - R_3| < AG < R_1 + R_3$. On remarque aussi que les cercles (C_1) et (C_3) sont sécants. Les coordonnées

des points de contact se déterminent par la résolution du système formé par les équations de (C_1) et (C_3)

Propriétés

P1. Soient (D) une droite, (C) un cercle de centre Ω et de rayon R.

- $dist(\Omega,(D)) > R$ si et seulement si (D) et (C) sont disjoints
- $dist(\Omega,(D)) = R$ si et seulement si (D) et (C) sont tangents
- $dist(\Omega,(D)) < R$ si et seulement si (D) et (C) sont sécants en deux points disjoints

P2. Soient (C_1) et (C_2) deux cercles de centres respectifs Ω_1, Ω_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2

- (C_1) et (C_2) n'ont aucun point commun si et seulement si $\Omega_1\Omega_2 < |R_1 - R_2|$ ou $\Omega_1\Omega_2 > R_1 + R_2$. (C_1) et (C_2) sont dits disjoints.
- (C_1) et (C_2) ont un point commun si et seulement si $\Omega_1\Omega_2 = R_1 - R_2$ ou $\Omega_1\Omega_2 = R_1 + R_2$. (C_1) et (C_2) sont dits tangents
- (C_1) et (C_2) ont exactement deux points commun si et seulement si $R_1 - R_2 < \Omega_1\Omega_2 < R_1 + R_2$. (C_1) et (C_2) sont dits sécants

Exercice d'application

Soient (C_1) le cercle de centre $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ de rayon $R_1 = 2$ et (C_2) le cercle de centre $B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et de rayon $R_2 = 1$.
Etudier la position des cercles (C_1) et (C_2) et déterminer si possible les coordonnées des points de contact.

Solution

3. Tangente en un point du cercle

Activité

Soient (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point de (C) et (T) la tangente à (C) en A. Désignons par Ω le centre de (C). Sachant que (ΩA) est perpendiculaire à (T), déterminer l'équation cartésienne de (T) et ,ontrer qu'elle peut se mettre sous la forme $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$

Solution

Propriété

Soient (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point de (C) et (T) la tangente à (C) en A. Désignons par Ω le centre de (C). L'équation de (T) est donnée par $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$

Exercice d'application

Déterminer l'équation de la tangente au cercle de centre l'origine O et de rayon $R = \sqrt{2}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

4. Tangente en un point extérieur au cercle

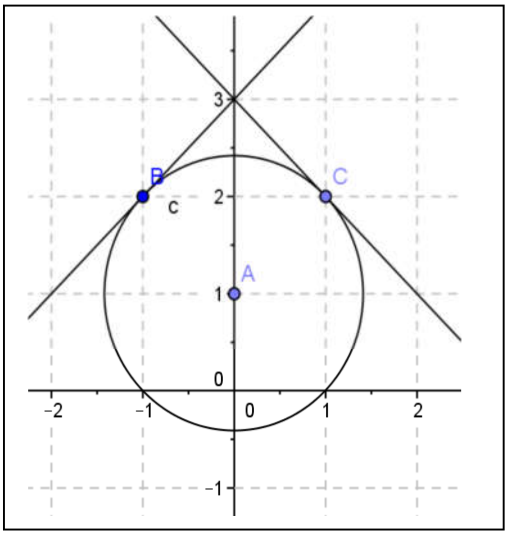
Activité

Soient (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$, $E\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$. On veut déterminer les tangentes à (C) passant par E. Soit $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point de (C)

1) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en M_0.
2) Déterminer les coordonnées du points M_0 pour que cette tangente passe par E
3) Déduire alors l'équation des tangentes à (C) passant par E.

Solution

1) Equation de la tangente (T) à (C) en M_0 : $xx_0 + yy_0 - (y + y_0) - 1 = 0$.
2) Coordonnées du points M_0 pour que (T) passe par E. $E\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \in (T) \Longrightarrow 3y_0 - y_0 - 3 - 1 = 0$ donc $y_0 = 2$ (1) en plus $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \in (C) \Longrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 1 = 0$. D'où le système $\begin{cases} y_0 & = & 2 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 1 & = & 0 \end{cases}$. On à donc $x_0^2 = 1 \Longrightarrow x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$. Les coordonnées des points M sont donc $M_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
3) Les équations des tangentes à (C) passant par E sont les équations des droites $(EM_1) : x + y - 3 = 0$ et $(EM_2) : x - y + 3 = 0$.



Propriété

Soient (C) un cercle et P un point.

- P est à l'extérieur du cercle si et seulement s'ils existent deux tangentes à (C) passant par P.
- P est sur le cercle si et seulement s'il existe une unique tangente à (C) passant par P.
- P est à l'intérieur du cercle si et seulement s'il n'existe pas de tangente à (C) passant par P.

Exercice d'application

Soient (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ et les points $P\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $R\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il n'existe pas de tangente à (C) passant par R.
2) Montrer qu'ils existent deux tangentes à (C) passant par P.
3) Déterminer les équations des tangentes à (C) passant respectivement par les points Q et P.