



La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

**PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)**

**Exercice 1 : (5 points)**

1. Calculer la valeur exacte de  $\tan \frac{\pi}{8}$ . 1pt
2. On considère dans  $\mathbb{R}$  le polynôme  $p(x) = 8x^3 - 4(2 + \sqrt{2})x^2 - 2(3 - 2\sqrt{2})x + 3\sqrt{2}$ .
  - 2.1. Montrer que  $-\frac{1}{2}$  est une racine de  $p$ . 0,25pt
  - 2.2. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $p(x) = (2x + 1)(ax^2 + bx + c)$ . 0,75pt
  - 2.3. (a) Développer  $(3 - \sqrt{2})^2$ , puis déduire la valeur exacte de  $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ . 0,5pt  
(b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $4x^2 - 2(3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$ , puis déduire la résolution de l'équation  $p(x) = 0$ . 1pt
  - 2.4. On considère sur  $]-\pi; \pi]$  l'équation : (E) :  $8\cos^3 x - 4(2 + \sqrt{2})\cos^2 x - 2(3 - 2\sqrt{2})\cos x + 3\sqrt{2} = 0$ .
    - a) Résoudre (E). 1pt
    - b) Déduire la résolution sur  $]-\pi; \pi]$  les solutions de l'inéquation  $8\cos^3 x - 4(2 + \sqrt{2})\cos^2 x - 2(3 - 2\sqrt{2})\cos x + 3\sqrt{2} \leq 0$ . 0,5pt

**Exercice 2 : (5 points)**

- I. On pose  $a = \cos \frac{\pi}{5}$  et  $b = \sin \frac{\pi}{5}$ .
  1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $4x^2 - 2x - 1 = 0$ . 0,5pt
  2. Exprimer  $\sin \frac{2\pi}{5}$  en fonction de  $a$  et  $b$ . 0,25pt
  3. Justifier que  $\cos \frac{2\pi}{5} = 2a^2 - 1 = 1 - 2b^2$ . 0,5pt
  4. En déduire que  $\sin \frac{3\pi}{5} = b(4a^2 - 1)$ . 0,75pt
  5. Justifier que  $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$ . 0,25pt
  6. En déduire que  $a$  est solution de l'équation  $4x^2 - 2x - 1 = 0$ . 0,75pt
  7. Déduire les valeurs exactes de  $a$  et  $b$ . 1pt
- II.
  1. Montrer que  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ . 0,5pt
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$ . 0,5pt

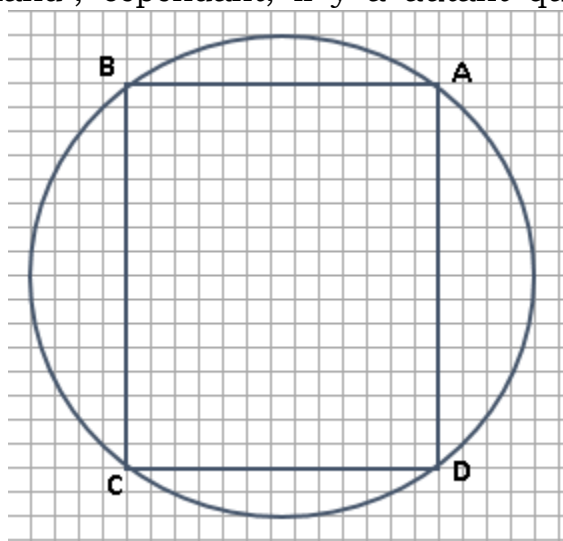
**Exercice 3 : (5 points)**

1. Donner le nombre d'anagrammes du mot "MATHEMATIQUES". 0,75pt

2. Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 2 boules jaunes on tire au hasard et simultanément 5 boules dans l'une.
- a) Combien de tirages possibles peut-on avoir ? **0,5pt**
- b) Combien de tirages peut-on avoir si on tire exactement 2 boules vertes et 2 boules jaunes ? **0,5pt**
- c) Combien de tirages peut-on avoir si on tire au moins 2 boules rouges ? **0,75pt**
3. a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système: 
$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 6x + 3y + 4z = 380 \\ 2x + y + z = 125 \end{cases}$$
 **1,5pt**
- b) Deux hommes d'affaires organisent une partie de chasse aux antilopes, aux autruches et aux oies. A leur retour, on lit sur le rapport de chasse : « 90 têtes et 250 pattes d'animaux tués ». Le transporteur perçoit une somme de 190 000 Frs à raison de 3 000Frs par antilope, 1 500Frs par autruche et 2 000 Frs par oies. L'autruche a deux pattes, l'antilope quatre et l'oie en a deux. Combien d'antilopes, d'autruches et d'oies ont été ramenés de cette partie de chasse ? **1pt**

### **PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)**

L'entreprise DUDEN forme les étudiants en langues étrangères parmi lesquelles l'Allemand (A), le Chinois (C) et le Latin (L). Parmi 96 apprenants, 10 font les trois langues à la fois, 50 font le Chinois, 40 font le Latin et 56 font l'Allemand ; cependant, il y a autant qui apprennent seulement le Latin que ceux qui apprennent seulement le l'Allemand et le Chinois. Le nombre de ceux qui apprennent seulement l'Allemand et le Latin est la moitié de ceux qui apprennent seulement Chinois. Le nombre de ceux qui apprennent seulement l'Allemand est le triple de ceux qui apprennent seulement le Chinois et le Latin. Cette entreprise possède un terrain de jeux. Le premier terrain a la forme d'un carré ABCD dont les sommets sont des points images sur le cercle trigonométrique d'unité graphique 10m (comme l'indique la figure ci-contre), des solutions sur  $]-\pi ; \pi[$  de l'équation  $A(x) = 0$  où  $A(x) = 4\sin^2 x - 3$  ; il veut recouvrir cela des gazons qu'on vend le mètre carré à 5000 FCFA. Les membres de l'entreprise voudraient faire une surprise au directeur. Pour la fabrication du gâteau, ils veulent inscrire l'âge du directeur sur ce gâteau, mais ne savent pas son âge. Mais son petit frère se rappelle que son âge actuel est  $n + 44$  tel que  $n$  soit solution de l'équation  $C_n^2 = 3$ .



1. Déterminer le nombre d'apprenants qui étudient exactement une seule langue. **1,5pt**
2. Déterminer la dépense à effectuer pour recouvrir le terrain. **1,5pt**
3. Quel est l'âge du directeur ? **1,5pt**

**Présentation : 0,5pt**

*Bonne chance !*



**CORRIGÉ HARMONISÉ**

Examen : **PROBATOIRE D&TI Séquence 2**

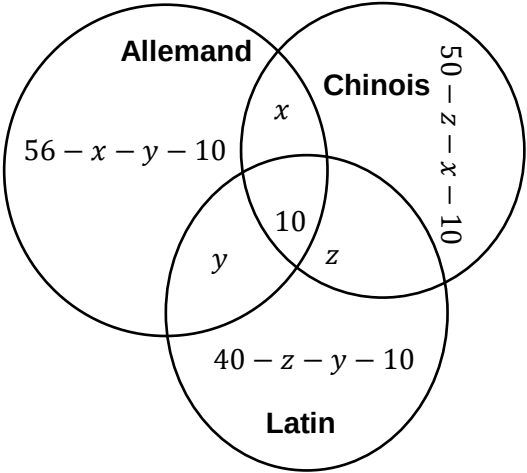
COEFFICIENT : 4

Épreuve : **Mathématiques**

| Partie A : Évaluation des ressources (15 points)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Barème                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Exercice 1 :                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 5 points                                                                                                                                                                                   |
| <p>1. Calculons <math>\tan \frac{\pi}{8}</math>.</p> <p>Partant de <math>\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}</math> et <math>\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}</math>, on a <math>\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}</math> soit <math>\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}</math>. De la même manière, <math>\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}</math>. Ainsi, <math>\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{2} = -1 + \sqrt{2}</math>. D'où <b><math>\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}</math></b>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <p><b>0,5pt</b> pour la valeur de <math>\sin \frac{\pi}{8}</math> et <math>\cos \frac{\pi}{8}</math>.<br/><b>0,5pt</b> pour le résultat.</p>                                               |
| <p>2.</p> <p>2.1. Montrons que <math>-\frac{1}{2}</math> est une racine p.</p> <p><math>p\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4(2+\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2(3-2\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\sqrt{2} = -3 + 3 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0</math>. D'où le résultat.</p> <p>2.2. Déterminons les réels <math>a</math>, <math>b</math> et <math>c</math>.</p> <p><math>p(x) = (2x+1)(4x^2 - 2(3+\sqrt{2})x + 3\sqrt{2})</math>. Ainsi, <math>a = 4</math>, <math>b = -2(3+\sqrt{2})</math> et <math>c = 3\sqrt{2}</math>.</p> <p>2.3. Résolution :</p> <p>a) Développons : <math>(3-\sqrt{2})^2 = 3^2 - 2(3)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}</math>. La valeur exacte de <math>\sqrt{11-6\sqrt{2}} =</math></p> <p><math>\sqrt{(3-\sqrt{2})^2} =  3-\sqrt{2}  = 3-\sqrt{2}</math> car <math>3 &gt; \sqrt{2}</math></p> <p>- <math>4x^2 - 2(3+\sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0</math> équivaut à <math>\Delta = 4(11-6\sqrt{2}) = 4(3-\sqrt{2})^2</math> donc, <math>\sqrt{\Delta} = 2(3-\sqrt{2}) = 6-2\sqrt{2}</math>. <math>x = \frac{6+2\sqrt{2}-6+2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math> ou <math>x = \frac{3}{2}</math>. Soit <math>S_{IR} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}\right\}</math>.</p> <p>- <math>p(x) = 0</math> équivaut à <math>S_{IR} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}\right\}</math></p> | <p><b>0,25pt</b></p> <p><b>0,25pt</b> par valeur trouvée.</p> <p><b>0,25pt</b> pour <math>11 - 6\sqrt{2}</math> et <b>0,25pt</b> pour <math>\sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}</math>.</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>2.4. a) Résolution de <math>p(\cos x) = 0</math>.</p> <p>Des questions présentes et en posant <math>X = \cos x</math> avec <math>-1 \leq X \leq 1</math> on ne peut que prendre <math>X = -\frac{1}{2}</math> et <math>X = \frac{\sqrt{2}}{2}</math>. Soit</p> $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ <p>L'encadrement de <math>k</math> dans <math>]-\pi; \pi]</math> fournit une valeur unique <math>k = 0</math>. Soit <math>\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}</math> et <math>\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} \end{cases}</math>. D'où <math>S_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right\}</math>.</p> <p>b) La solution de l'inéquation <math>p(\cos x) \leq 0</math> est <math>S_{]-\pi; \pi]} = \left] -\pi; -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{2\pi}{3}; \pi \right]</math></p>               | <p><b>0,25pt</b> pour <math>\Delta = 44 - 24\sqrt{2}</math>.</p> <p><b>0,25pt</b> pour chaque valeur de <math>x</math>.</p> <p><b>0,25pt</b> pour <math>S_{IR} = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2} \right\}</math>.</p> <p><b>1pt</b> pour <math>p(\cos x) = 0</math></p> <p><b>0,5pt</b> pour le résultat.</p> |
| <b>Exercice 2 :</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>I. On pose <math>a = \cos \frac{\pi}{5}</math> et <math>b = \sin \frac{\pi}{5}</math>.</p> <p>1. Résolution de <math>4x^2 - 2x - 1 = 0</math></p> <p>Le discriminant est <math>\Delta = 20</math> soit <math>x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}</math> et <math>x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}</math>.</p> <p>2. Expression de <math>\sin \frac{2\pi}{5}</math> en fonction de <math>a</math> et <math>b</math>.</p> $\sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = 2ab.$ <p>3. Justifions</p> $\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = 2a^2 - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - 2b^2.$ <p>4. Dédisons <math>\sin \frac{3\pi}{5} = b(4a^2 - 1)</math>.</p> $\sin \frac{3\pi}{5} = \sin \left( \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \right) = \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = b(2a^2 - 1) + 2a^2b = b(2a^2 + 2a^2 - 1) = b(4a^2 - 1).$ <p>5. Justifions que <math>\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}</math>.</p> $\sin \frac{3\pi}{5} = \sin \left( \pi - \frac{2\pi}{5} \right) = \sin \pi \cos \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} \cos \pi = \sin \frac{2\pi}{5}.$ <p>6. Dédisons que <math>a</math> est solution de cette équation.</p> <p>De la question 2, 4 et 5, on obtient <math>2ab = b(4a^2 - 1)</math> soit <math>4a^2 - 2a - 1 = 0</math>.</p> | <p><b>5 points</b></p> <p><b>0,5pt</b></p> <p><b>0,25pt</b></p> <p><b>0,5pt</b></p> <p><b>0,75pt</b></p> <p><b>0,25pt</b></p> <p><b>0,75pt</b></p>                                                                                                                                                                                  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>7. Nous déduisons de la question 1, que <math>a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}</math> et <math>b = \frac{1-\sqrt{5}}{4}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                          | <p><b>0,5pt</b></p>                                                                                                                           |
| <p>Exercice : 3</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p><b>5 points</b></p>                                                                                                                        |
| <p> b) <math>\frac{13!}{2!2!2!2!} = 389188800</math>.<br/> c) a) <math>C_9^5 = 126</math> tirages.<br/> d) <math>C_4^2 \times C_2^2 \times C_3^1 = 18</math> tirages<br/> e) <math>C_3^2 \times C_6^3 + C_3^3 \times C_6^2 = 75</math> tirages<br/> 3. a) La résolution du système conduit à l'unique couple solution (35; 50; 5). </p> | <p> <b>0,75pt</b><br/> <b>0,5pt</b><br/> <b>0,5pt</b><br/> <b>0,75pt</b><br/> <b>0,25pt</b> pour la méthode et <b>0,25pt</b> par valeur. </p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>b) En posant <math>x</math> le nombre d'antilopes, <math>y</math> le nombre d'autruches et <math>z</math> le nombre d'oies, on obtient le système de la question précédente. Ainsi, <math>x = 35, y = 50</math> et <math>z = 5</math>. On a donc 35 antilopes, 50 autruches et 5 oies</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p><b>0,25pt</b> par couple solution et <b>0,5pt</b> pour le changement de variable.</p>                                     |
| <p align="center"><b>Partie B : Evaluation des compétences (5 points)</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                              |
| <p>1. Nombre d'apprenants qui étudient exactement une seule langue.<br/>Diagramme de VENN :</p>  <p>Il y a autant qui apprennent seulement le Latin que ceux qui apprennent seulement le l'Allemand et le Chinois c'est-à-dire que <math>x = 40 - z - y - 10</math>. Soit <math>x + y + z = 30</math>. (1)<br/> Le nombre de ceux qui apprennent seulement l'Allemand et le Latin est la moitié de ceux qui apprennent seulement Chinois c'est-à-dire que <math>y = \frac{1}{2}(50 - x - z - 10)</math> soit <math>x + 2y + z = 40</math>. (2)<br/> Le nombre de ceux qui apprennent seulement l'Allemand est le triple de ceux qui apprennent seulement le Chinois et le Latin c'est-à-dire que <math>56 - x - y - 10 = 3z</math> soit <math>x + y + 3z = 46</math>. (3)<br/> (1), (2) et (3) nous donnent le système <math>\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x + 2y + z = 40 \\ x + y + 3z = 46 \end{cases}</math>. La résolution conduit à <math>x = 10, y = 12</math> et <math>z = 8</math>.<br/> Le nombre d'apprenants qui étudient uniquement une seule langue est <math>96 - (x + y + z + 10) = 96 - 40 = 56</math> apprenants.</p> <p>2. <b>Dépense pour recouvrir le terrain</b><br/> - Trouvons la nature du terrain :</p> | <p><b>05pt</b> pour le diagramme.<br/> <b>0,5pt</b> pour la résolution du système.<br/> <b>0,5pt</b> pour la conclusion.</p> |

