

L.B.MBOUDA	EVALUATION N° 2 NOVEMBRE 2024		ANNEE 2024-2025
DEPARTEMENT DE MATHS	CLASSES : T ^{le} C	Durée : 4H Coef : 7	Par M. KEUZEU ERICK

PARTIE A: EVALUATION DES RESSOURCES : 15 points

Exercice 1 : 5points

1 . On considère la fonction f définie sur $[-1; 1] \setminus \{0\}$ par $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- | | |
|--|---------------|
| a) Calculer les limites de f à gauche et à droite de 0, puis interpréter les résultats obtenus | 0,75pt |
| b) Dresser le tableau de variation de f | 0,5pt |
| c) Montrer que f réalise une bijection de $]0; 1[$ vers un intervalle J que l'on précisera | 0,25pt |
| d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ | 0,75pt |
| e) Représenter dans un repère orthonormé les courbes (C) de f et (C') de f^{-1} | 0,5pt |

2 . Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(\cos(x))$

- | | |
|---|---------------|
| a) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = 1 + \tan(x)$ | 0,5pt |
| b) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ | 0,5pt |
| c) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle K que l'on précisera | 0,25pt |
| d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que pour tout $x \in K$ $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ | 1pt |

Exercice 2 : 5 points

I / 1) Montrer que les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $29x - 13y = 6$ (E) sont $x = 2 + 13K$ et $y = 4 + 29K$
Avec $K \in \mathbb{Z}$.

0,75pt

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $X^{19} \equiv -2[29]$ (E')

- | | |
|---|---------------|
| 2) Justifier que $2^{28} \equiv 1[29]$ et en déduire que -8 est solution de (E') | 0,5pt |
| 3) Soit X_0 une solution de (E') | |
| a) Montrer que $X_0^{28} \equiv 1[29]$ | 0,25pt |
| b) Montrer que $X_0^{57} \equiv -8[29]$, puis que $X_0 \equiv -8[29]$ | 0,75pt |
| c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E') | 0,25pt |
| d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x - 3)^{19} \equiv -2[29]$ | 0,25pt |
| 4) Déduire dans $\mathbb{Z}$ les solutions de l'équation $\begin{cases} (x - 3)^{19} \equiv -2[29] \\ (x - 3)^{13} \equiv -2[13] \end{cases}$ | 0,75pt |

II / 1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :
 $\text{PGCD}(3n^3 - 11n; n + 3) = \text{PGCD}(48; n + 3)$

0,5pt

b) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 48

0,25pt

c) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ est un entier naturel

0,75pt

Exercice 3 : 5,5points

I – E est un espace vectoriel dont une base est $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

φ est l'endomorphisme de E tel que : $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$; $\varphi(\vec{j}) = \vec{j} - \vec{k}$ et $\varphi(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{k}$

- | | |
|--|---------------|
| 1) a) Démontrer que le système $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ est un système lié | 0,5pt |
| b) φ est-il un isomorphisme de E ? | 0,25pt |
| 2) Déterminer l'expression analytique de φ | 0,25pt |
| 3) Déterminer $\text{Ker } \varphi$ et donner une base de $\vec{e}_1$ | 0,5pt |
| 4) Démontrer que $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{k}))$ est une base de $\text{Im } \varphi$. | 0,5pt |
| 5) Démontrer que $(\vec{e}_1, \varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{k}))$ est une base de E. | 0,5pt |
| Ecrire la matrice de φ relativement à cette base | 0,5pt |

II – Le plan complexe $\mathbb{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A d'affixe $2i$.

Soit φ l'application de $\mathbb{P} \setminus \{A\} \rightarrow \mathbb{P}$ et qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$

- 1) Montrer que $M' \neq A$ 0,5pt
- 2) Soient B et C les points d'affixes respectives $-i$ et $5i$. Montrer que B et C sont invariants par φ 0,5pt
- 3) Montrer que si M appartient à la droite (BC) privée de A alors son image M' par φ appartient à (BC) 0,5pt
- 4) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2$ on a $|z' - 2i| \cdot |z - 2i| = 9$ 0,5pt
 b) En déduire que pour tout point M appartenant au cercle (Γ) de centre A et de rayon 3, le point M' appartient à (Γ). 0,5pt

PARTIE 2 : EVALUATION DES COMPETENCES : 5 points

Une entreprise a des difficultés pour conserver certains de ses objets.

Le chef magasinier suggère l'utilisation des caisses de deux types.

- Les caisses de type B ayant la forme d'un pavé droit de hauteur L à base carrée de côté l où L et l sont des nombres entiers naturels non nuls tels que $l < L$
- Les caisses de type C de forme cubique, dont l'arête c est un entier naturel non nul.

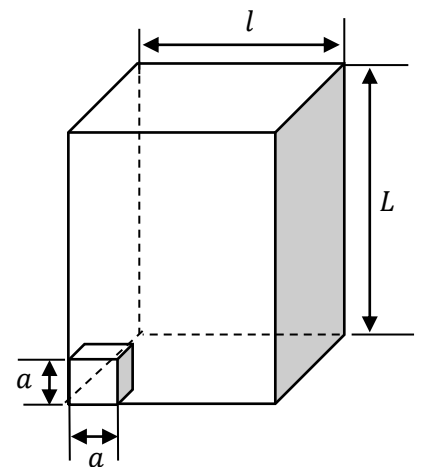
Il suggère également les différentes façons de les ranger.

Rangement 1 : Pour conserver les objets cubiques tous identiques dont l'arête a est un nombre entier non nul, on peut les ranger dans une caisse de type B de dimensions $l = 882$ et $L = 945$, de manière que la caisse soit complètement remplie sans laisser d'espace vide.

Rangement 2 : Pour la conservation des objets cubiques dont la plus grande valeur de l'arête a est 12, on peut les ranger dans une caisse de type B dont le volume est $v = 77760$ de manière que la caisse soit remplie sans laisser d'espace vide.

Rangement 3 : Lorsque l'entreprise disposera de plusieurs caisses de type B de même volume $v' = 15435$, on pourra les empiler verticalement dans une caisse de type C dont la plus petite arête possible est $c = 105$ de manière à ne laisser aucun espace vide dans la caisse C.

NB : Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité et on n'effectue aucune conversion pour passer aux volumes.



Tâches

1. Pour le rangement 1, déterminer toutes les valeurs possibles de l'arête a 1,5pt
 2. Donner les dimensions possibles de la caisse B dans le rangement 2. 1,5pt
 3. Quelles sont les dimensions l et L de la caisse B dans le rangement 3 ? 1,5pt
- Présentation :** 0,5pt