Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3,25 points)

1. **(a)** En utilisant l'algorithme d'Euclide, montre que 56 et 15 sont premiers entre eux. **0,5pt**
   (b) Déduis-en un couple (u,v) d'entiers relatifs tel que : $56u+15v=1$. **0,5pt**
2. **(a)** Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $56x \equiv 2[15]$. **0,5pt**
   (b) Détermine les coordonnées des points, d'abscisses naturelles inférieures ou égales à 37 de la droite ($\mathscr{D}$) d'équation : $56x-15y-2=0$. **0,5pt**
3. Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = 5^{4n+2} - 11^{2n+2}$.
   (a) Démontre par récurrence sur n que A_n est divisible par 4. **0,5pt**
   (b) A l'aide de la congruence arithmétique, montre que A_n est divisible par 3. **0,5pt**
   (c) Déduis-en en citant le théorème utilisé que A_n est divisible par 12. **0,25pt**

EXERCICE 2 : (4 points)

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)z - 1 = 0$. **1pt**
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = \frac{1}{2}(-1+i)$ et $z_C = \overline{z_A}$.
   (a) Détermine les ensembles (Γ_1) et (Γ_2) des points M d'affixe z du plan tels que : **1pt**
   (Γ_1) : $\left(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4$ $\qquad$ (Γ_2) : $|2z+1-i| = 2CM$.
   (b) Détermine $mes\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)$ et déduis-en la nature du triangle OCA. **0,5pt**
3. Dans $\mathbb{C}$, on considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 + 3z^2 - 6z + 10$.
   (a) Montre que si z_0 est racine du polynôme P, alors $\overline{z_0}$ l'est aussi. **0,25pt**
   (b) Calcule $P(1+i)$ et déduis-en deux solutions de l'équation $P(z)=0$. **0,5pt**
   (c) Achève la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$. **0,75pt**

EXERCICE 3 : (3,75 points)

A) Le tableau ci-dessous donne le bénéfice en millions de FCFA d'une ferme avicole qui importe les poussins sur une période de 5 mois.

x_i (en mois)	1	2	3	4	5
y_i (en millions de FCFA)	$96,1$	$63,5$	$49,2$	$41,5$	$35,7$

1. Donne une équation de la droite de régression de y en x. **1pt**
2. Estime le bénéfice de la ferme avicole au sixième mois. **0,5pt**

B) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de base $\mathscr{B} = \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ qui associe à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\varphi\left(\vec{u}\right) = (y+z)\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} + x\vec{k}$.

1. Ecris la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**

2. Détermine $\ker\varphi$ et en donne une base $\overrightarrow{e_1}$, puis $\operatorname{Im}\varphi$ et en donne une base $\left(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$. **1pt**

3. Montre que $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-y+z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. **0,75pt**

EXERCICE 4 : (4 points)

A) On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0=6 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{U_n}+\dfrac{3}{4}U_n, n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1. Détermine U_1 et U_2. **0,5pt**
2. Démontre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, U_n\geq\sqrt{3}$. **0,5pt**
3. Etudie les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{4}x$. **1pt**
4. Déduis-en par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. **0,5pt**
5. Démontre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et détermine sa limite. **0,5pt**

B) Pour chaque item, choisi la lettre correspondant à la bonne réponse en justifiant ton choix.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Le complexe $(1+i)^n$ est imaginaire pur si, et seulement si :
   a) $n=4k$; b) $n=2+4k$; c) $n=8k$ $(k\in\mathbb{Z})$ **0,5pt**
2. Si $\theta\in]0;2\pi[$, alors $\dfrac{1+e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1}$ est égale à : a) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$; b) $\dfrac{i\sin\theta}{1-\sin\theta}$; c) $-i\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

<u>SITUATION</u> :

M. NANGA, fondateur d'un établissement secondaire a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire annuel de 750.000 FCFA. Après quelques mois de travail, une grève des enseignants pour la revalorisation de leur salaire amène le fondateur à faire deux propositions de contrat au choix afin de relever les salaires. - Le premier contrat stipule que les enseignants auront chaque année une augmentation de 4% du salaire de l'année précédente ; - Le deuxième contrat consiste à faire chaque année une augmentation forfaitaire de 30.000 FCFA. M. TALLA, professeur de maths, veut s'engager pour 9 ans dans cet établissement, mais il hésite quant au choix du contrat.

Dans une classe de Tle C dont l'effectif est compris entre 50 et 60 élèves de cet établissement scolaire, la taille moyenne des élèves est de $167cm$. La taille moyenne des filles est de $160cm$ et la taille moyenne des garçons est de $173,5cm$. M. NANGA, a promis une bourse de 50.000 FCFA à chaque élève de cette classe si leur taux de réussite à l'examen est de 100%.

M. NANGA a une entreprise qui fabrique et vend x tonnes d'un produit. En un jour, Le coût de production exprimé en milliers de FCFA, est donné par : $C(x)=x^3-15x^2+75x$ où $x\in[0;13]$. Cette entreprise vend l'intégralité de sa production au prix de 36750 FCFA la tonne chaque jour et ne travaille que pendant 22 jours sur un mois.

<u>Tâches</u> :

1. Combien doit prévoir M. NANGA pour payer les bourses de tous les élèves ? **1,5pt**
2. Quel est le contrat le plus avantageux pour M. TALLA ? **1,5pt**
3. Quelle est la valeur du bénéfice maximum mensuel en FCFA de l'entreprise ? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt