COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2023-2024 Classe : PC
MINI SESSION FEVRIER 2024		
EPREUVE DE MATHEMATIQUES		Durée : 3H

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,50 POINTS)

EXERCICE 1 :(05,50 POINTS)

1. Calculer les limites suivantes α, β, γ et δ. **2pts**

$\alpha = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2-\sqrt{x}-x}{x-1}\right)$; $\beta = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan 4x}{5x}\right)$; $\gamma = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{\sqrt{-2x^2+7x-6}}{x-2}\right)$ $\delta = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3+x+3}}{\sqrt{x^2+1}-1}\right)$.

2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$. **0,5pt**
3. Montrer que pour tout réel définie sur $]-\infty; 1[$, $\frac{2x+1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin x}{x-1} \leq \frac{2x-1}{x-1}$, puis en déduire la valeur exacte de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+\sin x}{x-1}$. **0,75pt**
4. Soit m un nombre réel. Discuter suivant les valeurs du réel m le prolongement par continuité en 1 de la fonction définie par : $x \mapsto \frac{(m^2-4)x^2+(m-2)x+4}{-2x+2}$. **0,75pt**
5. Le but de cette question est l'étude de la continuité de la fonction i définie par :

$$\begin{cases} i(x) = a^2x + 3, \ x < 1 \\ i(x) = \frac{-b^2x+8}{2x-1} \ 1 \leq x \leq 3 \\ i(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{b^2}{5}x + ab, \ x > 3 \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$. **0,5pt**

b) Déterminer a et b pour que la fonction i soit continue sur $\mathbb{R}$. **1pt**

EXERCICE 2 : (05,00 POINTS)

Cet exercice à deux partie indépendante.

A- Soit ABC est un triangle rectangle en A. Soit I milieu de $[BC]$ et G le barycentre des points pondérés $(A; 3), (B; -1), (C; -1)$. On pose $AB = AC = 2\ cm$.

1. Déterminer et construire G. **0,5pt**
2. Montrer que les points A, G et I sont alignés. **0,5pt**
3. Montrer que $3GA^2 - GB^2 - GC^2 = -16$. **0,5pt**
4. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que $3MA^2 - MB^2 - MC^2 = 20$. **1pt**

B- Soient x et y deux nombres réels, n et k deux nombres entiers.

1. On suppose que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. On donne (S): $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \tan x \times \tan y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

a) Montrer que $\tan x - \tan y = \sqrt{3} - 1$ et $\tan x + \tan y = 3 - \sqrt{3}$ **0,5pt**

b) En déduire dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ les solutions du système (S). **1pt**

2. Un candidat a un concours doit répondre à des QCM (questions à choix multiples) constituées de dix questions, pour chaque question, quatre réponses possibles sont proposées donc une seule est

juste.,Le candidat doit obligatoirement répondre aux dix questions et choisir pour chaque question une seule proposition. Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq 10$ .Exprimer en fonction de k, le nombre de grilles de réponses comportant exactement k bonnes réponses.**0,5pt**

EXERCICE 3 : (05,00 POINTS)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ on considère les fonctions numérique f et g tels que $f(x) = 2 - \sqrt{|x| + 1}$ et $g(x) = \frac{3x+5}{x+2}$.

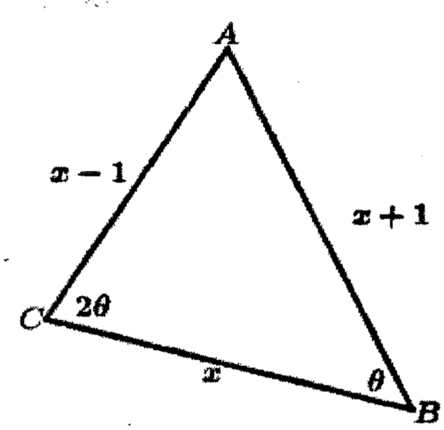
1. Soit h la fonction définie de $[-1; +\infty[$ vers $]-\infty; 2]$ par $h(x) = 2 - \sqrt{x+1}$.
   a) Montrer que h est bijective et définir sa bijection réciproque h^{-1}. **1pt**
   b) Déterminer le domaine de définition de goh. **0,5pt**
   c) Donner le programme de construction de la courbe de la fonction f, notée $(\mathcal{C}_f)$. **0,5pt**
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de g, puis en déduire l'équation cartésienne des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_g)$. **1pt**
3. Montrer que pour tout réel différent de -2, $g(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$, puis en déduire le programme de construction de la courbe $(\mathcal{C}_g)$. **0,5pt**
4. Montrer que le point $\Omega(-2; 3)$ est centre de symétrie de la fonction $(\mathcal{C}_g)$. **0,5pt**
5. Donner l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_g)$, $(\mathcal{C}_h)$ et $(\mathcal{C}_f)$. **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (04,50 POINTS)

SITUATION :

Trois jeunes fonctionnaires, souhaitent acheter chacun un lot de terrain pour réaliser leur premier projet.

Le lot choisir par le premier à la forme d'un triangle ABC comme l'indique la figure ci-contre. Le deuxième lot, dont l'aire est égale à l'aire du secteur angulaire dont l'arc est solution du système d'inéquation $\begin{cases} \cos x + \sin x \leq 1 \\ 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0 \\ \sin x - \cos x > 1 \end{cases}$; $x \in]-\pi; \pi[$, sur un cercle trigonométrie, d'unité graphique le décamètre. Le troisième lot est délimité par l'ensemble des points M solution du système $MA = \sqrt{2}\, MB$ et $MA^2 + 2MB^2 = 54$, les points A et B sont distants de trois décamètres.



Les trois jeunes fonctionnaires sont perplexes car ils ne savent pas l'aire des différents lots.

On suppose que $\pi \approx 3,14$, $\sqrt{7} \approx 2,64$.

1. Déterminer l'aire du premier lot. **1,5pt**
2. Déterminer l'aire du deuxième lot. **1,5pt**
3. Déterminer l'aire du troisième lot. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt