COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2023-2024 31 Janvier 2024
Département de Mathématiques	MINI SESSION	Situation 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classe : Tle TI — **Durée : 03 heures 30 minutes** — **coefficient : 4**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES — 15 POINTS

EXERCICE 1 : (05,5 points)

I. On considère les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin^2 x \; dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^2 x \; dx$ et $K = \int_0^1 \frac{x}{(x-2)^3} dx$

1) **a-** Calculer $I + J$ et $I - J$. **1pt**

b- En déduire de la question précédente la valeur exacte de I et celle de J. **0,5pt**

2) En utilisant une intégration par partie, calculer K. **0,75pt**

3) Soit les fonctions numériques définies par $f(x) = x\sqrt{x^3 + 3x + 1}$ et $g(x) = \frac{5x^3+9x+2}{\sqrt{x^3+3x+1}}$. f est dérivable sur $[0; 1]$ et on note f' sa fonction dérivée.

a- Montrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$, $f'(x) = \frac{1}{2}\, g(x)$. **0,5pt**

b- Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur $[0; 1]$. **0,5pt**

II. On considère la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x^3+1}$. On définit la suite numérique (u_n) tel que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \int_1^n h(x)dx$.

1) Montrer que pour tout réel x de $[1; +\infty[$, $0 \le h(x)$ et $h(x) \le \frac{1}{x^3}$ **0,5pt**

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. **0,5pt**

3) **a-** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \le u_n \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$. **0,5pt**

b- En déduire de la question précédente que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$. **0,25pt**

c- Montrer que la suite (u_n) est convergente. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (05,5 points)

Soit la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm sur les axes.

1) **a-** Etudier la dérivabilité de g à droite de 1, puis interpréter graphiquement ce résultat. **0,5pt**

b- Montrer que g est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que pour tout $x > 1$, $g'(x) = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$. **0,75pt**

c- Dresser le tableau de variation de la fonction g. **0,5pt**

d- Construire dans le repère la courbe (C_g). **0,75pt**

2) Soit h la restriction de g sur $[1; 2]$.

a- Montrer que la fonction h réalise une bijection de $[1; 2]$ vers un intervalle J à déterminer. **0,5pt**

b- On note h^{-1} la bijection réciproque de h. Dresser le tableau de variation de h^{-1}. **0,25pt**

c- Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. **0,5pt**

3) On considère la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $l(x) = \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}-2x}{x(x-1)^2}$ et (C_l) sa courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Montrer que pour tout $x > 1$, $g(x) - l(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$, puis en déduire la position relative des courbes (C_g) et (C_l). **0,75pt**

b- Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 2$, $x = 3$ et les courbes (C_g) et (C_l). **0,75pt**

EXERCICE 3 : (04 points)

1) **a-** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 7^n par 9. **1pt**

b- En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{2024} par 9 **0,5pt**

2) Déterminer le quotient et reste de la division euclidienne de -542 par -49 **0,5pt**

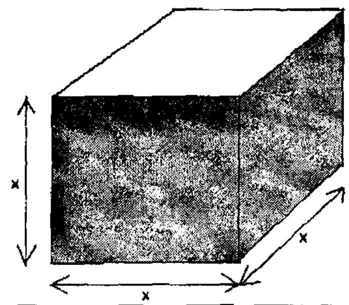
3) Déterminer les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 - b^2 = 35$. **1pt**

4) Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n + 7$ divise $n - 3$. **1pt**

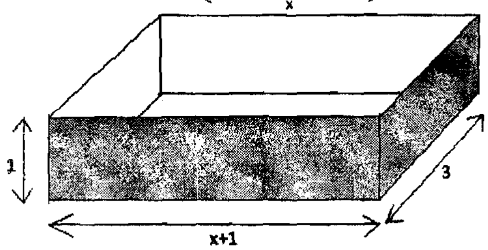
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 05 POINTS

Dans une localité sévie une épidémie. Un expert a modélisé à l'aide d'une fonction le nombre de malade durant cette épidémie. Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $n(x) = 16x^2 + 2\sqrt{x}$. Le traitement d'un malade s'élève à 35 000 FCFA. Ainsi, le Maire de cette localité aimerait estimer la dépense moyenne chaque jour pour le traitement des malades sur une période de 10 jours et cela depuis le début de l'épidémie.

Le fils de FOKAM est malade. Pour se rendre à l'hôpital, il part de chez lui avec une moto. La vitesse de sa moto augmente avec le temps t et, est représentée par la fonction vitesse $v(t) = \frac{1}{40}t + 1$ exprimée en mètre par seconde. On sait aussi que 10 minutes après son départ de la maison, il a déjà parcouru 5150 mètres. La distance qui sépare son domicile de l'hôpital est de 50 kilomètres.



FOKAM est un ingénieur des travaux. Il a réalisé chez l'un de ses clients une piscine qui a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 1 mètre, de base un rectangle de dimensions 3 mètres et $(x + 1)$ mètres. Le client n'étant pas satisfait, il demande à FOKAM de diminuer le volume de sa piscine de tel sorte que le volume restant soit égal au volume d'un cube d'arrête x mètres. Ainsi, FOKAM souhaite avoir une idée de la valeur de x dans cette condition.



Remarque : On rappelle que le volume d'un cube d'arrête a est a^3 et celui d'un parallélépipède rectangle est $L \times l \times h$ où L, l et h sont respectivement la longueur, la largeur de la base et la hauteur.

TÂCHES.

1) Aide le Maire à déterminer la dépense moyenne journalière. **1,5pt**

2) Quel temps en minutes mettra FOKAM pour se rendre à l'hôpital ? **1,5pt**

3) Aide FOKAM à déterminer une valeur approchée de x. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt