COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2023-202
Département de Mathématiques	BACCALAUREAT BLANC N°1	AVRIL 2024

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : TC-TCE | **Durée : 4 Heures** | **coefficient : 7**

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 poi

EXERCICE 1 : (06,00 points)

I- Un élève se rend à vélo au collège distant de 3 km de son domicile a une vitesse supposée constante de **15** $km.h^{-1}$. Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu soit au vert est $\frac{2}{3}$. Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale a temps en minute mis par l'élève pour aller au collège.

1) Déterminer la loi de probabilité de X. 0,5
2) Exprimer T en fonction de X. 0,5
3) Déterminer l'espérance $E(T)$ de T et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé. 0,75
4) L'élève part de la maison 17 minutes avant le début des cours.
   a) Peut-il espérer être à l'heure ? 0,25
   b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard au collège. 0,75

II- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points non alignés $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$ et $C(2,-1;\ -2)$. Soit I le milieu du segment $[AC]$. On pose $\vec{m} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{M}$

1) Calculer $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$ et en déduire l'existence d'un plan (P) contenant les points A, B et C. 0,5
2) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x - y + 3z + 1 = 0$. 0,5
3) Démontrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{m} = \vec{0}$ est la droite (BI). 0,5
4) Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (BI). 0,75
5) Soit (Δ) la droite passant par le point $D(7;\ -1;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;\ -1;3)$.
   a) Montrer que la droite (Δ) et le plan (P) sont perpendiculaires et se coupent en un point H dont on précisera les coordonnées. 0,75
   b) On désigne par S_P la réflexion de plan (P) et par S_Δ le demi-tour d'axe (Δ). Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S_P \circ S_\Delta$. 0,5

EXERCICE 2 : (03,00 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On désigne par φ un paramètre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_φ): $z^2 - \frac{2}{\cos\varphi}z + \frac{5}{\cos^2\varphi} = 4$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_φ). 0,75
2) On désigne par M et N les points images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_φ). Soit (Γ) le lieu géométrique des points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   a) Montrer que (Γ) est une partie de l'hyperbole d'équation $4x^2 - y^2 = 4$. 0,75
   b) Après avoir déterminé les éléments caractéristiques de (Γ), représenter le dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. 1,5

EXERCICE 3 : (06,00 points)

I- Soit F est la fonction définie sur $[0;1[\cup]1;\ +\infty[$ par $\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^3}dt \ \ si\ x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$; (C_F) désigne la courbe représentative de F dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\vec{j})$ dont l'unité sur les axes est cm.

1) Démontrer que :

- Pour tout $x \in]0; 1[$, on a : $\frac{(x^2+2x)\ln x}{(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x)\ln x}{2(x^2-1)^2}$. **0,5pt**
- Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a : $\frac{(x^2+2x)\ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x)\ln x}{(x^2-1)^2}$. **0,5pt**

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$. **0,75pt**

3) Étudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0. **0,75pt**

4) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0$. **0,5pt**

5) Étudier le sens de variation de F et dresser son tableau de variation sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$. **1pt**

6) Construire (C_F) dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. **0,5pt**

II- Soit n un entier naturel non nul et t un réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. On considère la suite numérique (S_n) définie par : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $S_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt$. **0,5pt**

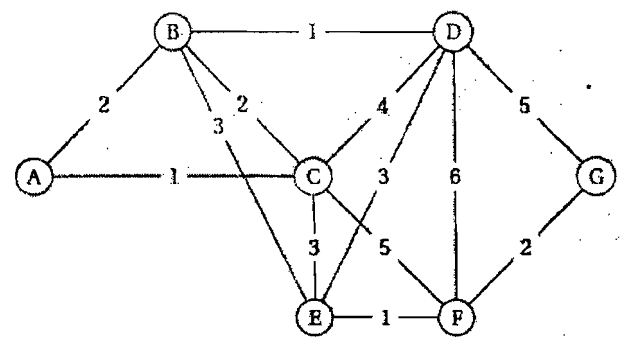
2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a : $|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$. **0,75pt**

3) Étudier la convergence de la suite (S_n). **0,25pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (05 points)

Situation :

Un juge au tribunal doit juger de la culpabilité d'une compagnie de taxis bleus. En effet, un soir de brouillard, un taxi a percuté un piéton qui traversait la rue dans son bon droit puis a pris la fuite. Monsieur FOKAM, témoin de la scène et constatant la gravité des blessures de la victime de l'accident, décide de l'emmené immédiatement à l'hôpital à l'aide de sa propre voiture. Il souhaite utiliser le plus court chemin possible dans le but d'augmenté les chances de survie de la victime. Le graphe ci-contre représente les différentes voies de déplacement possible pour partir des lieux de l'accident situé au point A jusqu'à l'hôpital situé au point G. Sur ce graphe, les nombres entiers naturels représentent les distances à parcourir en kilomètre pour partir d'un endroit à un autre.



Avant de commencer les soins sur la victime de l'accident, le médecin décide de lui administrer un sédatif par perfusion. A l'instant $t = 0$ (t en minutes), la quantité de sédatif introduite dans le sang est de 24 cl. Elle devra atteindre son maximum au bout de 20 minutes. Cette quantité (en cl) de sédatif, modélisée par une fonction f du temps t (en minutes) est solution de l'équation différentielle $y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$. Le médecin précise a l'infirmière chargé de la surveillance du patient qu'on doit laisser couler la perfusion pendant 12 minutes.

Lors de son interrogatoire par la police, monsieur FOKAM a affirmé que le taxi qui a percuté le piéton était bleu et c'est sur la base de ce témoignage que le procès a été instruit. Or dans la ville, deux compagnies se partagent le marché : "les taxis bleus" et "les taxis verts". La compagnie "les taxis verts" possède 90 % de part du marché. On demande à monsieur FOKAM d'effectuer des tests de reconnaissance de couleurs pour mesurer la fiabilité de son témoignage. Il s'avère qu'il est fiable dans 90 % des cas pour la couleur bleue et 80 % des cas pour la couleur verte.

Tâches :

1) Le juge doit-il condamner la compagnie ''les taxis bleus'' ? (justifier clairement votre réponse). **1,5pt**

2) Quelle quantité moyenne de sédatif se trouve dans le sang du patient ? **1,5pt**

3) Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le plus court chemin et la distance minimale correspondante permettant de partir des lieux de l'accident jusqu'à l'hôpital. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt