

Cette épreuve étalée sur deux pages, est constituée de deux Parties indépendantes.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15 points

EXERCICE 1 : (3,5 points)

I- (Série C uniquement)

Soit le système de congruences (S): $\begin{cases} n \equiv 8[12] \\ n \equiv 3[12] \end{cases}$

1. a) Montrer que 913328 est une solution de s (0,75pt)
b) Démontrer que toutes les solutions de (S) sont de la forme $60k + 308$ ($k \in \mathbb{Z}$) (0,5pt)

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit le point M Du plan d'affixe z, on considère l'application f et g telles que : f est une rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{12}$ et g la transformation du plan d'écriture $z = e^{i\frac{\pi}{5}}z$.

Soient les points A_0 et B_0 d'affixe respectives $a_0 = 3e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $b_0 = 6e^{-i\frac{3\pi}{5}}$.
On nomme A_n et B_n les suites Des points d'affixes respectives a_n et b_n telles que $A_{n+1} = f(A_n)$ et $B_{n+1} = g(B_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

- a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,
on a $a_n = 3e^{i(\frac{n\pi}{12} - \frac{2\pi}{3})}$ (0,75pt)
b) Exprimer b_n en fonction de n (0,75pt)
c) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels les points A_n et B_n sont Simultanément sur les axes des réels. (0,75pt)

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\text{Est : } M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer l'ensemble (E) des vecteurs invariants (0,75pt)
b) Montrer que (E) est le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par un vecteur de type $\vec{u}(1, a, b)$ (0,25pt)
2. Déterminer $(f \circ f)(\vec{i})$, $(f \circ f)(\vec{j})$ et $(f \circ f)(\vec{k})$ puis écrire la matrice de $f \circ f$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (0,75pt)
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit r la transformation Du plan Dans lui-même qui a tout point M(x, y) associe

$$\text{le point } M'(x', y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = -x\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul, A le point d'affixe $1 - i$ et B le point d'affixe u image de A par r et le point M_n d'affixe u^n

- a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de r (0,75pt)
b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels le point M_n est situé sur l'axe (O, \vec{v}) (0,75pt)
4. Soit (H) l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que : $x^2 + 11y^2 + 10\sqrt{3}y - 16 = 0$
a) Déterminer l'image (H') de (H) par la transformation r^{-1} (1pt)
b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de (H) (0,75pt)
c) Construire (H) (1pt)

EXERCICE 3 : (5,5 points)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul

Partie I. Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$.

1. Etudier les variations de g_n puis déterminer les limites de g_n en 0 et $+\infty$ (1pt)
2. a) En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. (0,75pt)
- b) Montrer que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$. (0,25pt)

Partie II. Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

on rappelle (C) la représentation graphique de f et (C_0) la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$.

1. a) déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ (0,5pt)
- b) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$. (0,75pt)
2. Dresser le tableau de variation de f (0,75pt)
3. déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}]$. Que peut-on en déduire pour (C) (0,75pt)
4. Construire (C) et (C_0) dans le repère orthonormé $(0, I, J)$ (0,75pt)

EXERCICE 4 : (Série E uniquement) : 1,25 points

Soit h la fonction définie par : $h(x) = e^{3x} \sin(5x)$.

1. Montrer que h est solution de l'équation différentielle $y'' - 6y' + 34y = 0$. (0,5pt)
2. Montrer que $h = \frac{1}{34}(-h' + 6h)'$ et en déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{10}} 34e^{3x} \sin(5x) dx = 3e^{\frac{3\pi}{10}} + 5$. (0,75pt)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)**Situation :**

L'une des maladies des derniers siècles est le COVID-19. Apparue en Chine à Wuhan, elle sévit actuellement dans tous les pays au monde. Chaque pays actuel aux tests et au confinement des malades. Dans une localité de votre pays, les tests ont révélé la présence de 10 malades. Les mesures barrières ont été mises en place. L'évolution du nombre de nouveaux malades est modélisée en fonction du temps (exprimé en semaine) par une fonction f , solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ (en malades). Ce nombre devrait atteindre son pic à la fin de la 9^{ème} semaine. Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage au COVID-19. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- La probabilité qu'une personne malade présente un test positif est de 0,99
- La probabilité d'une personne saine présente un test positif est de 0,001

Le laboratoire ne peut commercialiser le test que si la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure à 0,95. Pour protéger son invention contre la piraterie lorsqu'il le vend aux pays acheteurs, les dirigeants de cette pharmacie ont décidé de coder le système de production et d'envoyer le système de codage aux spécialistes des pays concernés. Le système de codage envoyé votre pays le suivant : A chaque lettre, on associe grâce au tableau ci-dessous un entier compris entre 0 et 25

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

A la lettre qu'on veut coder, on associe l'entier x correspondant, et on calcule l'entier y tel que $y \equiv 9x + 2[26]$. A l'entier y , on associe la lettre correspondante dans le tableau. Le laboratoire à envoyer le code **IMR**

Tâches :

1. Déterminer le nombre moyen de maladie lors des cinq premières semaines depuis la découverte de la maladie dans cette localité. (1,5pt)
 2. Déterminer à partir de quelle valeur de la proportion de personnes atteintes du COVID-19 dans une population le laboratoire commercialise-il son test (1,5pt)
 3. Déterminer le message envoyé dans le laboratoire de votre pays (1,5pt)
- Présentation :** (0,5pt)

Proposé par : Chinois Noubissi

<< Quoi qu'il arrive dans la vie, faites toujours le bien... >>