| | | |
|---|---|---|
| **COLLEGE F.X. VOGT** | | **Année scolaire 2023-2024** |
| **Département de Mathématiques** | **BACC BLANC N° 1** | **Date : Jeudi, 18 avril 2024** |
| **Classe : TTI** | **EPREUVE DE MATHEMATIQUES** | **Coef : 4 ; Durée : 3h45** |

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,5 Points)

### Exercice 1 : (2,5 points)

**I)** On considère le polynôme P défini par $\mathrm{P}(z) = z^3 - z^2 + (3+i)z - 2 + 2i$.

1. Vérifier que $-i$ est une racine de P. **(0,25 pt)**
2. Déterminer trois complexes $a, b$ et $c$, tels que $\mathrm{P}(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$. **(0,75 pt)**
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$. **(0,75 pt)**

**II)** Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, I, J)$. Soient les complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, les affixes respectives des points M et M'. On considère la transformation $f$ définie par : à tout point M associe le point M'tel que : $\begin{cases} 2x' = -x\sqrt{3} - y + 2 \\ 2y' = x - y\sqrt{3} - 2 \end{cases}$.

1. Donner l'écriture complexe de $f$. **(0,5 pt)**
2. En déduire la nature de $f$. **(0,25 pt)**

### Exercice 2 :(4,5 points)

**I)** Une urne contient cinq boules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5. On désigne par $P_i$ la probabilité de tirer la boule numéro $i$ de cette urne. $P_1, P_2, P_3$ , $P_4$ et $P_5$ sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géometrique de raison $\frac{1}{2}$.

1. Montrer que $P_1 = \frac{16}{31}$. **(0,75 pt)**
2. On tire quatre fois de suite une boule de l'urne, en remettant chaque fois la boule tirée avant de procéder au tirage suivant. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on a tiré la boule numéro 1.
   a) Définir la de probabilité de X. **(1 pt)**
   b) Calculer E(X) et l'écart type. **(0,5 pt)**

**II)** On considère les équations différentielles : $(E_1): y'' - 2y' + y = 2x - 3$ et $(E_2): y'' - 2y' + y = 0$.

1. Déterminer $a$ et $b$ pour que la fonction $\varphi$ définie par $\varphi(x) = ax + b$ soit solution $(E_1)$. **(0,5 pt)**
2. Démontrer qu'une fonction $f$ deux fois dérivables est solution de $(E_1)$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de $(E_2)$. **(0,5 pt)**
3. Résoudre l'équation $(E_2)$. **(0,5 pt)**
4. En déduire la solution de $(E_1)$ qui satisfait aux conditions : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ . **(0,75 pt)**

### Exercice 3 :(4,5 points) 

Soit la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ $g$ définie par $g(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et (C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm.

**1.** a) Calculer les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,5 pt)**
b) Démontrer que la droite (D) : $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$. **(0,25 pt)**
c) Etudier la position relative de (C) et (D). **(0,5 pt)**

**2.** a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction $g'$. **(1 pt)**
b) Sachant que $g'(1) = 0$, dresser le tableau de variation de $g$. **(0,5 pt)**

**3.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ telle que $1{,}9 < \alpha < 2$. **(0,5 pt)**

**4.** Construire (C) et (D) dans le même repère. **(0,75 pt)**

**5.** Déterminer l'aire $A$ en $cm^2$ de la portion du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. **(0,5 pt)**

**Exercice 4 :(4 points)**

**I)** Soit $f$ un endomorphisme du plan vectoriel $E$ muni de la base $B = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ tel que $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $f(j) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ .

1. Écrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $B$. **(0,5 pt)**
2. Justifier que $M$ est inversible et déterminer sa matrice inverse $M^{-1}$. **(0,5 pt)**
3. On pose $\vec{U} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$
   a) Montrer que $(\vec{U}\,;\vec{V})$ est une base de $E$ **(0,25 pt)**
   b) Écrire la matrice $M'$ de $f$ dans la base $(\vec{U}\,;\vec{V})$ **(0,75 pt)**

**II)** Le nombre $p$ étant un entier naturel, on considère le nombre $A_p$ défini par :$A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.

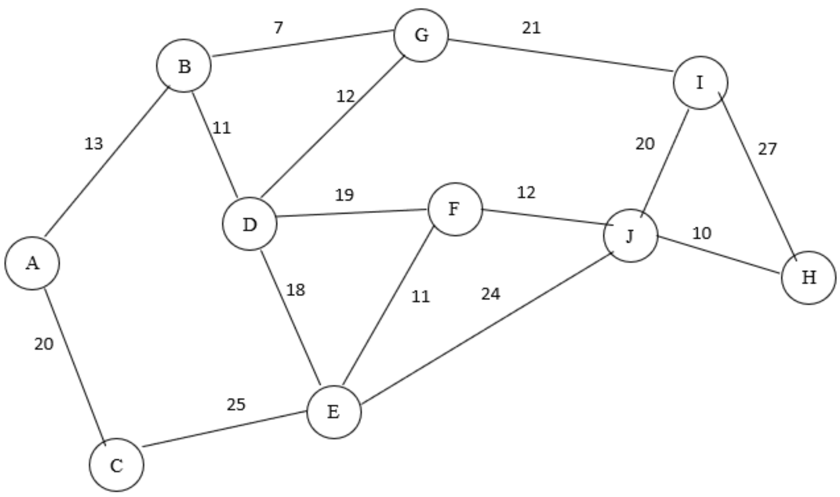
1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8. **(0,5 pt)**
2. En déduire que $3^{2n+2} + 7$ et $3^{2n+4} - 1$ sont des multiples de 8 . **(0,5 pt)**
3. Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3. **(0,5 pt)**
4. Démontrer que, si $p = 2n + 1$, alors $A_p \equiv 0[8]$ . **(0,5 pt)**

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (04,5 points).

M. ELONO est un homme d'affaires qui possède les supermarchés AKUM dans plusieurs localités du la Région du Centre. La situation géographique de ces supermarchés est illustrée sur le graphe ci-dessous, avec pour siège principal situé au sommet A, les autres sommets représentent les localités où sont situés les différents supermarchés, les arêtes représentent le réseau routier en kilomètres, reliant tous les supermarchés. Suite à la pénurie du savon MME dans tous ses supermarchés, M. ELONO fait appel à une agence de livraison qui doit approvisionner tous les supermarchés en savon MME. Cette agence facture 5 000 F CFA par kilomètre effectué. Pour cela, M. ELONO dispose la somme de 615. 000 F CFA

L'un des supermarchés de M. ELONO situé au sommet H, est confronté régulièrement à de nombreux cambriolages. Il décide de se rendre dans ce supermarché pour évaluer le système de sécurité. Etant un homme très occupé, il souhaite emprunter le plus court chemin pour s'y rendre sachant que son point de départ est le siège principal.

Le fils de M. ELONO est un étudiant démographe qui fait son stage dans une entreprise. Il est envoyé dans une localité pour mener une enquête. A l'issue de celle-ci, les informations collectées sont résumées dans le tableau ci-dessous. Il souhaite alors avoir une estimation de la population cette localité en **2050** pour enrichir son mémoire de fin de stage.




1. Quel est le plus court chemin que doit emprunter M. ELONO pour se rendre au supermarché en H. **(1,5 pt)**
2. Dire si le montant prévu par M. ELONO pour la livraison du savon MME dans ses supermarchés sera suffisant. **1,5 pt)**
3. En utilisant la méthode de Mayer, aidez le fils de M. ELONO à enrichir son mémoire. **(1,5 pt)**

| Année | 1990 | 2000 | 2005 | 2010 | 2015 | 2020 | 2025 | 2030 | 2035 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ de l'année | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| Population $y_i$ | 540 | 560 | 700 | 800 | 875 | 1120 | 1390 | 1500 | 1700 |