

	PFISTER INTERNATIONAL SCHOOL	
	Collège technique & scientifique	
	Mbankomo – centre administratif	
	Tél : (+237) 691 32 98 07	
		Année scolaire : 2023 – 2024
		Examen : PROBATOIRE BLANC
		EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
		Durée : 3H
		SESSION D'AVRIL
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES		Coef : 6
		SERIE : C

A// EVALUATION DES RESSOURCES(14pts)

EXERCICE 1 (03,25pts)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$. Pour toute partie non vide (C) de (P) , un point A de (C) minimise la distance OM lorsque M parcourt (C) , on dit que la distance de l'origine O à l'ensemble (C) vaut $d(O; (C)) = OA$.

1- On suppose que (C) est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y = -2x + 1$.

a) Quelle est la nature de (C) ? En déduire la valeur exacte de $d(O; (C))$. **(0,25pt + 0,25pt)**

b) Déterminer le point H de (C) tel que $d(O; (C)) = OH$. **(0,25pt)**

2- On suppose que $(C): y = 2x^2 - 1$

a) M étant un point de (C) d'abscisse x , exprimer $g(x) = OM^2$ en fonction de x . **(0,25pt)**

b) Déterminer les extrema de g . **(0,5pt)**

c) Déduire la valeur exacte de $d(O; (C))$ et le(s) point(s) M de (C) tels que

$d(O; (C)) = OM$. **(1pt)**

3- Déterminer $d(O; (C))$ lorsque (C) est le cercle d'équation $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. **(0,75pt)**

EXERCICE 2 (02,75 pts)

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

1- On appelle I la matrice identité d'ordre 2 $(I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$. Vérifier que $A^2 = A + 2I$ **(0,5pt)**

2- En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I$, où α et β sont des réels **(0,25pt + 0,25pt)**

3- On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par : $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$. On considère que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $A^n = r_n A + s_n I$

a) Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison à préciser et donner une expression explicite de k_n en fonction de n pour tout entier naturel n . **(0,5pt + 0,25pt)**

b) On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2. En déduire une expression explicite de t_n pour tout entier naturel n . **(0,25pt)**

c) Déduire pour tout entier naturel n , une expression explicite de (r_n) et (s_n) en fonction de n . **(0,25pt + 0,25pt)**

d) En déduire alors, pour tout entier naturel n , une expression des coefficients de la matrice de A^n . **(0,25pt)**

EXERCICE 3 (03pts)

Soient trois points du plan A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1; 1]$. On note G_k le barycentre du système : $\{(A, k^2 + 1); (B, k); (C, -k)\}$

- 1) Représenter les points A, B, C et le milieu I de $[BC]$ et construire G_1 et G_{-1} (1pt)
- 2) Exprimer pour tout réel k de l'intervalle $[-1; 1]$, le vecteur $\overrightarrow{AG_k}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ (0,25pt)
- 3) Etablir le tableau de variation de la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$ (1,25pt)
- 4) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1; 1]$ (0,5pt)

EXERCICE 4 (02,5pt)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ par : $f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.

1. Calculer $f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{i})$. (0,5pt + 0,5pt)
2. En déduire la nature de l'application f . (0,25pt)
3. Prouver que f est un automorphisme involutif et caractériser l'application f . (0,25pt + 0,25pt)
4. Soient les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}; \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. (0,25pt)
5. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. (0,5pt)

EXERCICE 5 (02,5pts)

Soit ε l'espace affine euclidien et $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé de ε . On considère dans $\mathcal{R}$ les points $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$, $I(1; -2; 0)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

- 1- Donner une équation cartésienne du plan (ABC) (0,75pt)
- 2- Déduire la distance d du point I au plan (ABC) (0,25pt)
- 3- Déterminer la position relative du plan (ABC) et de la sphère (S) . (0,75pt)
- 4- Déterminer les éléments caractéristiques de l'intersection $(C) = (ABC) \cap (S)$. (0,75pt)

B// EVALUATION DES COMPETENCES.....(06pts)

Situation problème :

Un bateau est au mouillage à 9km du point le plus proche d'une côte rectiligne. Un message doit parvenir au plus vite à une localité située sur la côte à 15km du point de la berge le plus proche du bateau. Etant donné que le messenger qui veut fabriquer une boîte de conserve d'une capacité de 1,750 l et ayant la forme d'un cylindre droit, parcourt 5km à l'heure à pied et 4km à l'heure en canot. On admet que 1,750 l est équivalent à $549,25\pi \text{ cm}^3$. **A l'aide d'un raisonnement scientifique, répond aux tâches ci – dessous.**

Tache 1 : En quel point de la berge doit – il accoster pour arriver au plus vite à la localité ? (2pts)

Tache 2 : Peut – on déterminer le rayon de cette boîte pour que la quantité de métal utilisée soit minimale ? (2pts)

Tache 3 : Peut – on déterminer la hauteur de cette boîte pour que la quantité de métal utilisée soit minimale ? (2pts)