Tableau récapitulatif

Année 2016 4

Epreuve du 1er tour 4

Enoncé 4

Corigé 6

Epreuve du 2nd tour 10

Enoncé 10

Corrigé 12

Année 2015 16

Epreuve du 1er tour 16

Enoncé 16

Corrigé 18

Epreuve du 2nd tour 24

Enoncé 24

Corrigé 26

Année 2014 30

Epreuve du 1er tour 30

Enoncé 30

Corrigé 32

Epreuve du 2nd tour 36

Enoncé 36

Corrigé 38

Année 2013 43

Epreuve du 1er tour 43

Enoncé 43

Corrigé 45

Epreuve du 2nd tour 50

Enoncé 50

Corrigé 52

Année 2012 57

Epreuve du 1er tour 57

Enoncé 57

Corrigé 59
Epreuve du 2nd tour 63
Enoncé 63
Corrigé 65
Année 2011 69
Epreuve du 1er tour 69
Enoncé 69
Corrigé 71
Epreuve du 2nd tour 74
Enoncé 74
Corrigé 76
Année 2010 79
Epreuve du 1er tour 79
Enoncé 79
Corrigé 81
Epreuve du 2nd tour 85
Enoncé 85
Corrigé 87
Année 2009 92
Epreuve du 1er tour 92
Enoncé 92
Corrigé 94
Epreuve du 2nd tour 99
Enoncé 99
Corrigé 101
Année 2008 107
Epreuve du 1er tour 107
Enoné 107
Corrigé 109
Epreuve du 2nd tour 114
Enoncé 114
Corrigé 116
Année 2007 120
Epreuve du 1er tour 120
Enoncé 120
Corrigé 122

Epreuve du 2nd tour 128
Enoncé 128
Corrigé 130
Année 2006 135
Session Normale 135
Enoncé 135
Corrigé 137
Année 2005 144
Session Normale 144
Enoncé 144
Corrigé 146
Année 2004 155
Session Normale 155
Enoncé 155
Corrigé 157
Année 2003 164
Session Normale 164
Enoné 164
Corrigé 166
Année 2002 172
Session Normale 172
Enoncé 172
Corrigé 174
Année 2001 179
Session Normale 179
Enoncé 179
Corrigé 181
Année 2000 187
Session Normale 187
Enoncé 187
Corrigé 189

UNIVERSITE OUAGA I Pr Joseph KI – ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2016
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (4 points)

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par
$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

1) a) Ecrire sous forme algébrique $(1-i)^2$ puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2i$.
   b) Déterminer les nombres b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait
   $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $P(z) = 0$
3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives
   $z_A = 1 - i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = 1 + 3i$, $z_D = 3 + i$
   a) Faire une figure
   b) On pose $Z = \frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$. Ecrire Z sous la forme algébrique.
   c) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.
   d) Quelle est la nature exacte du triangle ABC puis du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1\,;1\,;-3)$; $B(-2\,;3\,;-3)$; $C(-2\,;1\,;0)$.

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2) Soit I le point de coordonnées $(-1\,;3\,;0)$.
   Calculer la distance de I au plan (ABC). Ces points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?
3) a) Calculer l'aire A du triangle ABC en unité d'aire.
   b) Déterminer le volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{1+x} & si\ x \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} & si\ x < 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $||\vec{\imath}|| = 1\ cm$ et $||\vec{\jmath}|| = 2\ cm$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $I = [1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$

1) Calculer les limites de g aux bornes de I
2) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation
3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I
   Vérifier que $\alpha \in]3,5\ ;4[$
4) Déduire de ce qui précède le signe de g sur I

Partie B

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ et vérifier que
   pour tout $x \in I,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$
4) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ puis dresser le tableau de variation de f
5) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.
6) Construire (C), ses tangentes et ses asymptotes

Partie C

On pose $J_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer J_0.
2) Montrer que $J_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que (J_n) est décroissante
4) Montrer que (J_n) est convergente.
5) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n : $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$
6) En déduire les valeurs exactes de J_1 et J_2.

Données : $\ln(3,5) \simeq 1,25$; $\ln 2 \simeq 0,7$; $e^{-1} \simeq 0,37$

Année 2016
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

1) a) Forme algébrique de $(1-i)^2$

$(1-i)^2 = -2i$

Déduction des solutions de $z^2 = -2i$

$z^2 = -2i \Leftrightarrow z^2 = (1-i)^2 \Leftrightarrow z = 1-i$ ou $z = -1+i \Leftrightarrow S_{\mathbb{C}} = \{1-i\ ;\ -1+i\}$

b) Détermination des nombres b et c

$P(z) = (z^2+2i)(z^2+bz+c) = z^4 + bz^3 + (c+2i)z^2 + 2ibz + 2ic$

Par identification, on a : $b = -4(1+i)$ et $c = 10i$

$P(z) = (z^2+2i)[z^2 - 4(1+i)z + 10i]$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) :\ P(z) = 0$

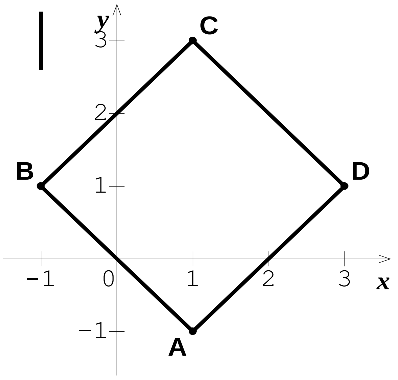
$z^2 + 2i = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1-i$ ou $z_2 = -1+i$

$z^2 - 4(1+i)z + 10i\ ;\ \Delta' = -2i = (1-i)^2 \Leftrightarrow z_3 = 3+i$ ou $z_2 = 1+3i$

$S_{\mathbb{C}} = \{1-i\ ;\ -1+i\ ;\ 3+i\ ; 1+3i\}$

3) $z_A = 1-i\ , z_B = -1+i\ ,\ z_C = 1+3i\ ,\ z_D = 3+i$

a) Faisons une figure



b) Forme algébrique de Z

$Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{2-2i}{2+2i} = -i$

c) Interprétation géométrique

$|Z| = \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \frac{BA}{BC}$ et $arg(Z) = arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

d) Nature exacte du triangle ABC

$|Z| = \frac{BA}{BC} = 1 \Leftrightarrow BA = BC\ ;\ arg(Z) = (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B

Nature exacte de $ABCD$

$z_{\overrightarrow{BA}} = 2 - 2i$ et $z_{\overrightarrow{CD}} = 2 - 2i$

$z_{\overrightarrow{BA}} = z_{\overrightarrow{CD}}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme

Comme ABC est un triangle rectangle et isocèle en B, alors $ABCD$ est un carré.

***Exercice* 2**

$A(-1\,;1\,;\,-3)\,;\,B(-2\,;3\,;\,-3)\,;\,C(-2\,;1\,;0)$.

1) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$

2) Calcul de $d\big(I;\,(ABC)\big)$

$d\big(I;\,(ABC)\big)=\frac{|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AI}|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}=\frac{12}{7}$

$d\big(I;\,(ABC)\big)\neq 0$ donc les points A , B , C et I ne sont pas coplanaires

3) a) Calcul de l'aire A du triangle ABC en unité d'aire.

$A=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\frac{7}{2}\,unité\ d'aire$

b) Déterminons le volume V

$V=\frac{1}{3}\times A\times d\big(I;\,(ABC)\big)=2\,unité\ de\ volume$

***Problème* (12 *points*)**

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{1+x} & si\ x\geq 1\\ e^{\frac{1}{x-1}} & si\ x<1\end{cases}\ ;\ D_f=\mathbb{R}$$

Partie A

$D_g=I=[1\,;\,+\infty[\,;\,g(x)=1+x-x\ln x$

1) Calcul des limites de g aux bornes de I

$\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1+x-x\ln x=2$ car $\ln 1=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+x(1-\ln x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

2) Etude du sens de variation de g et tableau de variation de g

$g'(x)=-\ln x\leq 0\ \forall\,x\in[1\,;\,+\infty[$ donc g est décroissante sur I

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

3) Démontrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur I

g est continue car dérivable et est strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,2]$ et comme $0\in]-\infty\,;\,2]$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[1\,;\,+\infty[$

Vérifions que $\alpha\in]3{,}5\,;4[$

$g(3{,}5)=0{,}125$ et $g(4)=-0{,}6\ \Leftrightarrow g(3{,}5)\times g(4)=-0{,}075<0$ donc $\alpha\in]3{,}5\,;4[$

4) Déduction du signe de g sur I

$\forall\,x\in[1\,;\,\alpha[,\,g(x)>0$ et $\forall\,x\in]\,\alpha\,;\,+\infty[,\,g(x)<0$

Partie B

1) Calcul des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{X\to 0} \mathrm{e}^{X} = 1 \text{ avec } X = \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x}{1+x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x} = 1$$

2) Etude de la dérivabilité de f en 1

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0 \text{ avec } X = \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\ln x}{x-1}\cdot\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \text{ car } \lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ alors f n'est pas dérivable en 1

Interprétation graphique

Au point de coordonnées $(1\,;0)$, (C) admet une demi – tangente horizontale à gauche et une demi – tangente oblique de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ à droite ; le point $(1\,;0)$ est donc un point anguleux de (C)

3) Calcul de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}} & si\ x<1 \\ \frac{1+x-x\ln x}{x(1+x)^2} & si\ \ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{donc } f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}\ \forall\, x \in I$$

Déduction du signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$

- $\forall\, x<1$, $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$ et $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ d'où $\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ et donc $-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}} < 0$
- $\forall\, x \geq 1,\ x(1+x)^2 > 0$ alors $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe

Conclusion : $\forall\, x \in]-\infty\,;1[\,\cup\,]\alpha\,;+\infty[,\ f'(x) < 0$ et $\forall\, x \in]1\,;\alpha[\,,f'(x) > 0$

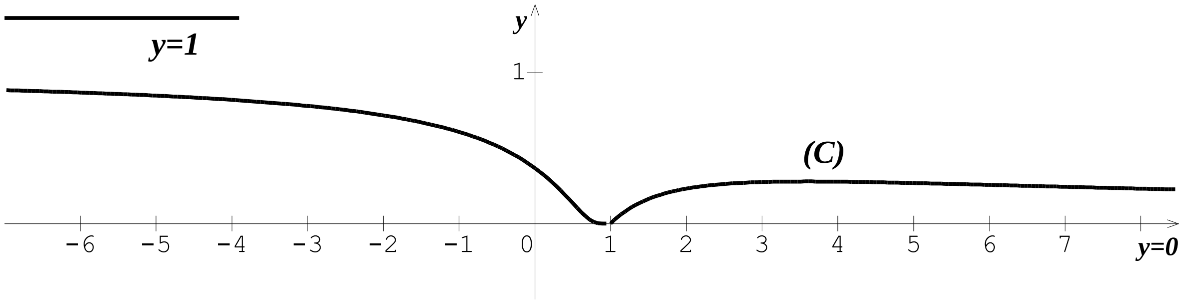
Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0\ \Vert\ \frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4) Montrons que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

$$f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{1+\alpha};\ g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{1+\alpha}{\alpha} \text{ donc } f(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\alpha(1+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}$$

5) Construction de (C)



Partie C

$J_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\, dx$, $n \in \mathbb{N}$

1) Calcul de J_0 ·

$$J_0 = \int_1^e x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}$$

2) Montrons que $J_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, x \in [1\,; e]$, on a $x^2(\ln x)^n \geq 0$ donc $J_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\, dx \geq 0$

3) Montrons que (J_n) est décroissante

$$J_{n+1} - J_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\, (\ln x - 1)dx$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, x \in [1\,; e]$, $x^2(\ln x)^n \geq 0$ et $\ln x - 1 \leq 0 \Longrightarrow x^2(\ln x)^n(\ln x - 1) \leq 0$

$\Longrightarrow J_{n+1} - J_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\, (\ln x - 1)dx \leq 0$ et donc la suite (J_n) est décroissante

4) Montrons que (J_n) est convergente.

La suite (J_n) est décroissante est est minorée par 0 donc elle est convergente

5) Démontrer que pour tout entier naturel n : $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$

$3J_{n+1} = \int_1^e 3x^2(\ln x)^{n+1}\, dx$;

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = 3x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)\,\frac{(\ln x)^n}{x} \\ v(x) = x^3 \end{cases}$$

$$3J_{n+1} = \left[x^3(\ln x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\int_1^e x^2(\ln x)^n\, dx = e^3 - J_n \text{ et donc}$$

$$3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$$

6) Déduction des valeurs exactes de J_1 et J_2.

$3J_1 + J_0 = e^3 \Leftrightarrow J_1 = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}$

$3J_2 + 2J_1 = e^3 \Leftrightarrow J_2 = \frac{5\mathrm{e}^3-2}{27}$

UNIVERSITE OUAGA I Pr Joseph KI – ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2016
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (4 points)

Les documents paléontologiques confirmant l'idée d'évolution sont nombreux. Parmi les mieux connus figurent les ossements fossiles des ancêtres du cheval actuel. Les longueurs du crâne et de la face pour une série d'animaux représentatifs de la lignée des ancêtres du cheval sont consignées dans le tableau suivant :

Nom	Longueur du crâne (x_i) en cm	Longueur de la face (y_i) en cm
Eohippus	7,5	10,7
Mesohippus	11	12,8
Merychippus	14,5	18,5
Pliohippus	15,5	22,5
cheval	21,5	31,2

1) Représenter le nuage de points associé à cette série $(x_i\ ,\ y_i)$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$ (Unité graphique 0,5 cm)
2) a) Un ajustement affine du nuage de point paraît – il possible ?
   b) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 correspondant respectivement aux trois premiers points et aux deux derniers.
   c) Donner l'équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont des paramètres à déterminer. Tracer cette droite.
3) Estimer la longueur de la face d'un descendant du cheval qui aurait dans des millions d'années, une longueur de crâne de 23,2 cm.

Exercice 2 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$. On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t + \ln(1-t) \\ y(t) = te^t \end{cases} \quad , \qquad t \in \left]-\infty\,;0\right]$$

1) a) Etudier le sens de variations des fonctions coordonnées x et y sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$
   b) Dresser un tableau de variation conjoint de x et y
2) a) Déterminer les équations des tangentes à (Γ) aux points $M(0)$ et $M(-1)$; $M(t)$ étant le point de coordonnées $\big(x(t)\ ;\ y(t)\big)$
   b) L'unité étant 2 cm, tracer les tangentes précédentes et la courbe (Γ) dans le repère

Problème (**12 points**)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 + e^{2-x})$. On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
(Unité graphique $= 2\ cm$)

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$
   a) Etudier le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$ (On ne demande pas les limites de h).
   b) En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$
2) a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$
   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   d) Préciser la position de (C) par rapport à la droite (Δ).
3) a) Déterminer $f'(x)$ puis étudier son signe.
   b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
   c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.
   On note f^{-1} la bijection réciproque de f
   d) f^{-1} est – elle dérivable en 4 ? Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
   e) Construire la courbe (C) et (Δ) puis déduire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère

Partie B

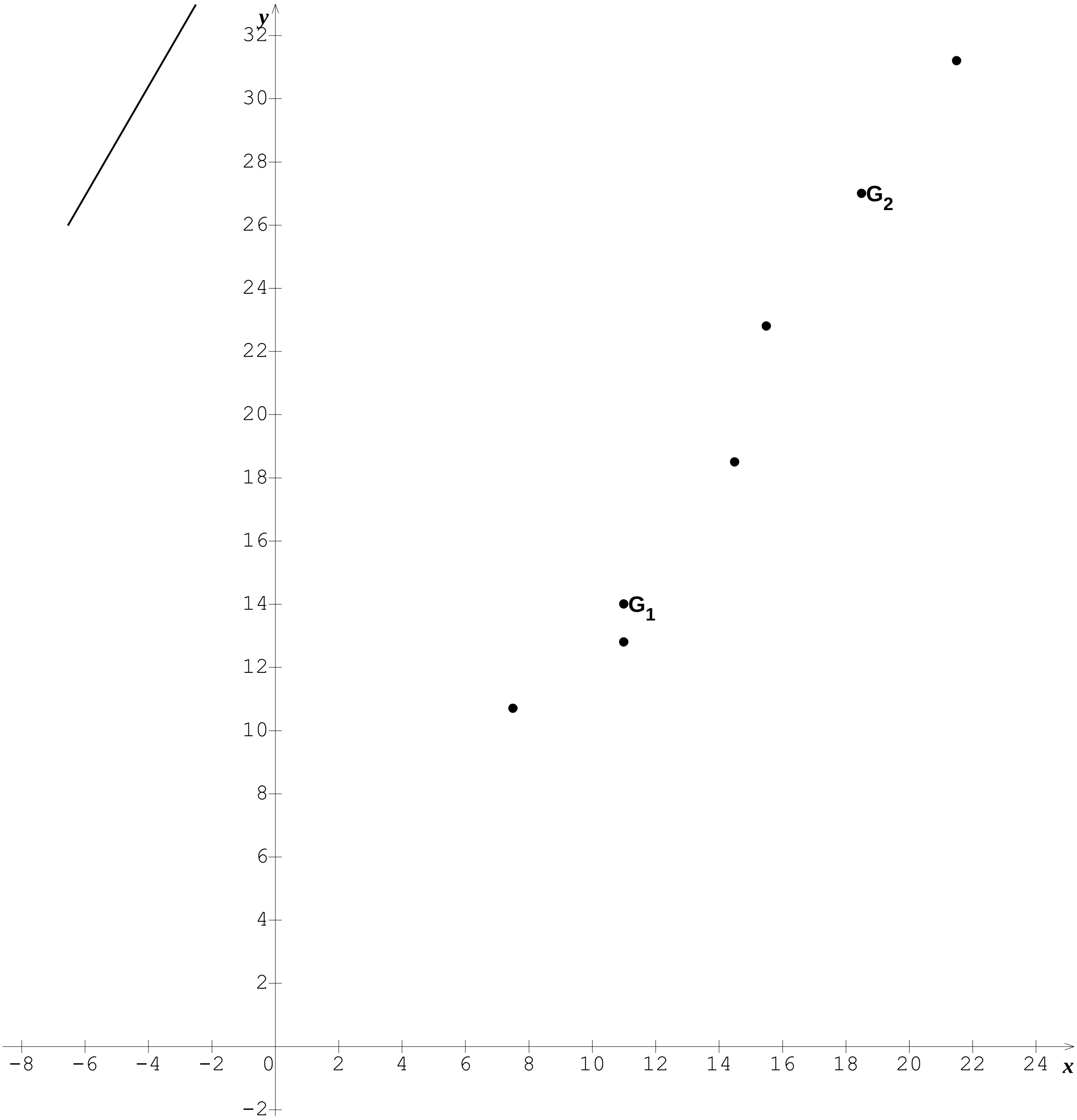
1) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
2) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Année 2016
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

1) Représentation du nuage de points



2) a) La forme du nuage étant allongée, un ajustement affine de ce nuage est possible

b) Détermination des coordonnées des points moyens G_1 et G_2

$$\begin{cases} X_1 = \frac{7{,}5+11+14{,}5}{3} = 11 \\ Y_1 = \frac{10{,}7+12{,}8+18{,}5}{3} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow G_1(11\,;14)\,; \begin{cases} X_2 = \frac{15{,}5+21{,}5}{2} = 18{,}5 \\ Y_2 = \frac{22{,}8+31{,}2}{2} = 27 \end{cases} \Leftrightarrow G_2(18{,}5\,;27)$$

c) Equation de la droite (G_1G_2)

$(G_1G_2) : y = ax + b$ tels que $\begin{cases} 14 = 11a + b \\ 27 = 18{,}5a + b \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{26}{15}$ et $b = -\frac{76}{15}$

$(G_1G_2) : y = \frac{26}{15}x - \frac{76}{15}$

Traçons cette droite (voir figure)

3) Longueur de la face pour $x = 23{,}2$

$y = \frac{26}{15} \times 23{,}2 - \frac{76}{15} \simeq 35{,}15\ cm$

Exercice 2

$$\begin{cases} x(t) = t + \ln(1-t) \\ y(t) = te^t \end{cases}, \ t \in]-\infty\,;0]$$

1) a) Etude du sens de variations de x et y sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{-t}{1-t} \\ y'(t) = (t+1)e^t \end{cases}, \ t \in]-\infty\,;0]$$

- $\forall\, t \in]-\infty\,;0], -t \geq 0$ et $1 - t > 0$ alors $x'(t) = \frac{-t}{1-t} \geq 0$ et donc x est croissante
- $\forall\, t \in]-\infty\,;0], e^t > 0$ alors $y'(t)$ et $(t+1)$ ont le même signe

  $\forall\, t \in]-\infty\,;-1], y'(t) \leq 0$ et y est décroissante

  $\forall\, t \in]-1\,;0], y'(t) \geq 0$ et y est croissante

b) Tableau de variation conjoint de x et y

$$x'(0) = 0\,;\ y'(0) = 1\,; x(0) = 0\,;\quad y(0) = 0$$

$$x'(-1) = \frac{1}{2}\,;\ y'(-1) = 0\,; x(-1) = -1 + \ln 2\,;\quad y(-1) = -e^{-1}$$

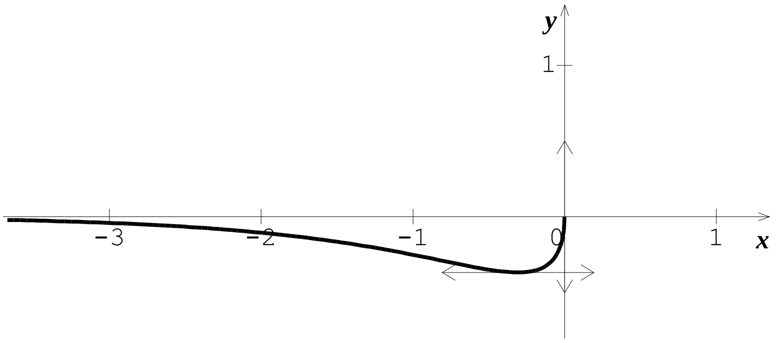
$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = -\infty\ ;\quad \lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$$

t	$-\infty$		-1		0
$x'(t)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	0
$y'(t)$		$-$	0	$+$	1
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

2) a) Equations des tangentes à (Γ) :

Au point $M(0)$; $(T_0) : x = 0$ et au point $M(-1)$; $(T_{-1}) : y = -e^{-1}$

b) Construction de la courbe (Γ)



Problème

Partie A

$f(x) = x(1 + e^{2-x})$; $D_f = \mathbb{R}$

1) $h(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$; $D_h = \mathbb{R}$

   a) Etude du sens de variation de h sur $\mathbb{R}$

   $h'(x) = (x - 2)e^{2-x}$;

   $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{2-x} > 0$ alors $h'(x)$ et $(x - 2)$ ont le même signe.

   $\forall\, x \in]-\infty\,; 2[, h'(x) < 0$ et $\forall\, x \in]2\,;\, +\infty[, h'(x) > 0$. On en déduit que sur $]-\infty\,; 2[, h$ est décroissante et sur $]2\,;\, +\infty[, h$ est croissante

   b) Déduction du signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$

   $h(2) = 0$ est un minimum absolu de h sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$.

2) a) Etude des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(1 + e^{2-x}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2-x} = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + xe^{2-x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{2-x} = 0$

   b) Calcul et interprétation de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{2-x} = +\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$

   c) Calcul et interprétation de $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{2-x} = 0$ alors $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

   d) Précisons la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

   $f(x) - y = xe^{2-x}$ et $e^{2-x} > 0$ donc $f(x) - y$ et x ont le même signe

   $\forall\, x \in]-\infty\,; 0[, f(x) - y < 0$ et $\forall\, x \in]0\,;\, +\infty[, f(x) - y > 0$.

   On en déduit que sur $]-\infty\,; 0[, (C)$ est en dessous de (Δ) et sur $]0\,;\, +\infty[, (C)$ est au dessus de (Δ)

3) a) Détermination de $f'(x)$ et étude de son signe.

   $f'(x) = 1 + e^{2-x} - xe^{2-x} = 1 + (1 - x)e^{2-x} = h(x) \geq 0$ d'après la question 1)

   b) Déduction du sens de variation de f et tableau de variation

   $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$

   alors f est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   c) Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J

   f est continue car dérivable et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = f(\mathbb{R}) =]-\infty\,;\, +\infty[$

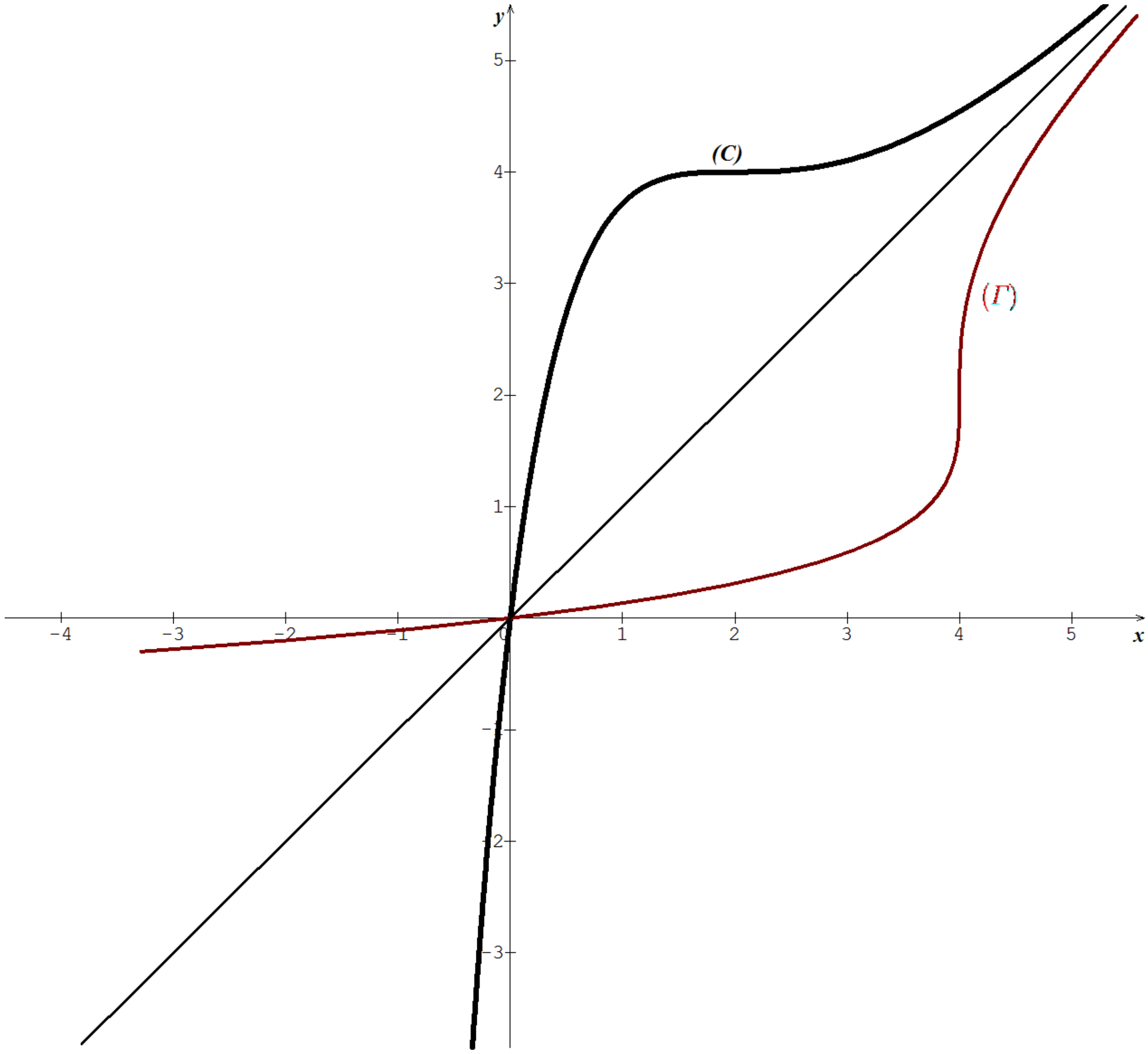
   d) $f(2) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(4) = 2$ et $f'\big(f^{-1}(4)\big) = f'(2) = 0$

   Alors f^{-1} n'est pas dérivable en 4

Dressons le tableau de variation de f^{-1} :
On sait que f^{-1} et f ont le même sens de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$
$(f^{-1})(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

e) Construction de (C), (Δ) puis (Γ)



Partie B

1) Calcul de l'aire $A(\lambda)$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda}[f(x) - y]\,dx$ *unité d'aire* ; $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{2-x} \end{cases}$

$A(\lambda) = [-xe^{2-x}]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} -e^{2-x}dx \Rightarrow A(\lambda) = \mathrm{e}^2 - (\lambda + 1)e^{2-\lambda}$

2) Calcul et interprétation de $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \mathrm{e}^2$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{2-\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{2-\lambda} = 0$

L'aire de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et allant de 0 à $+\infty$ est égale à e^2 en unité d'aire

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2015
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (4 points)

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 - 3z + 2i - 1$

1) Montrer que le polynôme $P(z)$ admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera
2) Déterminer trois nombres complexe $a,\ b$ et c tel que
$$P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\vec{v})$ (unité 2 cm), on désigne par $A,\ B$ et C les points d'affixes respectives $i, 2+i$ et -1.
   a) Placer les points $A,\ B$ et C
   b) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer l'affixe de D.
   c) Calculer le nombre $Z = \frac{z_A}{z_A - z_B}\cdot$ Déterminer le module et un argument de Z.
   En déduire la nature du triangle OAB

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ ,\vec{k})$, on donne les points $A(-2\ ;-1\ ;\ 2)$; $B(6\ ;-5\ ;\ 3)$; $C(-1\ ;3\ ;10)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
   b) Interpréter géométriquement ces résultats
   c) Calculer les distances AB et AC
   d) En déduire la nature exacte du triangle ABC
2) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
3) Montrer que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 9\|\vec{u}\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en fonction de la norme de $\vec{u}$.
4) Soit $D(1\ ;1\ ;1)$ un point de l'espace.
   a) Les points $A\ ,B\ ,C\ ,D$ sont – ils coplanaires ?
   b) Calculer $d\big(D\ ;\ (ABC)\big)$ et en déduire le volume V, en unité de volume, de la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC.

Problème (12 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x - 1$

1) Etudier les variations de g
2) Calculer $g(0)$. En déduire que pour tout $x \neq 0$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \;\; si\; x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

   b) Etablir que $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$

   En déduire que (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera l'équation.
2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$
3) Calculer, pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
4) a) Donner le sens de variation de f

   b) Dresser le tableau de variation de f
5) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse nulle, écrire l'équation de (T)
6) Tracer (D), (T) et (C).

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$

1) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2\,;2{,}5[$
2) On pose $I = [2\,;2{,}5]$
   a) Démontrer que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \geq -20$ et $(e^x - 1)^2 \geq 40$
   b) En déduire que si $\in I$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.
3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \in I$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
   c) En déduire que (U_n) converge vers α.
   d) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On donne : $\ln 2 \simeq 0{,}69$; $\ln 10 \simeq 2{,}3$; $e^2 \simeq 7{,}39$; $e^{2,5} \simeq 12{,}18$; $\frac{1}{e^2 - 1} \simeq 0{,}15$;

$$\frac{1}{e^{2,5} - 1} \simeq 0{,}09 \;;\; (e^2 - 1)^2 \simeq 40{,}83 \;;\; (e^{2,5} - 1)^2 \simeq 125$$

Année 2015
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

$P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 - 3z + 2i - 1$

1) Montrons que, $P(z)$ admet une racine réelle z_0

Posons $z_0 = a\,, a \in \mathbb{R}\,; P(a) = 0 \Leftrightarrow (a^3 - a^2 - 3a - 1) + i(-2a^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - 3a - 1 = 0 & (1) \\ -2a^2 + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

$(2) : a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1\,;$

$1^3 - 1^2 - 3 \times 1 - 1 = -4 \neq 0\,; (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \times (-1) - 1 = 0$

-1 vérifie les équations (1) et (2) alors $z_0 = -1$ est la racine réelle de $P(z)$

2) Détermination de $a,\ b$ et c

$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (a+b)z^2 + (b+c)z + c$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -1 - 2i \\ b + c = -3 \\ c = 2i - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - 2i \\ c = 2i - 1 \end{cases}$

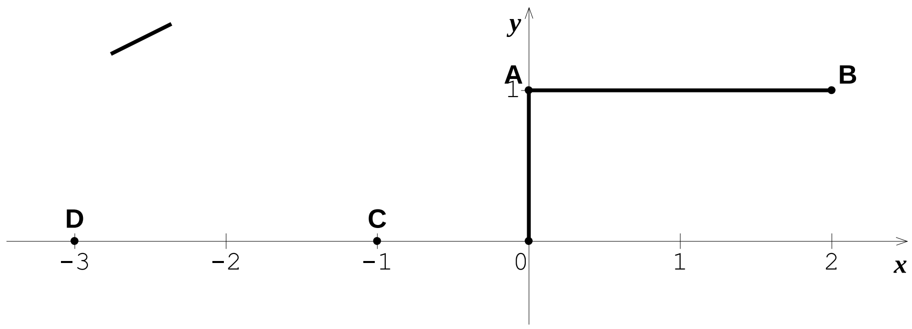
$\Leftrightarrow P(z) = (z+1)[z^2 - (2+2i)z + 2i - 1]$

3) Résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$

$z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_0 = -1$

$z^2 - (2+2i)z + 2i - 1 = 0\,; \Delta' = 1 \quad ; \quad z_1 = i \;\; ; \;\; z_2 = 2 + i \Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \{-1\,; i\,; 2+i\}$

4) $z_A = i\,;\ z_B = 2 + i\,;\ z_C = -1$



a) Plaçons les points $A,\ B$ et C

b) Calcul de l'affixe de D.

$t(A) = D \Longrightarrow z_D = z_A + z_{\overrightarrow{BC}} \Longrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B = -3$

c) Calculer de Z

$Z = \frac{z_A}{z_A - z_B} = \frac{i}{i-2-i} = -\frac{1}{2}i$

Module et un argument de Z : $|Z| = \frac{1}{2}$ et $Arg(Z) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Déduire de la nature du triangle OAB

$Arg(Z) = \left(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AO}\right) = -\frac{\pi}{2}$ alors OAB est un triangle rectangle en A

Exercice* 2** (**4 *points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$, on donne les points $A(-2\,;-1\,;\,2)$; $B(6\,;-5\,;\,3)$; $C(-1\,;3\,;10)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}$

1) a) Calcul de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-36\\-63\\36\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8-16+8=0$$

b) Interprétation géométrique

Comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les points A , B et C ne sont pas alignés

Comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ alors $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ et le triangle ABC est rectangle en A

c) Calcul Des distances AB et AC

$AB=\sqrt{64+16+1}=9$ et $AC=\sqrt{1+16+64}=9$

d) Déduire de la nature exacte du triangle ABC

Le triangle ABC est rectangle en A et $AB=AC$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

2) Démontrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-36\vec{\imath}-63\vec{\jmath}+36\vec{k}=9(-4\vec{\imath}-7\vec{\jmath}+4\vec{k})=9\vec{u}$ alors $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

3) Montrons que $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=9\|\vec{u}\|$

$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\|9\vec{u}\|=|9|\|\vec{u}\|=9\|\vec{u}\|$

Déduction de l'aire du triangle ABC en fonction de la norme de $\vec{u}$.

$Aire(ABC)=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\frac{9}{2}\|\vec{u}\|$

4) a) Coplanarité

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-36\\-63\\36\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=-108-126-36=-270\neq0$ donc $D\notin(ABC)$ et les points A , B , C , D ne sont pas coplanaires

b) Calcul de $d(D\,;\,(ABC))$

$$d(D\,;\,(ABC))=\frac{|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}=\frac{270}{81}=\frac{10}{3}$$

Déduction du volume V, en unité de volume

$V=\frac{1}{3}\times Aire(ABC)\times d(D;\,(ABC))=45\ unité\ de\ volume$

Problème

Partie A

$g(x)=(1-x)e^x-1\,;D_g=\mathbb{R}$

1) Etude des variations de g

$g'(x)=-xe^x$; $\forall\,x\in\mathbb{R},e^x>0$ alors $g'(x)$ et $-x$ ont le même signe

$\forall\, x \in]-\infty\,; 0[, g'(x) > 0$ et $\forall\, x \in]0\,; +\infty[, g'(x) < 0$. On en déduit que sur $]-\infty\,; 0[, g$ est croissant et sur $]0\,; +\infty[, g$ est décroissante

2) Calcul de $g(0)$

$g(0) = 1 + (1-0)\mathrm{e}^0 = 0$

Déduisons – en que, pour tout $x \neq 0\,, g(x) < 0$

$g(0) = 0$ est un maximum absolu de g sur $\mathbb{R}$ alors $\forall\, x \in \mathbb{R}\,, g(x) \leq 0$ et donc pour tout $x \neq 0\,, g(x) < 0$

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x-1} + 2 \;\; si\; x \neq 0 \\ \quad f(0) = 3 \end{cases} ;\; D_f = \mathbb{R}$$

On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x-1} + 2 = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$

b) Etablissons que $\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1-e^{-x}}$

$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1-e^{-x}}$

Détermination de la limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} + 2 = 2$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 2$

2) Montrons que $(D) : y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x-1} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y] = 0$ donc $(D) : y = -x + 2$ est bien une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$

3) Calcul de $f'(x)$, pour tout $x \neq 0$

$f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

4) a) Donnons le sens de variation de f

$\forall\, x \neq 0,\; (e^x - 1)^2 > 0$ et $g(x) < 0$ alors $f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,; 0[$ et sur $]0\,; +\infty[$

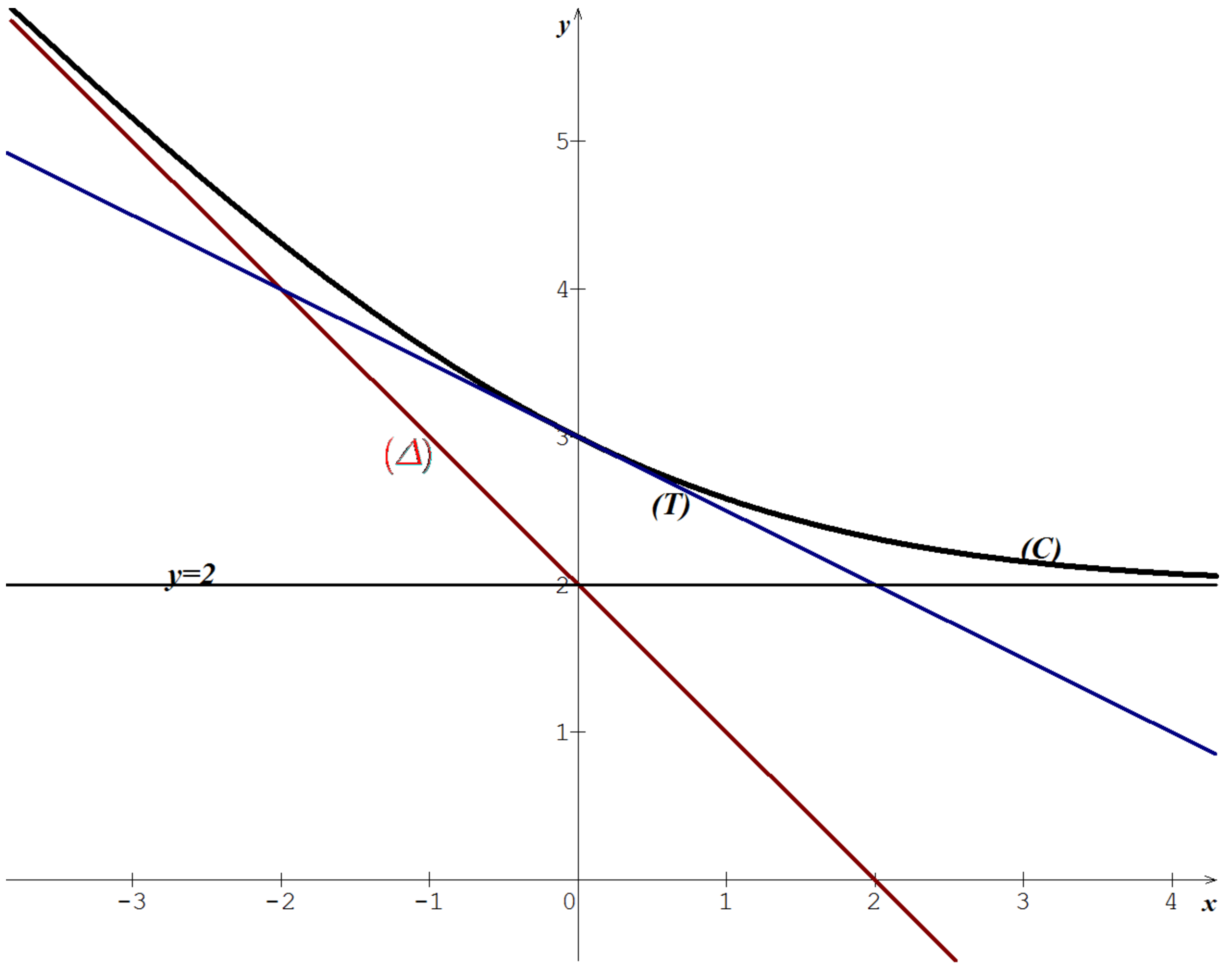
b) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2

5) Equation de (T)

$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow (T) : y = -\frac{1}{2}x + 3$

6) Traçons (D), (T) et (C).



Partie C

$h(x) = f(x) - x \,;\, D_h = \mathbb{R}$

1) Montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2\,;2{,}5[$
   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f et $x \longmapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) < 0$ et donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
   h étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers
   $h(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h(x)\,;\, \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} h(x)\right[=]-\infty\,;\,+\infty[$.
   $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$, donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$
   $h(2) = f(2) - 2 = \frac{2}{e^{2}-1} \simeq 0{,}30 > 0\,;$
   $h(2{,}5) = f(2{,}5) - 2{,}5 = \frac{2{,}5}{e^{2{,}5}-1} - 0{,}5 \simeq -0{,}275 < 0$
   On a $h(2) \times h(2{,}5) < 0$ alors $\alpha \in]2\,;2{,}5[$
2) $I = [2\,;2{,}5]$
   a) Démontrons que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \geq -20$ et $(e^{x} - 1)^2 \geq 40$
      La fonction g est strictement décroissante sur I et donc pour tout $x \in I$, on a :
      $g(2{,}5) \leq g(x) \leq g(2) \Leftrightarrow g(x) \geq g(2{,}5)$ or

$g(2{,}5) = -1{,}5e^{2{,}5} - 1 = -19{,}27 \geq -20$. On a alors $g(x) \geq -20$

D'autre part :

$2 \leq x \leq 2{,}5 \Leftrightarrow e^2 \leq e^x \leq e^{2{,}5} \Leftrightarrow (e^2-1)^2 \leq (e^x-1)^2 \leq (e^{2{,}5}-1)^2$ donc

$(e^x-1)^2 \geq (e^2-1)^2$ or $(e^2-1)^2 = 40{,}83 \geq 40$. On a alors $(e^x-1)^2 \geq 40$.

b) Déduisons --en que si $\in I$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

$\forall\, x \in I$, on a : $g(x) < 0$ et $g(x) \geq -20 \Longrightarrow 0 < -g(x) \leq 20$

$(e^x-1)^2 \geq 40 \Longrightarrow \frac{1}{(e^x-1)^2} \leq \frac{1}{40} \Longrightarrow \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2} \leq \frac{20}{40} \Longrightarrow \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2} \leq \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{g(x)}{(e^x-1)^2} \geq -\frac{1}{2} \Longrightarrow f'(x) \geq -\frac{1}{2}\cdot$ On sait déjà que $f'(x) \leq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall\, x \in I$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

3) $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \in I$.

$U_0 = 2 \in \mathrm{I}$

Supposons que $U_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $U_{n+1} \in I$

Si $2 \leq U_n \leq 2{,}5$ alors $f(2{,}5) \leq f(U_n) \leq f(2)$ car f est strictement décroissante

$f(2{,}5) = \frac{2{,}5}{e^{2{,}5}-1} + 2 = 2{,}22$ et $f(2) = \frac{2}{e^2-1} + 2 = 2{,}30$.

On alors $2 \leq 2{,}22 \leq f(U_n) \leq 2{,}30 \leq 2{,}5 \Longrightarrow 2 \leq U_{n+1} \leq 2{,}5 \Longrightarrow U_{n+1} \in I$

On conclut alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \in I$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

$\forall\, x \in I$, on a : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Longrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$\alpha \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.

D'après l'inégalité de la moyenne,

$\left|\int_\alpha^{U_n} f'(x)dx\right| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \Longrightarrow \left|[f(x)]_\alpha^{U_n}\right| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

$\Longrightarrow |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. Comme $U_{n+1} = f(U_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

- $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Raisonnement par récurrence :

$|U_0 - \alpha| = |2 - \alpha|$ et $\alpha \in I \Longrightarrow -2{,}5 \leq -\alpha \leq -2 \Longrightarrow -0{,}5 \leq 2 - \alpha \leq 0$

$\Longrightarrow |2-\alpha| \leq \frac{1}{2}\cdot$ Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \frac{1}{2}$ d'où $|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$

Supposons que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. Si $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ alors $\frac{1}{2}|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ et on a

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \Longrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

On conclut donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

c) En déduire que (U_n) converge vers α.

$\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n-\alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$;

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n-\alpha| = 0$.

La suite $(U_n-\alpha)$ converge vers 0 et alors la suite (U_n) converge vers α

d) Pour avoir $|U_n-\alpha| \leq 10^{-3}$, il suffit qu'on ait $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Longrightarrow -(n+1)\ln 2 \leq -3\ln 10 \Longrightarrow n+1 \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2}$

$\Longrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1 \Longrightarrow n \geq 9$

Donc le plus petit des entiers n est $n_0 = 9$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2015
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (3 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $9y'' + 49y = 0$

1) Résoudre (E)
2) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 7$
3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$
4) Résoudre dans $]0\,;2\pi[$, l'équation $f(x) = \sqrt{6}$
5) Calculer la valeur moyenne ϑ de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{14}\,;\frac{3\pi}{7}\right]$

Exercice 2 (5 points)

1) Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules rouges et 5 boules noires. On extrait simultanément 2 boules de l'urne.
   Quel est le nombre de résultats possibles ?
2) Le tirage d'une boule jaune fait gagner 2 points, celui d'une boule rouge fait gagner 1 point, celui d'une boule noire fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points obtenu à l'issue d'un tirage simultané de 2 boules. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
3) En supposant tous les tirages équiprobables, déterminer la loi de probabilité de X.
4) Calculer l'espérance mathématique de X.
5) Calculer la variance de X.
   NB : On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Problème (12 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
   b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$
2) Sachant que φ est une solution de (E),
   a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x
   b) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x si $f(0) = \frac{e}{2}$.

Partie B

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+ e^{-3x}}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ (unité$= 2\ cm$).

1) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$
   En déduire que (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations
2) a) Calculer $h'(x)$ en fonction de x
   b) Déterminer le signe de $h'(x)$. En déduire le sens de variation de h.
   Dresser son tableau de variation.
3) Tracer (C) et ses asymptotes
4) Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha h(x)\,dx$
   a) Donner une interprétation graphique de I_α
   b) Calculer I_α en fonction de α
      Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$.

Partie C

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 h(x)\, e^{\frac{x}{n}} dx$ où h est la fonction définie dans la partie B.

1) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$
   b) Etudier le sens de variation de (U_n)
   c) la suite (U_n) est – elle convergente ?
2) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}}\, I_1$
   b) En déduire la limite de la suite (U_n)

On donne $e \simeq 2{,}7$; $e^3 \simeq 20$.

Année 2015
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

$(E):\ 9y'' + 49y = 0$

1) Résolution de (E)

$$9y'' + 49y = 0 \Leftrightarrow y'' + \left(\frac{7}{3}\right)^2 y = 0 \Leftrightarrow y = A\cos\frac{7}{3}x + B\sin\frac{7}{3}x;\ (A\,, B\ \in \mathbb{R})$$

2) Déterminons la solution f de (E)

$$f(x) = A\cos\frac{7}{3}x + B\sin\frac{7}{3}x \text{ et } f'(x) = -\frac{7}{3}A\sin\frac{7}{3}x\ +\frac{7}{3}B\cos\frac{7}{3}x$$

$$f(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3} \text{ et } f'(0) = 7 \Leftrightarrow \frac{7}{3}B = 7 \Leftrightarrow B = 3$$

$$f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{7}{3}x + 3\sin\frac{7}{3}x$$

3) Montrons que pour tout réel $x, f(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{7}{3}x + 3\sin\frac{7}{3}x = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\cos\frac{7}{3}x + \frac{3}{2\sqrt{3}}\sin\frac{7}{3}x\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{7}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{7}{3}x\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{7}{3}x + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{7}{3}x\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$$

4) Résolution dans $]0\,;2\pi[$, de l'équation $f(x) = \sqrt{6}$

$$f(x) = \sqrt{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{7}{3}x = \begin{cases} \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{6k\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{6k\pi}{7} \end{cases}$$

$$k = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{28} \end{cases};\quad k = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{31\pi}{28} \\ x = \frac{25\pi}{28} \end{cases};\qquad k = 2 \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{55\pi}{28} \\ x = \frac{49\pi}{28} \end{cases}$$

$$S_{]0\,;2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{28}\,;\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{25\pi}{28}\,;\,\frac{31\pi}{28}\,;\,\frac{49\pi}{28}\,;\,\frac{55\pi}{28}\right\}$$

5) Calcul de la valeur moyenne ϑ de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{14}\,;\frac{3\pi}{7}\right]$

$$\vartheta = \frac{1}{\frac{3\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}}\int_{\frac{3\pi}{14}}^{\frac{3\pi}{7}} f(x)dx = \frac{14}{3\pi}\int_{\frac{3\pi}{14}}^{\frac{3\pi}{7}} 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)dx = \frac{14}{3\pi}\times 2\sqrt{3}\times\frac{3}{7}\left[\sin\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{3\pi}{14}}^{\frac{3\pi}{7}}$$

$$\vartheta = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{6-2\sqrt{3}}{\pi}$$

Exercice 2

1) Urne : 3 boules jaunes, 2 boules rouges, 5 boules noires
Tirage simultané de 2 boules de l'urne ; soit Ω l'univers associé.
Le nombre de résultats possible est $Card(\Omega) = C_{10}^2 = 45$

2) Les résultats possibles et le nombre de points obtenus.
$JJ \Longrightarrow 4\ points$; $JR \Longrightarrow 3\ points$; $JN \Longrightarrow -1\ point$; $RR \Longrightarrow 2\ points$;
$RN \Longrightarrow -2\ points$; $NN \Longrightarrow -6\ points$

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{-6\,;\ -2\,;\ -1\,;2\,;3\,;4\}$

3) La loi de probabilité de X

$X = x$	-6	-2	-1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{10}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{3}{45}$

4) Calcul de l'espérance mathématique de X

$E(X) = \frac{-60-20-12+2+18+12}{45} = -\frac{7}{5}$

5) La variance de X

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{360+40+15+4+54+48}{45} - \frac{49}{25} = \frac{521}{45} - \frac{49}{25} = \frac{2605-441}{225} = \frac{2164}{225}$

Problème

Partie A

(E) : $y' - 3y = \frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$; $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$

1) a) Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Les fonctions φ et $x \longmapsto e^{-3x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

b) Exprimons $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$

$f'(x) = -3e^{-3x}\varphi(x) + e^{-3x}\varphi'(x) = e^{-3x}[\varphi'(x) - 3\varphi(x)]$

2) Sachant que φ est une solution de (E),

a) Expression de $f'(x)$ en fonction de x

φ est une solution de $(E) \Longrightarrow \varphi'(x) - 3\varphi(x) = \frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$ et alors

$f'(x) = e^{-3x} \times \frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{-3e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

b) Expression de $f(x)$ en fonction de x si $f(0) = \frac{e}{2}$.

$f'(x) = \frac{-3e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2} \Longrightarrow f(x) = \frac{-e}{1+e^{-3x}} + k\,;k \in \mathbb{R}$

$f(0) = \frac{e}{2} \Leftrightarrow -\frac{e}{2} + k = \frac{e}{2} \Longrightarrow k = e$ et donc $f(x) = \frac{-e}{1+e^{-3x}} + e = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$

Partie B

$h(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}\,; D_h = \mathbb{R}$

1) Déterminons les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e}{1+e^{3x}} = e$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e} \times \frac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$

Déduction : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = e$ alors la droite d'équation $y = e$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$

2) a) Calcul de $h'(x)$ en fonction de x

$h'(x) = \frac{-3e^{1-3x}(1+ e^{-3x})+3e^{-3x}e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2} = \frac{-3e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

b) Déterminons le signe de $h'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, 3e^{1-3x} > 0$ et $(1+ e^{-3x})^2 > 0$ alors $\frac{3e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2} > 0$ et $\frac{-3e^{1-3x}}{(1+e^{-3x})^2} < 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) < 0$

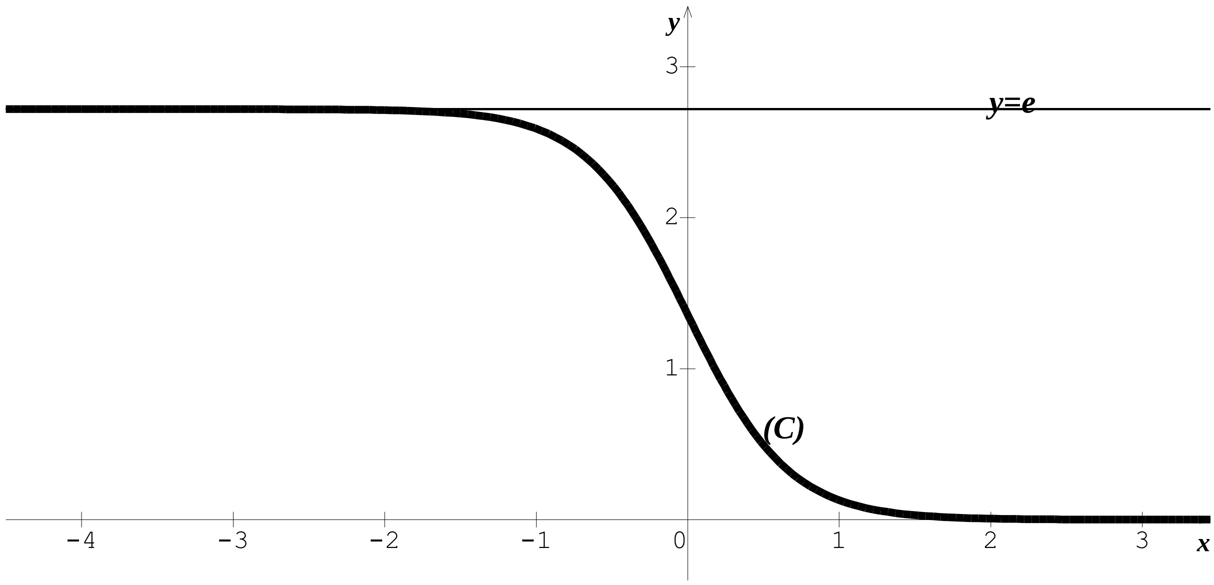
Déduction du sens de variation de h.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	e $\searrow$ 0

3) Traçons (C) et ses asymptotes



4) $I_\alpha = \int_0^\alpha h(x)\,dx$; $\alpha > 0$

a) Interprétation graphique de I_α

I_α représente l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par ka courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

b) Calcul de I_α en fonction de α

$I_\alpha = \int_0^\alpha e \times \frac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}}dx = \left[-\frac{e}{3}\ln(1 + e^{-3x})\right]_0^\alpha = \frac{e}{3}\ln 2 - \frac{e}{3}\ln(1 + e^{-3\alpha})$

Déterminons $\lim_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$ ·

$\lim_{\alpha \to +\infty} I_\alpha = \frac{e}{3}\ln 2$ car $\lim_{\alpha \to +\infty} \ln(1 + e^{-3\alpha}) = \ln 1 = 0$

Partie C

$U_n = \int_0^1 h(x)\, e^{\frac{x}{n}} dx \; ; n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, x \in [0\,;1], e^{\frac{x}{n}} > 0$ et $h(x) > 0$ d'où $h(x)e^{\frac{x}{n}} > 0$ et $\int_0^1 h(x)\, e^{\frac{x}{n}} dx > 0$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$

b) Etude du sens de variation de (U_n)

$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 h(x) \left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right) dx$;

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall\, x \in [0\,;1], \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{n+1}} < e^{\frac{x}{n}}$. Donc $e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}} < 0$ et $h(x) > 0$

On a $h(x) \left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right) < 0$ et $\int_0^1 h(x) \left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right) dx < 0 \Leftrightarrow \quad U_{n+1} - U_n < 0$ et alors

(U_n) est décroissante

c) convergence de (U_n)

(U_n) est décroissante et est minorée par 0, alors elle converge

2) a) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$

$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow 1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow h(x) \leq h(x)e^{\frac{x}{n}} \leq h(x)e^{\frac{1}{n}}$

Par intégration, on obtient : $\int_0^1 h(x)\, dx \leq \int_0^1 h(x)\, e^{\frac{x}{n}} dx \leq e^{\frac{1}{n}} \int_0^1 h(x)\, dx$

On a donc $I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$

b) Déduction de la limite de la suite (U_n)

On a $I_1 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} U_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} I_1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} I_1 = I_1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = I_1$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2014
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\vec{v})$; unité : 2 cm.
On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = -\frac{1}{z}\cdot$ F est l'application du plan $\mathcal{P}$ privé de O dans lui – même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

1) On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Exprimer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ.
2) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où Z est l'affixe du milieu I de $[MM']$; $x\ ,y$, $X\ ,Y$ sont des réels.
   a) Exprimer X et Y en fonction de x et y
   b) Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que I appartienne à l'axe $(O\ ;\ \vec{u})$
   c) Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M tels que I appartienne à l'axe $(O\ ;\ \vec{v})$
3) On suppose $|z| = 1$. On pose donc $z = e^{i\theta}$,$\theta \in \mathbb{R}$.
   a) Calculer Z en fonction de θ
   b) Caractériser géométriquement la restriction de F au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2 (4 points)

A l'instant $t = 0$, un corps à température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'aire ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$.
Au bout de 10 minutes, la température du corps est $50°C$. Sa température à la date t exprimée en minutes, est solution de l'équation différentielle : $\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$ où k est une constante réelle. On pose $\Phi(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par Φ ?
   b) Déterminer Φ.
   c) En déduire $\theta(t)$ en fonction de k.
   d) Déterminer la constante k puis, en déduire l'expression définitive de $\theta(t)$.
2) a) Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera – t – elle de moitié ?
   b) Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?
   On donne : $\ln 2 \simeq 0{,}70$; $\ln\frac{3}{4} \simeq -0{,}29$.

Problème (**12 *points***)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (1-x)e^x & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} & si\ x > 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; unité graphique : 2 cm.

Partie A

1) a) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$
   b) f est – elle dérivable en $x_0 = 1$? Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   b) Soit f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f'.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.
   (On donne : $\frac{1}{e} \simeq 0{,}36$)
5) Tracer (Δ), (T) et (C).
6) a) Montrer que la restriction de f à $]1\ ;\ +\infty[$ réalise une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   c) On note (C') la courbe représentative de cette bijection réciproque dans le repère $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Construire (C').

Partie B

1) Soit α un réel strictement négatif ;
   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} xe^x\, dx$;
   b) On désigne par D_α le domaine plan délimité par (C), (Ox) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.
      Calculer, en cm^2, la valeur de l'aire $A(\alpha)$ du domaine D_α.
   c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$
2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.
   c) Calculer, en cm^3, le volume $\mathcal{V}(\alpha)$ du solide $S(\alpha)$ engendré par la rotation complète de D_α autour de l'axe (Ox).

Partie C

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{\cos t} - 1 \\ y(t) = 2\tan t \end{cases}, t \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$$

1) Donner une équation cartésienne de (Γ)
2) En déduire que (Γ) est une partie de (C) que l'on précisera.

Année 2014
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

$f(z) = -\frac{1}{z}$; $z \in \mathbb{C}^*$ et $F: \mathcal{P} - \{O\} \longrightarrow \mathcal{P} - \{O\}$; $M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' = f(z)$.

1) $z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Expression du module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ.

$$|f(z)| = \left|-\frac{1}{z}\right| = \frac{|-1|}{|z|} = \frac{1}{r} \; ; \; arg\big(f(z)\big) = arg\left(-\frac{1}{z}\right) = arg(-1) - arg(z) = \pi - \theta$$

2) $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où Z est l'affixe du milieu I de $[MM']$

a) Expression de X et Y en fonction de x et y

$$Z = \frac{z+z'}{2} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2} = \frac{x+iy-\frac{1}{x+iy}}{2} = \frac{x+iy-\frac{x-iy}{x^2+y^2}}{2} = \frac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} + i\frac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} = X + iY$$

Alors $X = \frac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}$ et $Y = \frac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}$

b) Déterminons et représentons l'ensemble $(\mathcal{E})$

$I \in (O\,;\,\vec{u}) \Longrightarrow Y = 0 \Longrightarrow \frac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} \Longrightarrow y = 0$ et $(x\,;y) \neq (0\,;0)$ car $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$

Donc $(\mathcal{E})$ est l'axe $(O\,;\,\vec{u})$ privé de O

c) Déterminons et représentons l'ensemble $(\mathcal{F})$

$I \in (O\,;\,\vec{v}) \Longrightarrow X = 0 \Longrightarrow \frac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} \Longrightarrow x = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$ et $(x\,;y) \neq (0\,;0)$

Donc $(\mathcal{F})$ est la réunion de l'axe $(O\,;\,\vec{v})$ privé de O et du cercle de centre O et de rayon 1.

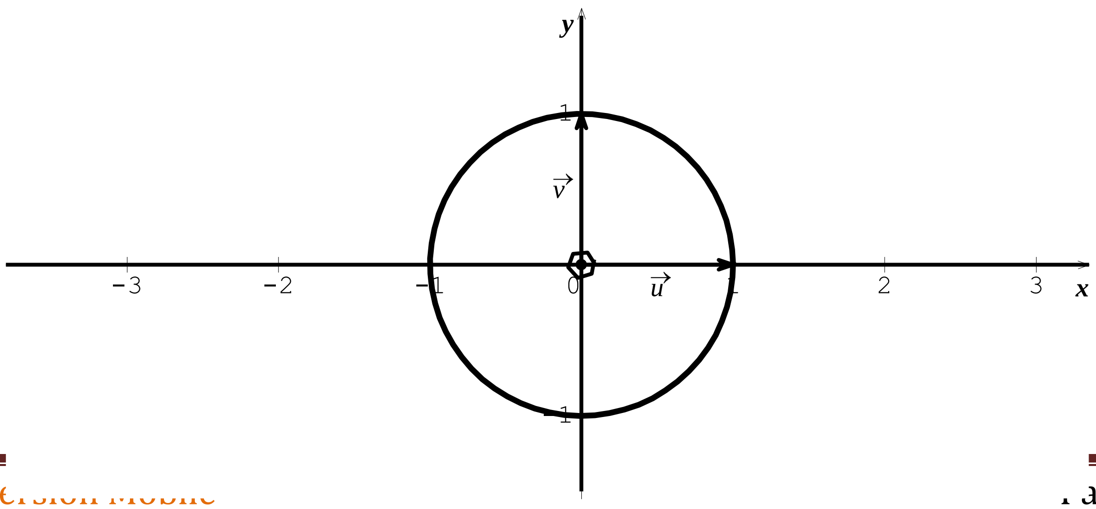
3) $|z| = 1$; $z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.

a) Calcul de Z en fonction de θ

$$Z = \frac{e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = i\sin\theta$$

b) Si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors $|z| = OM = 1$ et donc $z = e^{i\theta}$ et $z' = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \bar{z}$.

Alors la restriction de F au cercle de centre O et de rayon 1 est la symétrie d'axe $(O\,;\,\vec{u})$



Exercice 2

$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$; $\Phi(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a) Equation différentielle vérifiée par Φ

$$\Phi(t) = \theta(t) - \theta_1 \Leftrightarrow \Phi'(t) = \theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_1) \Leftrightarrow \Phi'(t) = -k\Phi(t)$$

b) Détermination de Φ

$$\Phi'(t) = -k\Phi(t) \Leftrightarrow \Phi(t) = re^{-kt}\,; r \in \mathbb{R}$$

c) Déduction de $\theta(t)$ en fonction de k

$$\Phi(t) = \theta(t) - \theta_1 \Leftrightarrow \theta(t) = \Phi(t) + \theta_1 \Leftrightarrow \theta(t) = re^{-kt} + 20$$

$\theta(0) = 60 \Leftrightarrow r + 20 = 60 \Leftrightarrow r = 40$ et $\theta(t) = 40e^{-kt} + 20$

d) Détermination de la constante k et déduction de l'expression définitive de $\theta(t)$

$$\theta(10) = 50 \Leftrightarrow 40e^{-10k} + 20 = 50 \Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

On a donc $\theta(t) = 40e^{\frac{t}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + 20$

2) a) $\theta(t) = 30 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{t}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = -2\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{-20\ln 2}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \simeq 48\ minutes$

b) La température du corps au bout d'une heure

$$\theta(60) = 40e^{6\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + 20 = 40\left(\frac{3}{4}\right)^6 + 20 \simeq 27°C$$

Problème

$$:\begin{cases} f(x) = (1-x)e^x \ \ si\ x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}\ \ si\ x > 1 \end{cases} ;\ D_f = \mathbb{R}$$

Partie A

1) a) Etude de la continuité de f en $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1-x)e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 0$ et

$f(1) = (1-1)e = 0$. On a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ alors f est continue en 1

b) Dérivable de f en $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} -e^x = -e$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}} = +\infty$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique : (C) admet au point de coordonnées $(1\,;0)$, une demi – tangente de coefficient directeur $-e$ à gauche, et à droite, une demi – tangente verticale dirigée vers le haut

2) a) Calcul des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} = +\infty$

b) Calcul de $f'(x)$ et étude du signe de f'

- $\forall\, x \leq 1\,, f'(x) = -xe^x$; $e^x > 0$ donc $f'(x)$ et $-x$ ont le même signe.
  $\forall\, x \in\,]-\infty\,;0[\,; f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in\,]0\,;1[\,; f'(x) < 0$
- $\forall\, x > 1\,, f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; $\sqrt{x^2 + 2x - 3} > 0$ et $x + 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-e$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Montrons que $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

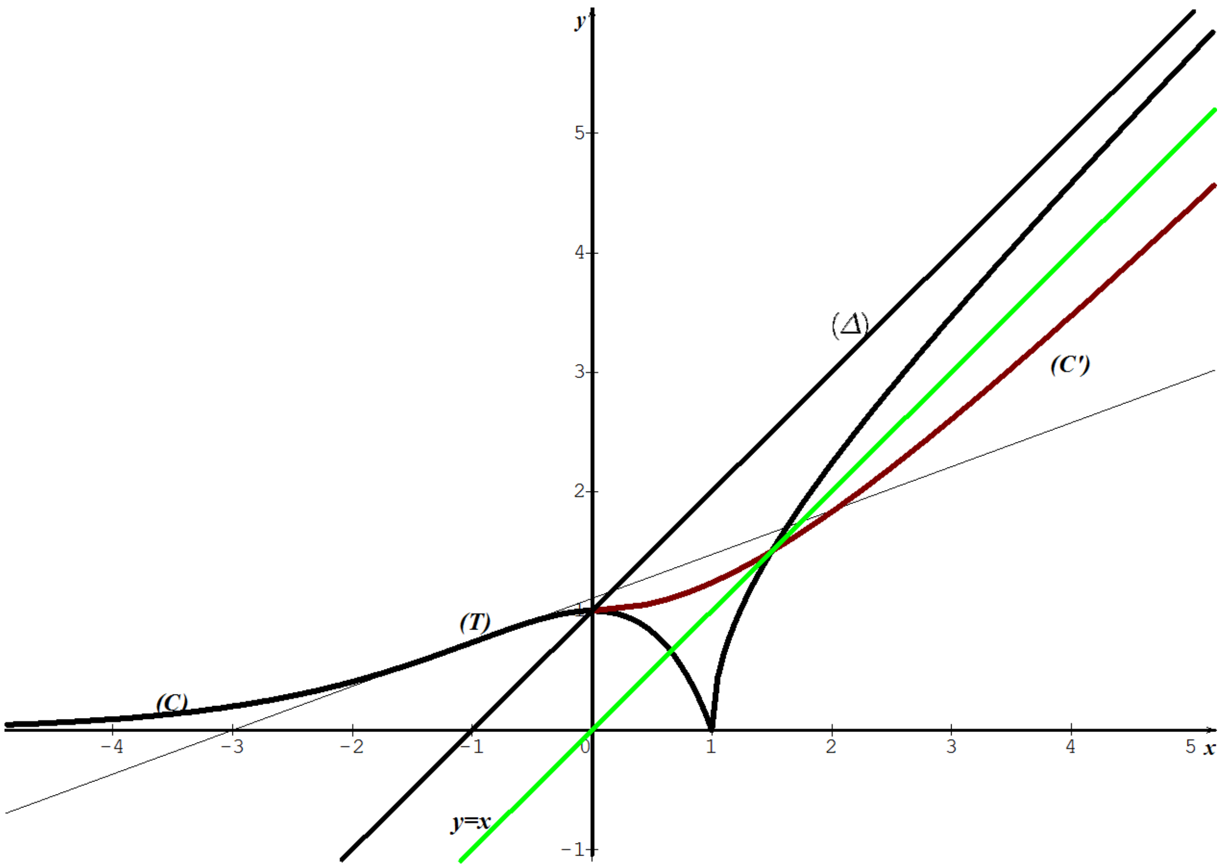
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+x+1} = 0$$

Alors $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

4) Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1

$(T) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) \iff (T) : y = \frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$

5) Traçons (Δ), (T) et (C)



6) a) Sur $]1\,;\,+\infty[$, f est continue car dérivable et est strictement croissante, alors la restriction de f à $]1\,;\,+\infty[$ réalise une bijection de $]1\,;\,+\infty[$ sur $J =]0\,;\,+\infty[$

b) Construction de (C')

(C') et $(C)_{/]1\,;\,+\infty[}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

(Voir figure)

Partie B

1) $\alpha < 0$

a) Calcul de $I(\alpha) = \int_\alpha^0 xe^x\,dx$

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow I = [xe^x]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x\,dx \Rightarrow I = -1 + (1-\alpha)e^\alpha$

b) Calcul de $A(\alpha)$, en cm^2

$A(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)dx \times 4\,cm^2 = 4\int_\alpha^0 (1-x)e^x dx = 4\left(\int_\alpha^0 e^x\,dx - I\right)$

$A(\alpha) = [8 + 4(\alpha - 2)e^\alpha]\,cm^2$

c) Calcul de $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

$\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha) = 8$ car $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \alpha e^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} e^\alpha = 0$

3) a) Détermination des réels a , b et c

$F'(x) = [2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c]e^{2x} = (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

$\Leftrightarrow 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c = x^2 - 2x + 1$

Par identification : $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{3}{2}$; $c = \frac{5}{4}$ et $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{2x}$

b) Calcul de $\mathcal{V}(\alpha)$, en cm^3

$\mathcal{V}(\alpha) = \pi\int_\alpha^0 f^2(x)dx \times 8\,cm^3 = 8\pi\int_\alpha^0 (1-x)^2 e^{2x}dx = 8\pi[F(x)]_\alpha^0$

$\mathcal{V}(\alpha) = 8\pi\left[\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{4}\right)e^{2\alpha}\right] = 2\pi[5 - (2\alpha^2 - 6\alpha + 5)e^{2\alpha}]\,cm^3$

Partie C

$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{\cos t} - 1 \\ y(t) = 2\tan t \end{cases}, t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

1) Equation cartésienne de (Γ)

$x = \frac{2}{\cos t} - 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 t} = (x+1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = \frac{(x+1)^2}{4}$

$y = 2\tan t \Leftrightarrow y^2 = 4\tan^2 t = 4\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) = 4\left(\frac{(x+1)^2}{4} - 1\right)$

$y^2 = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ car $y > 0$

$t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 0 < \cos t < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\cos t} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\cos t} - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 1$

Donc $(\Gamma) : y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}\,;\ x > 1$

2) Déduisons-en que (Γ) est une partie de (C)

$(\Gamma) : y = f(x)\,;\ x > 1$ alors $(\Gamma) = (C)_{/]1\,;+\infty[}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2014
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (**4 points**)

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

1) Etudier la position relative de :
   a) $M(t+2\pi)$ et $M(t)$
   b) $M(-t)$ et $M(t)$
   c) $M(\pi - t)$ et $M(t)$
2) a) Montrer que si $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ alors $(\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$
   b) En déduire qu'il suffit d'étudier (C) pour $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$
3) On désigne par (C_1) la partie de (C) correspondant à $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$
   a) Etudier les fonctions : $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et dresser le tableau de variation conjoint
   b) Tracer (C_1), puis (C) en utilisant les résultats du 1)

Exercice 2 (**4 points**)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les points : $A(-1 ; 0 ; 2)$, $B(0 ; 1 ; 3)$, $C(1 ; 3 ; 0)$ et $D(-1 ; -1 ; 1)$.

1) Calculer l'aire du triangle ABC
2) a) Calculer la distance du point D au plan (ABC)
   b) Les points A , B , C et D sont – ils coplanaires ?
3) Calculer le volume du tétraèdre $DABC$
4) a) Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABDE$ soit un parallélogramme.
   b) Calculer l'aire du parallélogramme $ABDE$

Problème (**12 points**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + (x+1)e^{-2x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité $2\ cm$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie par $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2) a) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation
   b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x

Partie B **:** Etude de f et construction de (C)

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position relative de (C) et (Δ)
3) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer à l'aide de $g(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f
4) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera
   b) Construire dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$; (C) ; (Δ) et la courbe (Γ) de f^{-1}, réciproque de f.

Partie C **:** Calcul d'aire et de volume

1) Soit α un réel strictement supérieur à -1.
   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par (C) , (Δ) et les droites d'équations :
      $x = -1$ et $x = \alpha$.
   b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$
2) On désigne par (D) le domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$; et par V le volume en cm^3 du solide S engendré par la rotation complète de (D) autour de l'axe des abscisses.
   a) Montrer que $[f(x)]^2 = (x+1)^2(1 + 2e^{-2x} + e^{-4x})$
   b) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
      $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - \left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{32}(8x^2 + 20x + 13)e^{-4x}$
      Calculer $H'(x)$ et l'exprimer à l'aide de $f(x)$;
   c) En déduire le volume V.

Année 2014
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice 1

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

1) Etude de la position relative de :
   a) $M(t+2\pi)$ et $M(t)$

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) = (-1)^2\cos(t) = \cos(t) = x(t) \\ y(t+2\pi) = \sin(2t+4\pi) = (-1)^4\sin(2t) = \sin(2t) = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(t+2\pi) = M(t)$$

   b) $M(-t)$ et $M(t)$

$$\begin{cases} x(-t) = \cos(-t) = \cos(t) = x(t) \\ y(-t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(-t) = S_{(Ox)}\big(M(t)\big)$$

   c) $M(\pi - t)$ et $M(t)$

$$\begin{cases} x(\pi - t) = \cos(\pi - t) = -\cos(t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = -\sin(2t) = -y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(\pi - t) = S_O\big(M(t)\big)$$

2) a) Montrons que si $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $(\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$

$t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le -t \le 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \pi - t \le \pi \Rightarrow (\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$

   b) Déduisons – en qu'il suffit d'étudier (C) pour $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

   $\forall\, t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $(\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ et $\forall\, t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right] = [0;\,\pi]$, $-t \in [-\pi\,;0]$

   $[-\pi\,;0] \cup [0;\,\pi] = [-\pi;\,\pi]$ est de longueur 2π.

   Donc on obtient complètement la courbe (C) en traçant la partie de (C) correspondant à $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ puis en effectuant une première symétrie par rapport à l'origine O du repère suivie d'une deuxième symétrie par rapport à l'axe des abscisses

3) On désigne par (C_1) la partie de (C) correspondant à $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
   a) Etude des fonctions : $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = 2\cos 2t \end{cases}$$

   $x'(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

   $\forall\, t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) \le 0$ et x est décroissante

   $y'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

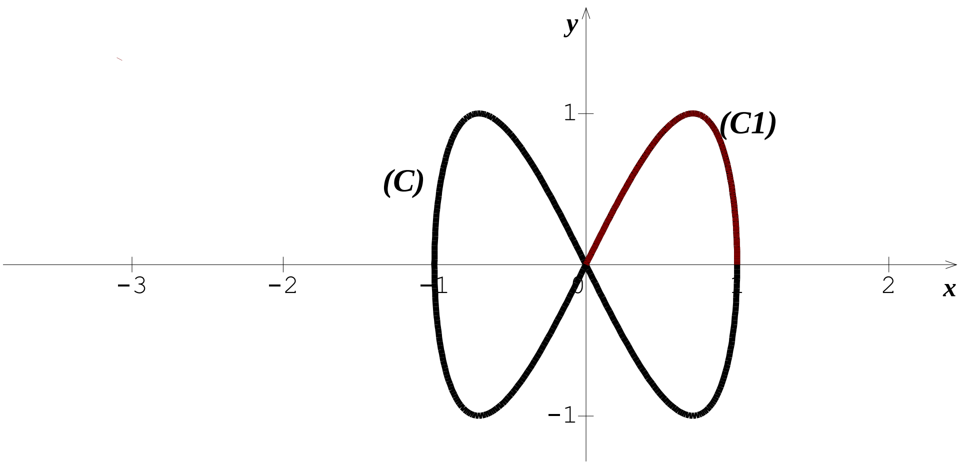
   $\forall\, t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $y'(t) \ge 0$ et y est croissante

   $\forall\, t \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $y'(t) \le 0$ et y est décroissante

Tableau de variation conjoint

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	-1
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) Tracer (C_1), puis (C) en utilisant les résultats du 1)



Exercice 2

$A(-1\,;0\,;2)$, $B(0\,;1\,;3)$, $C(1\,;3\,;0)$ et $D(-1\,;\,-1\,;1)$.

1) Calcul de l'aire du triangle ABC

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}$

$Aire(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{25+16+1} = \frac{\sqrt{42}}{2}unité\ d'aire$

2) a) Calcul de la distance du point D au plan (ABC)

$d\big(D\,;\,(ABC)\big) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{|-10-4-1|}{\sqrt{25+16+1}} = \frac{5\sqrt{42}}{14}$

b) $d\big(D\,;\,(ABC)\big) \neq 0$ alors les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires

3) Calcul du volume du tétraèdre $DABC$

$V = \frac{1}{3}\times Aire(ABC)\times d\big(D\,;\,(ABC)\big) = \frac{5}{2}unité\ de\ volume$

4) a) Détermination des coordonnées du point E

Soit $E(x\,;y\,;z)$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \begin{cases}-1-x=1\\-1-y=1\\1-z=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=-2\\z=0\end{cases} \Longrightarrow E(-2\,;\,-2\,;0)$

b) Calcul de l'aire du parallélogramme $ABDE$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$Aire(ABDE) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}\| = \sqrt{2}\; unité\; de\; volume$

Problème

$f(x) = x + 1 + (x+1)e^{-2x}\ ;\ D_f = \mathbb{R}$

Partie A **: Etude d'une fonction auxiliaire**

$g(x) = e^{2x} - 2x - 1\ ;\ D_g = \mathbb{R}$

1) Calcul des limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}(1 - 2xe^{-2x} - e^{-2x}) = +\infty$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

2) a) Etude du sens de variation de g et tableau de variation

$g'(x) = 2(e^{2x} - 1)$; $e^{2x} - 1 > 0 \Longrightarrow x > 0$ donc :

$\forall\, x \in]-\infty\,;0[\,, g'(x) < 0$ et $\forall\, x \in]0\,;+\infty[\,, g'(x) > 0$.

On en déduit que sur $]-\infty\,;0[$, g est décroissante et sur $]0\,;+\infty[$, g est croissante

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Déduction du signe de $g(x)$ pour tout réel x

$g(0) = 0$ est un minimum absolu de g sur $\mathbb{R}$ et donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.

Partie B **: Etude de f et construction de (C)**

1) Calcul des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)(1 + e^{-2x}) = -\infty$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 + xe^{-2x} + e^{-2x} = +\infty$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

2) Démontrons que $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} = 0$

Alors $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Position relative de (C) et (Δ)

$f(x) - y = (x+1)e^{-2x}$ et $e^{-2x} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall\, x \in]-\infty\,;-1[\,, f(x) - y < 0$ et $\forall\, x \in]-1\,;+\infty[\,, f(x) - y > 0$.

On en déduit que sur $]-\infty\,;-1[\,, (C)$ est en dessous de (Δ) et sur $]-1\,;+\infty[, (C)$ est au dessus de (Δ)

3) a) Calcul de $f'(x)$ et expression à l'aide de $g(x)$.

$f'(x) = 1 + e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} = e^{-2x}(e^{2x} - 2x - 1) = e^{-2x}g(x)$

Déduction du signe de $f'(x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, e^{-2x} > 0$ et $g(x) \geq 0$ alors $f'(x) \geq 0$ et f est croissante

b) Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

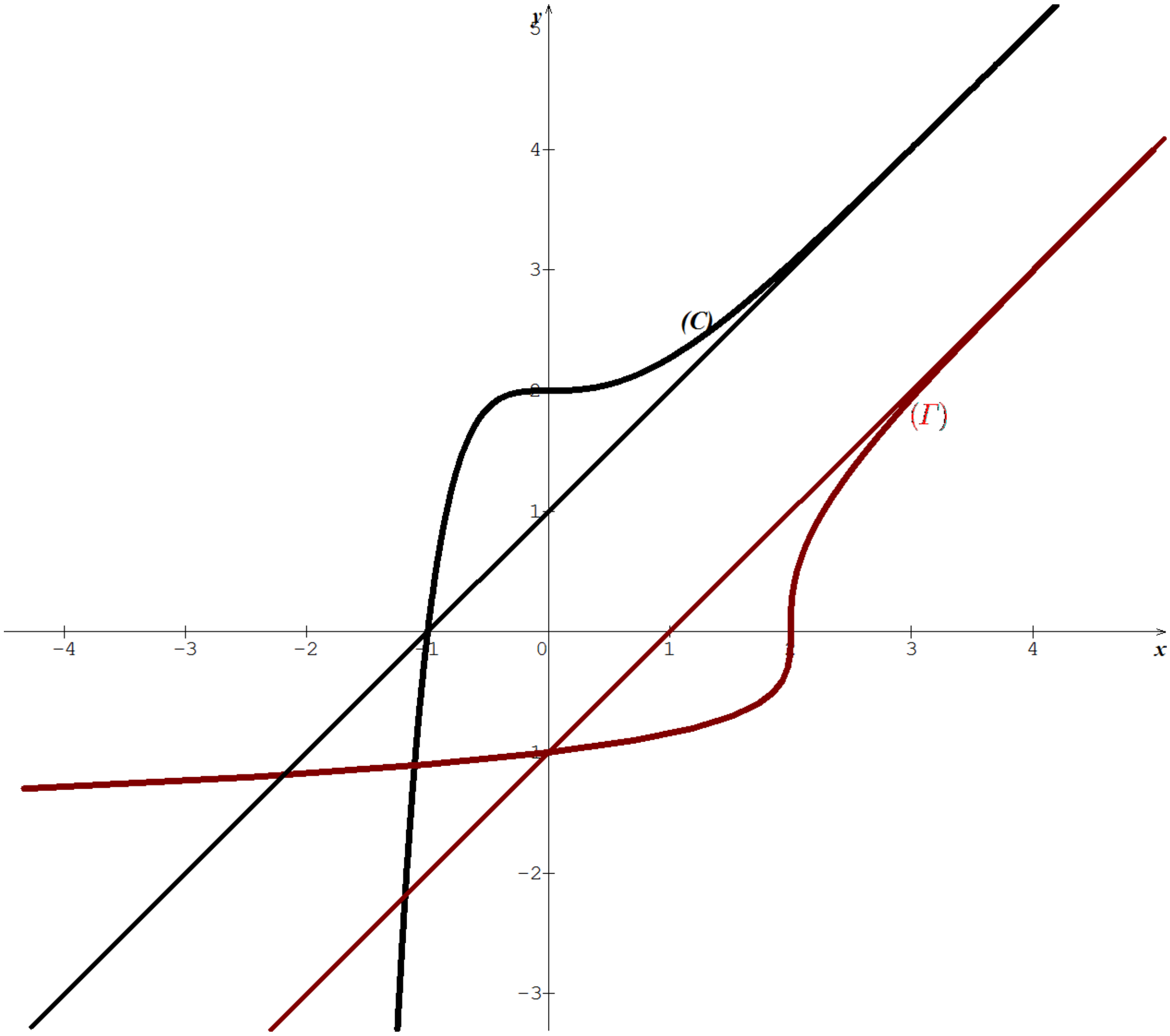
4) Calcul et interprétation de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x}(1 + e^{-2x}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{-2x} = +\infty$

Alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

5) a) f est continue dar dérivable et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]-\infty\,;\,+\infty[$

b) Construire de (C) ; (Δ) et (Γ)



Partie C **: Calcul d'aire et de volume**

1) Soit $\alpha > -1$

a) Calcul en cm^2, de l'aire $A(\alpha)$

$A(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha}[f(x) - y]dx \times 4\ cm^2 = 4\int_{-1}^{\alpha}(x+1)e^{-2x}\,dx$

$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$A(\alpha) = [-2(x+1)e^{-2x}]_{-1}^{\alpha} + 2\int_{-1}^{\alpha} e^{-2x}dx = e^2 - (2\alpha+3)e^{-2\alpha}$

b) Calcul de $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = e^2$ car $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} 2\alpha e^{-2\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{-2\alpha} = 0$

3)

a) Montrons que $[f(x)]^2 = (x+1)^2(1+2e^{-2x}+e^{-4x})$

$[f(x)]^2 = (x+1)^2(1+e^{-2x})^2 = (x+1)^2(1+2e^{-2x}+e^{-4x})$

b) Calcul de $H'(x)$ et expression à l'aide de $f(x)$

$H'(x) = x^2+2x+1-(2x+3-2x^2-6x-5)e^{-2x} - \frac{1}{32}(16x+20-32x^2-80x-52)e^{-4x}$

$H'(x) = x^2+2x+1+2(x^2+2x+1)e^{-2x}+(x^2+2x+1)e^{-4x}$

$H'(x) = (x+1)^2+2(x+1)^2e^{-2x}+(x+1)^2e^{-4x}$

$H(x) = \frac{1}{3}x^3+x^2+x-\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{32}(8x^2+20x+13)e^{-4x}$

c) Déduction du volume V

$V = \pi\int_{-1}^{0}[f(x)]^2\,dx \times 8\ cm^3 = 8[H(x)]_{-1}^{0} = \frac{\pi}{12}(3e^4+48e^2-247)\ cm^3$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2013
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE 1 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$.

Soient $A(1\,,2\,,3)$; $B(3\,,0\,,3)$ et $C(3\,,2\,,1)$.

1. Calculer AB ; BC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Trouver les coordonnées de D. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
   En déduire que $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$
3. Déterminer la distance séparant le point O au plan du quadrilatère $ABCD$;
4. Soit I le milieu de $[AC]$. Calculer OI, en déduire que I est le projeté orthogonale de O sur le plan $(ABCD)$.
5. Démontrer que les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux
6. Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.
7. Déterminer le volume de la pyramide de sommet O et de base, le quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 2 (4 points)

On considère la suite de terme générale U_n définie par : $U_n=\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}$; $n\geq 3$ et par son premier terme $U_2=3$.

1. Calculer U_3 ; U_4 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2.
   a. Montrer que (U_n) est minorée par 1
   b. Montrer que (U_n) est décroissante
   c. En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite.
3. On pose $V_n=\frac{U_n+1}{U_n-1}$
   a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison (On pourra exprimer V_n et V_{n-1} en fonction de U_{n-1})
   b. Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de (U_n)

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & si\ \ x<0 \\ f(x)=x\ln(1+x) & si\ x\geq 0\end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1. Soit g la fonction définie par $g(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}$ si $x\geq 0$.
   Déterminer le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire son signe sur $[0\,;\,+\infty[$

2.

a. Etudier la continuité de f en 0

b. Etudier la dérivabilité de f en 0

3.

a. Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x et vérifier que pour tout $x \geq 0$; $f'(x) = g(x)$

b. Montrer que pour tout $x < 0$, on a $f'(x) > 0$

c. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f'(x) > 0$

d. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

e. Dresser le tableau de variation de f

4.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat

b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$. (On pourra poser $X = \frac{1}{x}$)

c. Montrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$

d. Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) pour $x < 0$.

(On admettra que $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \leq 1$ pour $x < 0$)

5. Tracer la droite $(\Delta): y = x$; $(D): y = x + 1$ et $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$, unité graphique 2 cm.

PARTIE B

1.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b. Déduire au moyen d'une intégration par parties le calcul de $\int_0^{e-1} f(x)dx$

2. Calculer en cm², l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $(\Delta): y = x$; $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

3. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

a. Montrer que h réalise une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b. Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1} dans le même repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$

4. Quelle est l'aire $\mathcal{A}'$ en cm² de la boucle délimitée par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$?

PARTIE C

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\ln(-t)} \\ y(t) = \dfrac{t}{\ln(-t)} \end{cases} \quad avec\ t \in \left]-1\ ; 0\right[$$

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ)

2) Comment obtient-on (Γ) à partir de la courbe $(\mathcal{C})$ de f

3) Construire (Γ) en pointillées dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$

Année 2013
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

$A(1,2,3)$; $B(3,0,3)$ et $C(3,2,1)$

1. Calcul

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = 0-4+0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -4$

2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 0 \\ y_D - 2 = 2 \\ z_D - 3 = -2 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = 1 \end{cases}$ et $\boxed{\boldsymbol{D(1,4,1)}}$

<u>Nature du quadrilatère $ABCD$</u>

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $AB = BC$ alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme qui a deux cotés non parallèles égaux.
Par conséquent $ABCD$ est un losange

<u>Déduction</u>

***$ABCD$* étant un losange, ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires d'où $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$**

3. $d(O\,;\,(ABCD)) = \frac{|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}) = 4+8+12 = 24$

$d(O\,;\,(ABCD)) = \frac{24}{4\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$

4. I =milieu de $[AC] \Leftrightarrow I\left(\frac{1+3}{2}\,;\,\frac{2+2}{2}\,;\,\frac{3+1}{2}\right)$

Donc $I(2,2,2)$ et

$OI = \|\overrightarrow{OI}\| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

<u>Déduction</u>

On a $d(O\,;\,(ABCD)) = OI$ alors I est bien le projeté orthogonal de I sur le plan $(ABCD)$

5. $(OAC) \perp (OBD)$ si et seulement si $(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}) = 0$

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-12\\0\\12\end{pmatrix}$

$(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}) = 48+0-48 = 0$

Alors les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux

6. $\mathcal{A}_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\| \times ua$

$\mathcal{A}_{ABCD} = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$

7. $V = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ABCD}\times d(O\,;\,(ABCD))\times uv$

$V = \frac{1}{3}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times uv = 8\,uv$

EXERC ICE 2

$U_n = \frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}$; $n \geq 3$ et $U_2 = 3$

1. $U_3 = \frac{3U_2-1}{U_2+1} \Leftrightarrow U_3 = \frac{9-1}{3+1} = 2$

$U_4 = \frac{3U_3-1}{U_3+1} \Leftrightarrow U_4 = \frac{6-1}{2+1} = \frac{5}{3}$

2. Montrons par récurrence que

$\forall\, n \geq 2, U_n \geq 1$

a. $U_2 = 3$ et $3 \geq 1$ donc $U_2 \geq 1$

Supposons que $\forall\, n \geq 3, U_{n-1} \geq 1$ et montrons que $U_n \geq 1$

$U_n = \frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1} = 3 - \frac{4}{U_{n-1}+1}$

$U_{n-1} \geq 1 \Rightarrow U_{n-1}+1 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{U_{n-1}+1} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{4}{U_{n-1}+1} \leq 2 \Rightarrow -\frac{4}{U_{n-1}+1} \geq -2$

$\Rightarrow 3 - \frac{4}{U_{n-1}+1} \geq 1 \Rightarrow U_n \geq 1$

Conclusion: $\forall\, n \geq 2, U_n \geq 1$ **et la suite** (U_n) **est minorée par** $\mathbf{1}$.

b. $U_n - U_{n-1} = \frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1} - U_{n-1}$

$= \frac{-U_{n-1}{}^2+2U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1} = \frac{-(U_{n-1}-1)^2}{U_{n-1}+1}$

$\forall\, n \geq 3, U_{n-1} + 1 \geq 2 > 0$ **et** $-(U_{n-1} - 1)^2 < 0$ **donc** $U_n - U_{n-1} \leq 0$ **et la suite** (U_n) **est décroissante.**

c. (U_n) étant décroissante et minorée, elle converge.

Soit ℓ sa limite ; on a :

$\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n-1}$ et donc ℓ est une solution de l'équation : $x = \frac{3x-1}{x+1}$ car $U_n = \frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}$

$$x = \frac{3x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Donc $\boxed{\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$

3. $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1}$

a) $V_n = \frac{\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}+1}{\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}-1} = \frac{4U_{n-1}}{2U_{n-1}-2} = \frac{2U_{n-1}}{U_{n-1}-1}$

$$V_n - V_{n-1} = \frac{2U_{n-1}}{U_{n-1}-1} - \frac{U_{n-1}+1}{U_{n-1}-1}$$

$$= \frac{U_{n-1}-1}{U_{n-1}-1} = 1$$

On a: $V_n - V_{n-1} = 1$ **alors** (V_n) **est une suite arithmétique de raison** $r = 1$ **et de premier terme** $V_2 = \frac{U_2+1}{U_2-1} = \frac{3+1}{3-1}$

$$\Leftrightarrow V_2 = 2$$

b) $V_n = V_2 + (n-2)r \Leftrightarrow V_n = n$

$$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1} \Leftrightarrow V_nU_n - V_n = U_n + 1$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = V_n + 1$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{V_n+1}{V_n-1}$$

Donc $\boxed{U_n = \frac{n+1}{n-1}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

PROBLEME

$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} si\, x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x)\; si\, x \geq 0 \end{cases}$; $D_f = \mathbb{R}$

PARTIE A

1. $g(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$;

$$D_g = [0\,;\,+\infty[$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}}$$

$\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[, (x+1)^2 > 0$ et $x + 2 > 0$ alors $g'(x) > 0$

Par conséquent : g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

Déduction

g **étant croissante sur** $[0\,;\,+\infty[$, **on a** $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[, g(x) \geq g(0)$ **or** $g(0) = 0$ **donc** $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[, g(x) \geq 0$

2.

a. Continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$ car

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+x) = 0$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x = 1 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ **alors** f **est continue en** $\mathbf{0}$

b. Dérivabilité en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x = 1 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

3.

a. $\forall\, x < 0, f'(x) = \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)'$

$$= e^{\frac{1}{x}} - x \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} \forall\, x < 0}$

$\forall\, x \geq 0, f'(x) = [x \ln(1 + x)]'$

$$= \ln(1 + x) + x \times \frac{1}{1 + x}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x} = g(x)\ \forall\, x \geq 0}$$

b. $\forall\, x < 0,\ f'(x) = \left(\frac{x - 1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$\forall\, x < 0, e^{\frac{1}{x}} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\frac{x-1}{x}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc $\forall\, x < 0,\ f'(x) > 0$

c. $\forall\, x \geq 0, f'(x) = g(x)$ et d'après la question 1), $g(x) > 0\ \forall\, x > 0$ et $g(0) = 0$

Donc $\forall\, x > 0, f'(x) > 0$

d. $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty}$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ e^0 = 1 \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1 + x) = +\infty}$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

e. Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4.

a) $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x) = +\infty}$

b) car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

<u>**Interprétation graphique**</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] = \lim\limits_{X \to 0^-} \frac{1}{X}(e^X - 1)$

$= \lim\limits_{X \to 0^-} \frac{e^X - 1}{X}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] = 1}$

d) $(D): y = x + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y]$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1\right] = 1 - 1 = 0$

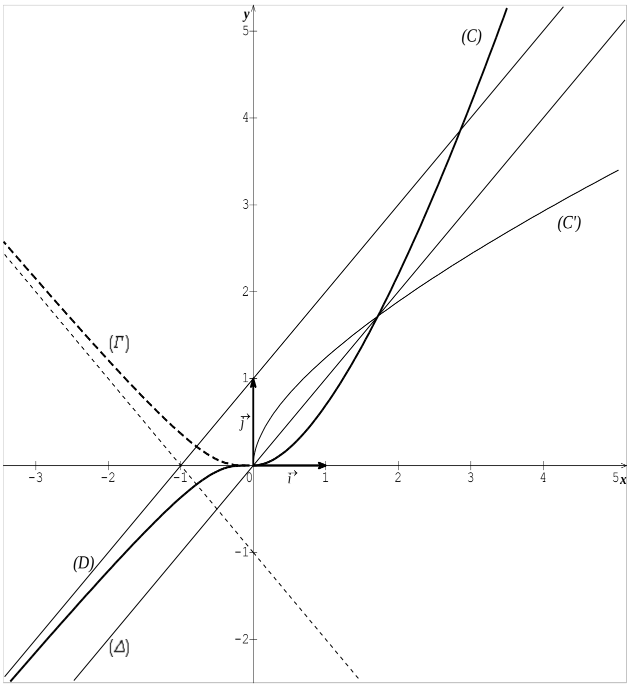
$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y] = 0$ alors la droite $(D): y = x + 1$ est une asympote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$

e) $f(x) - y = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1$

En admettant que $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \leq 1$ pour $x < 0$, on a $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1 \leq 0$pour $x < 0$

$f(x) - y \leq 0$ pour $x < 0$ alors $(\mathcal{C})$ est en dessous de (D) sur $]-\infty\,; 0[$

5. Traçons $(\Delta): y = x$; $(D): y = x + 1$ et $(\mathcal{C})$



PARTIE B

1.

a. $ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$

$\Leftrightarrow ax^2 + (a+b)x + b + c = x^2$

Par identification:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ et}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}}$$

b. Calcul de $\int_0^{e-1} f(x)dx$

$$\int_0^{e-1} f(x)dx = \int_0^{e-1} x\ln(1+x)\,dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) \\ v'(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{1+x} \\ v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$\int_0^{e-1} f(x)dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^{e-1} - \frac{1}{2}\int_0^{e-1}\frac{x^2}{x+1}dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2\ln(1+x) - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \ln(1+x)\right]_0^{e-1}$$

$$\boxed{\int_0^{e-1} f(x)dx = \frac{e^2-3}{4}}$$

2. Sur l'intervalle $[0\,; e-1]$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ).

Donc $\mathcal{A} = \int_0^{e-1}[y - f(x)]dx \times ua$

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^{e-1} xdx - \int_0^{e-1} f(x)dx\right) \times 4cm^2$$

$$= \left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{e-1} - \frac{e^2-3}{4}\right) \times 4cm^2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = (e^2 - 4e + 5)cm^2}$$

3.

a) $h = f$ restreint à l'intervalle $[0\,; +\infty[$

h est donc continue car dérivable et est strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$. Par Conséquent h réalise une bijection de $[0\,; +\infty[$ sur $I = \left[f(0)\,; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

Donc $I = [0\,; +\infty[$

b) La courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1} et la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $[0\,; +\infty[$ sont symétriques par rapport à $(\Delta): y = x$.
(Voir sur le graphique)

4. La boucle étant symétrique par rapport à (Δ), on a $\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$

Donc $\boxed{\mathcal{A}' = 2(e^2 - 4e + 5)cm^2}$

PARTIE C

$$(\Gamma): \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\ln(-t)} \\ y(t) = \dfrac{t}{\ln(-t)} \end{cases} \quad avec\ t \in\,]-1\,; 0[$$

1. Equation cartésienne

$x = \frac{1}{\ln(-t)} \Leftrightarrow \ln(-t) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -t = e^{\frac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow t = -e^{\frac{1}{x}}$

$$-1 < -e^{\frac{1}{x}} < 0 \Leftrightarrow 0 < e^{\frac{1}{x}} < 1$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$ et

$y = \frac{t}{\ln(-t)} \Leftrightarrow y = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -xe^{\frac{1}{x}}$

$$\boxed{(\boldsymbol{\Gamma}): \boldsymbol{y = -xe^{\frac{1}{x}}} \ ; \ \boldsymbol{x} < 0}$$

2. $(\Gamma): y = -f(x)$; $x < 0$alors la courbe (Γ) s'obtient en faisant la symétrie de la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $x < 0$ par rapport à l'axe des abscisses.
3. Voir sur le graphique

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2013
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE 1 (4 points)

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5.
   On tire simultanément deux de ces boules.
   Calculer la probabilité des évènements :
   A: « tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 »
   B: « tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 »
   C: « tirer deux boules portant des chiffres différents »
2. On suppose maintenant que l'urne contient a boules portant le chiffre 1 et b boules portant le chiffre 5 avec $a + b = 10 (1 < a < 9)$ et $(1 < b < 9)$.
   Soit X la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de a.
   c. Pour quelles valeurs de a, a-t-on $6 < E(X) < 8$?

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal$(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

1) Soit le nombre$z_0 = 1 + i$.
   a. Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) définie par
   $$z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = 0$$
   b. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2) On considère les points A, B et C du plan, d'affixe respectives $1 + i$, $3 + i$, $3 - i$.
   a. Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
   c. Placer les points A, B et C dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ et compléter la figure au fur et à mesure.
   d. Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle BAC.
   Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.
3) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation
   $$|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$$
   a. Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ)
   b. Justifier que le point F d'affixe $4 + 2i$ appartient à (Δ).
   c. Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.
4) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $CEAF$? Justifier votre réponse.

PROBLEME (12 points)

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) définie par : (E) : $\frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

1. Déterminer le réel$a$, tel que la fonction v définie par $v(x) = axe^{-2x} + 2$ soit une solution de(E).
2. Donner les solutions de l'équation (E′):$\frac{1}{2}y' + y = 0$.
3.
   a. Montrer que u est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E′)
   b. En déduire les solutions de (E):
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) vérifiant $h(0) = 0$.

PARTIE B

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2(3x-1)e^{-2x} + 2 \; si \;\; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \;\; si \; x > 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Unité graphique : 4 cm.

I. Etude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $]0;\,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1)
   a. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$
   b. Déterminer le sens de variations de g
   c. Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans$]0;\,+\infty[$.
   Montrer que α appartient à l'intervalle $]0{,}2\,;\,0{,}3[$.
3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

II. Etude et représentation graphique de *f*

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique.
3. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu.
5. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   (On montrera que pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$)
6. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Ox)
7. Dresser le tableau de variations de f
8. Construire (C_f)

PARTIE C

Soit $\lambda < 0$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \lambda\,, x = 0\,, y = 0$ et la courbe(C_f).

1) On pose $F(x) = (ax + b)e^{-2x}$. Déterminer a et b pour que $F'(x) = (3x-1)e^{-2x}$.
2) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm²
3) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

Année 2013
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

1) Soit Ω l'univers des éventualités

$$\mathbf{Card\Omega = C_{10}^2 = 45}$$

Probabilité des évènements:

A: « tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 »

$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$ d'où $\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{2}{15}}}$

B: « tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 »

$P(B) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45}$ d'où $\boxed{\boldsymbol{P(B) = \frac{1}{3}}}$

C: « tirer deux boules portant des chiffres différents »

$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45}$ d'où $\boxed{\boldsymbol{P(C) = \frac{8}{15}}}$

2) $a + b = 10 \Leftrightarrow b = 10 - a$

a. Loi de probabilité de X

Les valeurs prises par X sont: 2 , 6 et 10

$$\boldsymbol{P(X=2) = \frac{C_a^2}{C_{10}^2} = \frac{a(a-1)}{90}}$$

$$\boldsymbol{P(X=6) = \frac{C_a^1 \times C_b^1}{C_{10}^2} = \frac{ab}{45} = \frac{a(10-a)}{45}}$$

$$\boldsymbol{P(X=10) = \frac{C_b^2}{C_{10}^2} = \frac{b(b-1)}{90} = \frac{(10-a)(9-a)}{90}}$$

$X = x_i$	2	6	10
$P(X = x_i)$	$\frac{a(a-1)}{90}$	$\frac{a(10-a)}{45}$	$\frac{(10-a)(9-a)}{90}$

b. Espérance mathématique de X

$E(X) = 2 \times \frac{a(a-1)}{90} + 6 \times \frac{a(10-a)}{45} + 10 \times \frac{(10-a)(9-a)}{90}$

$E(X) = \frac{a^2 - a + 60a - 6a^2 + 450 - 95a + 5a^2}{45}$

$= \frac{-36a + 450}{45}$

D'où $\boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{-4a+50}{5}}}$

c. Valeurs de a tel que $6 < E(X) < 8$

$6 < E(X) < 8 \Leftrightarrow 6 < \frac{-4a+50}{5} < 8$

$\Leftrightarrow 30 < -4a + 50 < 40$

$\Leftrightarrow -20 < -4a < -10 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < a < 5$

Donc 6 $< E(X) < 8$ pour $\boldsymbol{a = 3}$ ou $\boldsymbol{a = 4}$.

EXERCICE 2

1. $z_0 = 1 + i$

a) Montrons que z_0 est solution de (E)

$z_0{}^3 - (7+i)z_0{}^2 + 2(8+3i)z_0 - 10(1+i)$

$= 2i(1+i) - 2i(7+i) + 12i$

$= -2 + 2 - 12i + 12i = 0$

Alors $\boldsymbol{z_0 = 1 + i}$ est solution de $\boldsymbol{(E)}$

b) Résolution de (E)

Comme $z_0 = 1 + i$ est solution de (E) alors on a:

$(E): [z - (1+i)][az^2 + bz + c] = 0$ tels que $\begin{cases} a = 1 \\ b - (1+i)a = -7 - i \\ c - (1+i)b = 16 + 6i \\ -(1+i)c = -10 - 10i \end{cases}$

On a : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 10 \end{cases}$

$(E): [z - (1+i)][z^2 - 6z + 10] = 0$

$\Leftrightarrow z_0 = 1 + i$ ou $z^2 - 6z + 10 = 0$

$\Delta' = -1 = i^2$

$z_1 = 3 + i$ ou $z_2 = 3 - i$

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\mathbb{C}} = \{1+i\,, 3+i\,, 3-i\}}}$$

2. $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = 3 - i$

a. Forme exponentielle $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1 + i - 3 - i}{3 - i - 3 - i} = \frac{-2}{-2i} = \frac{1}{i}$$

Donc $\boxed{\boldsymbol{\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}}$

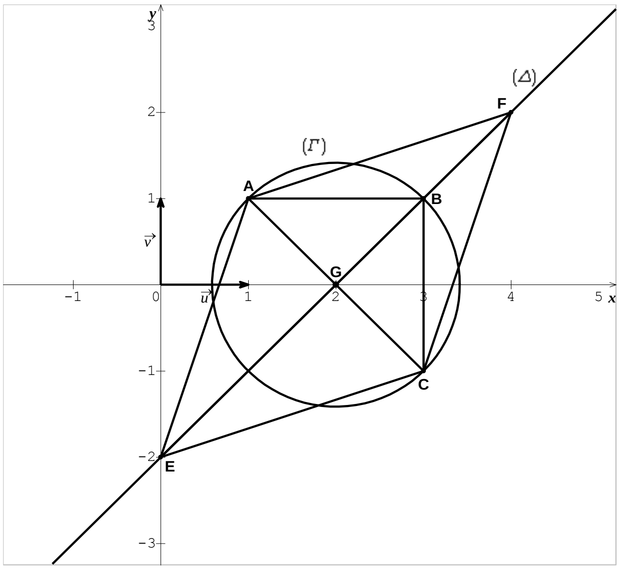
Nature du triangle ABC

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BA}{BC} = 1 \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

On a $BA = BC$ et $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ alors ABC est un triangle rectangle isocèle

c. Plaçons les points A , B et C



d. Déterminons l'affixe du centre G et le rayon r de (Γ)

BAC est un triangle rectangle en B alors G =milieu de $[AC]$

$z_G = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{1+i+3-i}{2}$ et $r = \frac{AC}{2} = \frac{|2-2i|}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$

Donc $\boxed{\boldsymbol{z_G = 2 \text{ et } r = \sqrt{2}}}$

3.

a. Caractérisation de (Δ)

$$|z-1-i| = |z-3+i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_C| \Leftrightarrow AM = CM$$

Alors (Δ) est la médiatrice du segment $[AC]$

b. $F \in (\Delta)$ si $AF = CF$

$$AF = |z_F - z_A| = |4+2i-1-i| = |3+i| = \sqrt{10}$$

$$CF = |z_F - z_C| = |4+2i-3+i| = |1+3i| = \sqrt{10}$$

On a $AF = CF$ alors $F \in (\Delta)$

c. $E \in (\Delta)$ et $E \in (O, \vec{v}) \Leftrightarrow AE = CE$ et $z_E = iy$

$|z_E - z_A| = |z_E - z_A|$

$\Leftrightarrow |iy-1-i| = |iy-3+i|$

$\Leftrightarrow 1+(y-1)^2 = 9+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow 1+y^2-2y+1 = 9+y^2+2y+1$

$\Leftrightarrow y = -2$

On a donc $z_E = -2i$

4. Nature du quadrilatère $CEAF$

$$z_E - z_C = -2i-3+i = -3-i$$

$$z_A - z_F = 1+i-4-2i = -3-i$$

On a $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$ et $AE = CE$ alors le quadrilatère $CEAF$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.

Donc $CEAF$ est un losange.

PROBLEME

PARTIE A

(E): $\frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$

1. Déterminons le réel a

$v(x) = axe^{-2x} + 2$

$v'(x) = (-2ax + a)e^{-2x}$

$\frac{1}{2}v'(x) + v(x) = 3e^{-2x} + 2$

$\Leftrightarrow \left(-ax + \frac{a}{2} + ax\right)e^{-2x} + 2$

$= 3e^{-2x} + 2$

On a donc

$\boldsymbol{\frac{a}{2} = 3 \Leftrightarrow a = 6 \text{ et } v(x) = 6xe^{-2x} + 2}$

2. Résolution de (E')

$\frac{1}{2}y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

Les fonctions solutions de $(\mathbf{E}')$ sont donc de la forme: $y = ke^{-2x}$, avec $k \in \mathbb{R}$

3.

a. Supposons que u est solution de (E) et montrons que $v-u$ est solution de (E')

u solution de (E)

$\Rightarrow \frac{1}{2}u' + u = 3e^{-2x} + 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}u' + u = \frac{1}{2}v' + v$ car v est aussi solution de (E)

$\Rightarrow \frac{1}{2}v' - \frac{1}{2}u' + v - u = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(v-u)' + (v-u) = 0$

$\Longrightarrow (v-u)$ est solution de (E')

Réciproquement :

Supposons que $v-u$ est solution de (E') et montrons que u est solution de (E)

$(v-u)$ est solution de (E')

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(v-u)'+(v-u)=0$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}v'-\frac{1}{2}u'+v-u=0$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}u'+u=\frac{1}{2}v'+v$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}u'+u=3e^{-2x}+2$ car v est solution de (E)

$\Longrightarrow u$ est solution de (E)

Ainsi u est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E')

b. Déduction des solutions de (E)

Soit u une solution de(E), on sait que $v-u$ est solution de(E').

D'où $v-u=ke^{-2x} \Longrightarrow u=v-ke^{-2x}$

Les solutions de (E), sont donc les fonctions u de la forme:

$\boldsymbol{u(x)=6xe^{-2x}+2-ke^{-2x}}$**, avec $k\in\mathbb{R}$**

4. Solution particulière de (E)

$h(x)=6xe^{-2x}+2-ke^{-2x}$

$h(0)=0 \Leftrightarrow k=2$

$\boxed{h(x)=2(3x-1)e^{-2x}+2}$

PARTIE B

$$\begin{cases} f(x)=2(3x-1)e^{-2x}+2 \; si \;\; x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} \;\; si \; x>0 \end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}$$

I. Etude d'une fonction auxiliaire

1.$g(x)=1+x+\ln x \;\; ; \; D_g=[0\,;\,+\infty[$

a) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty}$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty\end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty}$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty} 1+x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x=+\infty\end{cases}$

b) Sens de variation de g

$$g'(x)=\frac{x+1}{x}$$

$\forall\, x\in\,]0\,;\,+\infty[\,, x+1>0$ et $x>0$ alors $g'(x)>0$

Par conséquent : g est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

c) Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2. Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans$]0;\,+\infty[$

La fonction g est continue car dérivable et est strictement coissante sur $]0;\,+\infty[$.

Donc g réalise une bijection de $]0;\,+\infty[$ sur $g(]0;\,+\infty[)=]-\infty;\,+\infty[$.

Or $0\in\,]-\infty;\,+\infty[$, d'où l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans$]0;\,+\infty[$.

Montrons que $\alpha\in\,]0{,}2\,;\,0{,}3[$

$\begin{cases} g(0{,}2)=1{,}2-\ln 5=-0{,}41 \; <0 \\ g(0{,}3)=1{,}3+\ln 3-\ln 2-\ln 5=0{,}09>0 \end{cases}$

On a $g(0,2)\times g(0,3)<0$ alors $\alpha\in\,]0,2\,;\,0,3[$

3.g croît sur $]0;\,+\infty[$ et $g(\alpha)=0$ alors:

$\forall\, \boldsymbol{x}\in\,]\boldsymbol{0}\,;\,\boldsymbol{\alpha}[,\, \boldsymbol{g(x)}<0$

$\forall\, \boldsymbol{x}\in\,]\boldsymbol{\alpha}\,;\,+\infty[,\, \boldsymbol{g(x)}>0$

II. II. Etude et représentation graphique de f

1) Continuité de f en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2(3x-1)e^{-2x}+2=0$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} 2(3x-1)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-2x}=1 \\ -2+2=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x+1}=0$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x+1=1 \\ \frac{0}{1}=0\end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0

2) Dérivabilité en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2(3x-1)e^{-2x}+2}{x}$

Soit $X = -2x$, on a $x = -\frac{X}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} -2x = 0^+$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-3Xe^X-2e^X+2}{-\frac{X}{2}} = 6e^X + 4\left(\frac{e^X-1}{X}\right)$

$= 10$ car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to 0^+} e^X = 1 \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \frac{e^X-1}{X} = 1 \end{cases}$

On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 10$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 10$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique :

(C_f) admet au point de coordonnées $(0\,;0)$ une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 10 et d'équation $y = 10x$ et une demi-tangente verticale à droite dirigée vers le bas.

3) Les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 2(3x-1)e^{-2x} + 2$

$\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} 2(3x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ (-\infty)\times(+\infty) + 2 = -\infty \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} \times \ln x = +\infty}$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ 1 \times (+\infty) = +\infty \end{cases}$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ 1 \times 0 = 0 \end{cases}$

Interprétation du résultat

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

5) Etude du sens de variation de f

$\forall\, x < 0, f'(x) = 2(5-6x)e^{-2x}$

$\forall\, x \in]-\infty\,;0[, e^{-2x} > 0$ et $5-6x > 0$

alors $f'(x) > 0$

On en déduit que sur $]-\infty\,;0[$, f est croissante

$\forall\, x > 0, f'(x) = \frac{(1+\ln x)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}$

Donc $\forall\, x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[, (x+1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0\,;\alpha[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha\,;+\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0\,;\alpha[$, f est décroissante

Sur $]\alpha\,;+\infty[$, f est croissante

6) Montrons que $f(\alpha) = -\alpha$

On a $\alpha > 0$ donc $f(\alpha) = \frac{\alpha\ln\alpha}{\alpha+1}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -(\alpha+1)$

D'où $f(\alpha) = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)}$

On a donc $f(\alpha) = -\alpha$

Point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x\ln x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x\ln x = 0$

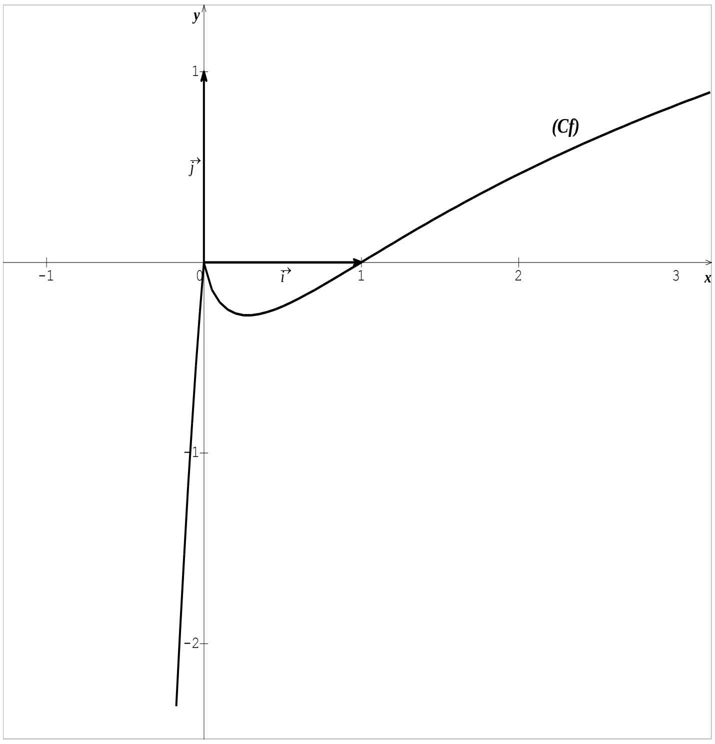
$\Leftrightarrow \ln x = 0$ car $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ainsi (C_f) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(1;0)$

7) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$10 \parallel -\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

8) Construction de (C_f)



PARTIE C

1. $F(x) = (ax+b)e^{-2x}$. Déterminons a et b pour que $F'(x) = (3x-1)e^{-2x}$

$F'(x) = (-2ax + a - 2b)e^{-2x} = (3x-1)e^{-2x}$

$\Leftrightarrow -2ax + b - 2a = 3x - 1$

Par identification : $\begin{cases} -2a = 3 \\ b - 2a = -1 \end{cases}$

On a donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = -\frac{3}{2}} \\ \boldsymbol{b = -\frac{1}{4}} \end{cases} \textbf{ et } \boldsymbol{F(x) = \left(-\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}}$$

2. $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_{\lambda}^{0} f(x)dx \times ua$

$\mathcal{A}(\lambda) = 16[-2F(x) - 2x]_{\lambda}^{0}$

$= 16\left[\left(3x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x} - 2x\right]_{\lambda}^{0}$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = \left(8 + 32\lambda - 8(6\lambda+1)e^{-2\lambda}\right)cm^2}}$$

3. Calculons $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

$= \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{-2\lambda}\left(8e^{2\lambda} + 32\lambda e^{2\lambda} - 56\lambda - 8\right)$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to -\infty} \boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)} = +\infty}$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{-2\lambda} = +\infty \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{2\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} 2\lambda e^{2\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} -56\lambda - 8 = +\infty \end{cases}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2012
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE 1 (4 points)

On considère les équations différentielles suivantes :
(E_1): $y'' + 4y = 0$ et (E_2): $y'' + y = 0$

1. Déterminer la solution de l'équation (E_1) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point $A(0;\ -2)$ et admet en ce point une tangente horizontale
2. Déterminer la solution g de l'équation (E_2) vérifiant : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
3. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe définie par le système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x(t) = -2\cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$
   a. Déterminer la période commune des fonctions x et y ; comparer la position des points $M(t)$ et $(t+\pi)$, puis en déduire un élément de symétrie de $(\mathcal{C})$. Justifier le choix de $[0;\ \pi]$comme ensemble d'étude.
   b. Etudier les fonctions x et y sur $[0;\ \pi]$ et dresser leur tableau de variations conjoint
   c. Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$
   (unité graphique 2 cm)
   On précisera les tangentes particulières ainsi que les tangentes en O.
   NB : $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$

EXERCICE 2 (4 points)

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée.
Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note P_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres P_1, P_2, P_3 et P_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique

1. Sachant que $P_4 = 0{,}4$; montrer que $P_1 = 0{,}1$; $P_2 = 0{,}2$ et $P_3 = 0{,}3$
2. On lance le dé trois (3) fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance dix (10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   a. Pour $0 \le i \le 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$

   b. Calculer l'espérance mathématique de$X$. Interpréter le résultat obtenu.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$
      On donnera une valeur arrondie au millième
4. On lance n fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n[ième] lancer.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle converge
   b. Calculer $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (S_n)
   c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geq 0{,}999$

NB : On donne $(0{,}6)^{10} \simeq 0{,}00604$; $\ln(0{,}001) \simeq -6{,}90$; $\ln(0{,}6) \simeq -0{,}51$

PROBLEME **(12 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes à $(\mathcal{C})$
2. Soit f' la fonction dérivée de$f$, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe. En déduire le sens de variation de f
3. Dresser le tableau de variations de f
4. Montrer que le point $I(1;\ -1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$
5. Tracer $(\mathcal{C})$ et les asymptotes

PARTIE B

Soit els fonctions u et v définies sur $]1;\ +\infty[$ par : $u(x) = \frac{-1}{1-x}$ et $v(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions u et v sur $]1;\ +\infty[$
2. Vérifier que pour tout réel $x > 1;\ -1 - f(x) = u(x) + v(x)$
3. Calculer, en cm², la valeur exacte de l'aire S du domaine plan compris entre $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = -1, x = 2$ et $x = 3$

PARTIE C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4 - e^{-u_n} \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout entier non nul $n, 3 < u_n < 4$
2.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n, u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe
   b. Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
3. Etudier la convergence de la suite (u_n)

NB : On donne : $e^{-3} \simeq 0{,}05$ et $e^{-4} \simeq 0{,}02$

Année 2012
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

1. $(E_1): y'' + 4y = 0$
   $f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x\ ;\ (A, B \in \mathbb{R})$
   $f(0) = -2 \Leftrightarrow A = -2$
   $f'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$
   $f'(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$
   On a donc $f(x) = -2\cos 2x$
2. $(E_2): y'' + y = 0$
   $g(x) = A\cos x + B\sin x\ ;\ (A, B \in \mathbb{R})$
   $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow B = -1$
   $g'(x) = -A\sin x + B\cos x$
   $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow A = 1$
   Par conséquent : $g(x) = \cos x - \sin x$
3. $(\mathcal{C}): \begin{cases} x(t) = -2\cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a. $t \longmapsto \cos 2t$ est π −périodique
$t \longmapsto \cos t$ et $t \longmapsto \sin t$ sont 2π −périodique

<u>Comparons $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$</u>

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = -2\cos(2t + 4\pi) \\ y(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) - \sin(t+2\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = -2\cos 2t \\ y(t+2\pi) = \cos t - \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{M(t + 2\pi) = M(t)}$

Alors les fonctions x et y sont périodiques de période commune 2π

<u>Comparer la position des points $M(t)$ et $M(t + \pi)$</u>

$$\begin{cases} x(t+\pi) = -2\cos(2t + 2\pi) \\ y(t+\pi) = \cos(t+\pi) - \sin(t+\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+\pi) = -2\cos 2t \\ y(t+\pi) = -\cos t + \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t+\pi) = x(t)} \\ \boldsymbol{y(t+\pi) = -y(t)} \end{cases}$$

Alors $M(t)$ et $M(t + \pi)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
On en déduit que la courbe $(\mathcal{C})$est symétrique par rapport à l'axe des abscisses

<u>Justifions le choix de $[0;\ \pi]$</u>

x et y sont 2π −périodiques donc il faut choisir un ensemble d'étude de longueur 2π

On a : $\forall t \in [0;\ \pi], (t + \pi) \in [\pi;\ 2\pi]$ et

$$[0;\ 2\pi] = [0;\ \pi] \cup [\pi;\ 2\pi]$$

Alors on peut choisir $[0;\ \pi]$ comme ensemble d'étude de $(\mathcal{C})$ et compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe des abscisses

b. $\begin{cases} x'(t) = 4\sin 2t \\ y'(t) = -\sin t - \cos t \end{cases}$

Variation de x

$x'(t) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{t} \in \left\{\mathbf{0};\ \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}};\ \boldsymbol{\pi}\right\}$ sur $[0;\ \pi]$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) \geq 0$ et x croît sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right], x'(t) \leq 0$ et x décroît sur $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$

Variation de y

$y'(t) = -\sin t - \cos t = -\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4}$ sur $[0;\ \pi]$

$\forall t \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right], y'(t) \leq 0$ et y décroît sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

$\forall t \in \left[\frac{3\pi}{4};\ \pi\right], y'(t) \geq 0$ et y croît sur $\left[\frac{3\pi}{4};\ \pi\right]$

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	-4	$-$	0
$y'(t)$	-1	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$x(t)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2
$y(t)$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1

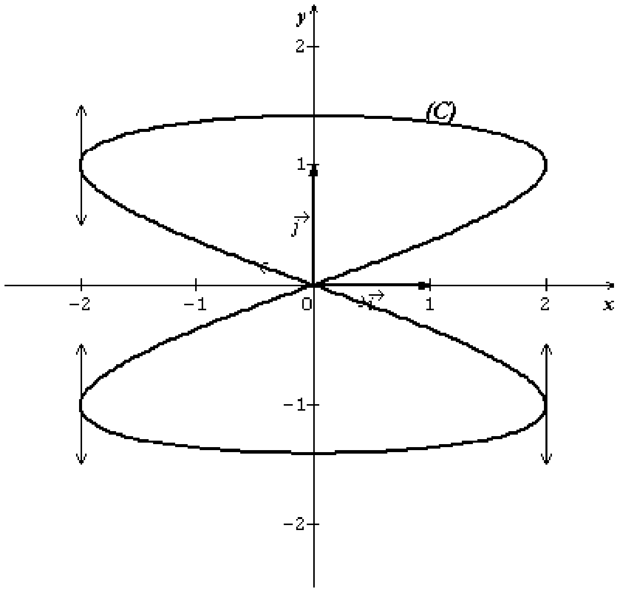
c. Tracer de $(\mathcal{C})$

Tangentes :

$(T_0): x = -2$; $\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right): x = 2$;

$\left(T_{\frac{3\pi}{4}}\right): y = -\sqrt{2}$; $(T_\pi): x = -2$

A l'origine O du repère on a :



$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $\left(T_{\frac{\pi}{4}}\right): y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x$

EXERCICE 2

1. $P_k = P_4 + (k-4)r$ d'où on a :

$P_1 = P_4 - 3r$; $P_2 = P_4 - 2r$; $P_3 = P_4 - r$

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \Leftrightarrow 4P_4 - 6r = 1$

On en déduit que : $r = 0{,}1$ et par suite

$\boldsymbol{P_1 = 0,1;\ P_2 = 0,2}$ **et** $\boldsymbol{P_3 = 0,3}$

2. On lance le dé trois fois de suite

a. La probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 est :

$\boldsymbol{P_1 \times P_2 \times P_4 = 0,008}$

b. La probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant est :

$\boldsymbol{P_1 \times P_2 \times P_3 + P_1 \times P_2 \times P_4 + P_1 \times P_3 \times P_4 + P_2 \times P_3 \times P_4 = 0,05}$

3. On lance le dé dix fois de suite

X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,4

a. $P(X = i) = C_{10}^{i}(0{,}4)^i(0{,}6)^{10-i}$

b. $\boldsymbol{E(X) = 10 \times 0,4 = 4}$

<u>Interprétation du résultat</u>

En lançant dix fois le dé, on obtiendra en moyenne 4 fois la face numérotée 4

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0{,}6)^{10}$

$P(X \geq 1) = 0{,}99396$

Arrondi au millième, on a :

$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 0,994}$

4. On lance n fois le dé

a. u_n est la probabilité d'obtenir un chiffre autre que 4 lors des $(n-1)$ premiers lancers et d'obtenir le chiffre 4 au n[ième] lancer ; par conséquent :

$u_n = (0{,}6)^{n-1} \times 0{,}4$

On a : $u_{n+1} = (0{,}6)^n \times 0{,}4$

$= 0{,}6 \times (0{,}6)^{n-1} \times 0{,}4 = 0{,}6u_n$

$u_{n+1} = 0{,}6u_n$

Alors (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1 = 0{,}4$

Comme $0 < 0{,}6 < 1$ alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

b. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$= u_1 \times \frac{1-(0{,}6)^{n-1+1}}{1\ \ -0{,}6} = 1 - (0{,}6)^n$

$\boldsymbol{0 < 0,6 < 1}$ **et** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} (0,6)^n = 0}$ **alors**

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1}$

La suite (S_n) est donc convergente

c. $S_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow (0{,}6)^n \leq 0{,}001$

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}6) \leq \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)}$

$\Leftrightarrow n \geq 13{,}52$

On a donc : $S_n \geq 0{,}999\ \forall n \geq 14$

Le plus petit entier $\boldsymbol{n}$ tel que$\boldsymbol{S_n \geq 0,999}$ est donc 14

PROBLEME

$f(x) = \frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$; $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

<u>PARTIE A</u>

1. $\forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = \frac{x+\ln(1-x)}{1-x}$; Posons $X = 1 - x$

Si $x \to -\infty, X \to +\infty$ et

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{1-X+\ln X}{X}=\lim_{X\to+\infty}-1+\frac{1}{X}+\frac{\ln X}{X}=-1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1}\text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0\end{cases}$$

Si $x\to1^-, X\to0^+$ et

$$\lim_{X\to0^+}\frac{1-X+\ln X}{X}=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{X}(1-X+\ln X)=-\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty}\text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{X\to0^+}\frac{1}{X}=+\infty\\ \lim\limits_{X\to0^+}1-X=1\\ \lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty\end{cases}$$

$\forall x\in]1;+\infty[, f(x)=\frac{x+\ln(x-1)}{1-x}$;

Posons $X=x-1$

Si $x\to1^+, X\to0^+$ et

$$\lim_{X\to0^+}\frac{X+1+\ln X}{-X}=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{X}(-1-X-\ln X)=+\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty}\text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{X\to0^+}\frac{1}{X}=+\infty\\ \lim\limits_{X\to0^+}-1-X=-1\\ \lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty\end{cases}$$

Si $x\to+\infty, X\to+\infty$ et

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{X+1+\ln X}{-X}=\lim_{X\to+\infty}-1-\frac{1}{X}-\frac{\ln X}{X}=-1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1}\text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0\end{cases}$$

Asymptotes

La droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$

2. $f'(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{1-x}\right)(1-x)+x+\ln|1-x|}{(1-x)^2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x)=\frac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}}$

Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$

$\forall x\in D_f, (1-x)^2>0$ alors le signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ dépend de celui de $\ln|1-x|$

$\ln|1-x|>0\Leftrightarrow|1-x|>1$

$\Leftrightarrow 1-x>1$ ou $1-x<-1$

$\Leftrightarrow x<0$ ou $x>2$

Par conséquent:

$\forall x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[, \boldsymbol{f'(x)}>0$

$\forall x\in]0;1[\cup]1;2[, \boldsymbol{f'(x)}<0$

On en déduit que:

Sur $]-\infty;0[$ et $]2;+\infty[$, f est croissante

Sur $]0;1[$ et sur $]1;2[$, f est décroissante

3. Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	-1

4. $I(1;-1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$ si $f(2-x)+f(x)=-2$

$f(2-x)+f(x)$

$=\frac{2-x+\ln|1-2+x|}{1-2+x}+\frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$

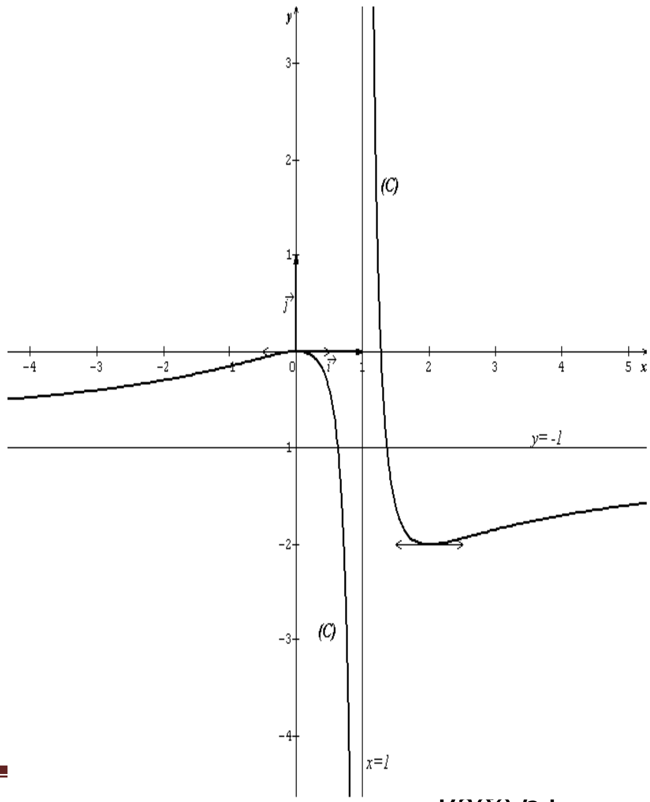
$=\frac{2-x+\ln|x-1|}{x-1}+\frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$

$=\frac{-2+x-\ln|x-1|+x+\ln|1-x|}{1-x}$

Or $\ln|x-1|=\ln|1-x|$ d'où $f(2-x)+f(x)=\frac{-2+2x}{1-x}=-2$

$f(2-x)+f(x)=-2$ alors $I(1;-1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$

5. Traçons $(\mathcal{C})$



PARTIE B

1. $u(x) = \frac{-1}{1-x}$; $D_u =]1;\ +\infty[$
   Une primitive de u sur $]1;\ +\infty[$ est par exemple la fonction U définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $U(x) = \ln(x-1)$
   $$v(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1};\ D_v =]1;\ +\infty[$$
   Une primitive de v sur $]1;\ +\infty[$ est par exemple la fonction V définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $V(x) = \frac{1}{2}(\ln(x-1))^2$
2. $\forall x > 1, -1 - f(x) = -1 - \frac{x+\ln(x-1)}{1-x}$
   $= -1 - \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(x-1)}{x-1}$
   $= \frac{-1}{1-x} + \frac{\ln(x-1)}{x-1}$
   $= u(x) + v(x)$
   Donc $\boxed{\forall \boldsymbol{x} > 1, -1 - f(x) = u(x) + v(x)}$
3. $S = ua \times \int_2^3 (y - f(x))\, dx$ car sur $[2;3]$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de la droite d'équation $y = -1$
   $\int_2^3 (y - f(x))\, dx = \int_2^3 (-1 - f(x))\, dx$
   $= \int_2^3 (u(x) + v(x))\, dx$
   $= \left[\ln(x-1) + \frac{1}{2}(\ln(x-1))^2\right]_2^3$
   $= \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ et $ua = 4\ cm^2$

$$\boxed{S = 2\ln 2\,(2 + \ln 2)\,cm^2}$$

PARTIE C

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4 - e^{-u_n} \end{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. $u_1 = 4 - e^{-u_0} = 4 - e^{-1}$
   On sait que $2 < e < 3$
   $\Leftrightarrow \frac{1}{3} < e^{-1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -e^{-1} < -\frac{1}{3}$
   $\Leftrightarrow \frac{7}{2} < 4 - e^{-1} < \frac{11}{3} \Leftrightarrow 3{,}5 < u_1 < 3{,}6$
   On a donc : $3 < u_1 < 4$ car $]3{,}5; 3{,}6[\subset]3;4[$
   Pour tout n non nul, supposons que $3 < u_n < 4$ et montrons que $3 < u_{n+1} < 4$
   En effet : $3 < u_n < 4$
   $\Rightarrow -4 < -u_n < -3$
   $\Rightarrow e^{-4} < e^{-u_n} < e^{-3}$
   $\Rightarrow 4 - e^{-3} < 4 - e^{-u_n} < 4 - e^{-4}$
   $\Rightarrow 3{,}95 < u_{n+1} < 3{,}98$
   $\Rightarrow 3 < u_{n+1} < 4$
   car $]3{,}95 ; 3{,}98[\subset]3;4[$
   On conclut donc que : $3 < u_n < 4$, pour tout n non nul
2.
a. $u_{n+1} - u_n = 4 - e^{-u_n} - 4 + e^{-u_{n-1}}$
   $= e^{-u_{n-1}} - e^{-u_n} = e^{-u_n}(e^{u_n - u_{n-1}} - 1)$
   $\forall n \geq 1, e^{-u_n} > 0.$
   Alors $u_{n+1} - u_n$ et $e^{u_n - u_{n-1}} - 1$ sont de même signe
   Par ailleurs :
   $e^{u_n - u_{n-1}} - 1 > 0 \Rightarrow e^{u_n - u_{n-1}} > 1$
   $\Rightarrow u_n - u_{n-1} > 0$ et
   $e^{u_n - u_{n-1}} - 1 < 0 \ \Rightarrow e^{u_n - u_{n-1}} < 1$
   $\Rightarrow u_n - u_{n-1} < 0$
   Alors $e^{u_n - u_{n-1}} - 1$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe
   On conclut donc que : pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe

b. Par itération du résultat précédent, $u_n - u_{n-1}$ et $u_1 - u_0$ sont de même signe
   $u_1 - u_0 = 3 - e^{-1} > 0$
   Donc $\forall n \geq 1, u_n - u_{n-1} > 0$
   On en déduit que la suite (u_n) est croissante
3. (u_n) étant une suite croissante bornée, alors (u_n) est convergente car toute suite monotone bornée converge

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2012
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE 1 (4 points)

1. On considère le polynôme P défini pour tout Z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par :
$$P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$$
   a. Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(Z_0) = 0$ alors $P(\overline{Z_0}) = 0$ où $\overline{Z_0}$ est le conjugué de Z_0
   b. Calculer $P(1 + i\sqrt{3})$; puis factoriser $P(Z)$
   c. Déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$(unité graphique 2 cm). Soit A, B et C les points d'affixe respectives $a = 4; b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b}$ où $\overline{b}$ est le conjugué de b
   a. Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure
   b. Quelle est la nature exacte du triangle ABC?
3. Soit K le point d'affixe $Z_K = -\sqrt{3} + i$, le point F image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$
   a. Déterminer les affixes respectives de F et G
   b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$
   a. Calculer l'affixe Z_H de H puis montrer que le parallélogramme $COFH$ est un carré
   b. Quelle est la nature du triangle AGH?
   On donne $\sqrt{3} = 1{,}7$

EXERCICE 2 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les points $A(2,0,0)$; $B(0,3,0)$ et $C(0,0,-2)$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. Soit $H(a; b; c)$ le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC)
   a. Que peut-on des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ *et* $\vec{u}$?
   En déduire que : $3a + 2b - 3c - 6 = 0$
   b. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ *et* $\vec{u}$?
   En déduire qu'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$
   c. Déterminer la valeur de t puis donner les coordonnées de H
   d. Calculer la distance du point O au plan (ABC)
3. Calculer le volume du tétraèdre de base ABC et de sommet O

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln|x|$

1. Etudier les variations de la fonction g et dresser le tableau de variations
2. Calculer $g(-1)$ et $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale
2.
   a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$
   b. Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D)
3.
   a. Calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire le sens de variation de f
   b. Dresser le tableau de variations de f
4.
   a. Montrer que le point I, intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$
   b. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que les asymptotes
5. Discuter graphiquement et en fonction du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$, $f(x) = m\ \ (m \in \mathbb{R})$

PARTIE C

Soit α un réel tel que $-1 \leq \alpha < 0$ et soit (Δ) la région du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, les droites d'équations respectives $x = -1; x = \alpha; y = x - 2$

1.
   a. Calculer en fonction de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de (Δ)
   b. Calculer $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha<0}} \mathcal{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat
2. On donne la suite définie pour tout entier $n > 0$ par : $u_n = \int_1^n f(x)dx$
   a. Calculer u_n en fonction de n
   b. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier

Année 2012
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

1.

a. $P(\overline{Z_0}) = \overline{Z_0}^3 - 6\overline{Z_0}^2 + 12\overline{Z_0} - 16$

$= \overline{Z_0}^3 - \overline{6Z_0}^2 + \overline{12Z_0} - \overline{16}$

$= \overline{Z_0^3 - 6Z_0^2 + 12Z_0 - 16}$

$\boldsymbol{P(\overline{Z_0}) = \overline{P(Z_0)}}$ **.**

Par conséquent : si $\boldsymbol{P(Z_0) = 0}$ alors

$\boldsymbol{P(\overline{Z_0}) = \overline{0} = 0}$

b. $P(1+i\sqrt{3}) = (1+i\sqrt{3})^3 - 6(1+i\sqrt{3})^2 + 12(1+i\sqrt{3}) - 16$

$= 1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3} - 6 - 12i\sqrt{3} + 18 + 12 + 12i\sqrt{3} - 16$

$= 31 - 31 + i(15\sqrt{3} - 15\sqrt{3})$

$\boxed{\boldsymbol{P(1+i\sqrt{3}) = 0}}$

Factorisation

$Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{Z_0} = 1 - i\sqrt{3}$ sont des racines de $P(Z)$ donc :

$P(Z) = (Z - 1 - i\sqrt{3})(Z - 1 + i\sqrt{3})(aZ + b)$

$= (Z^2 - 2Z + 4)(aZ + b)$

$P(Z) = aZ^3 + (b - 2a)Z^2 + (4a - 2b)Z + 4b$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6 \\ 4a - 2b = 12 \\ 4b = -16 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -4$$

On a donc

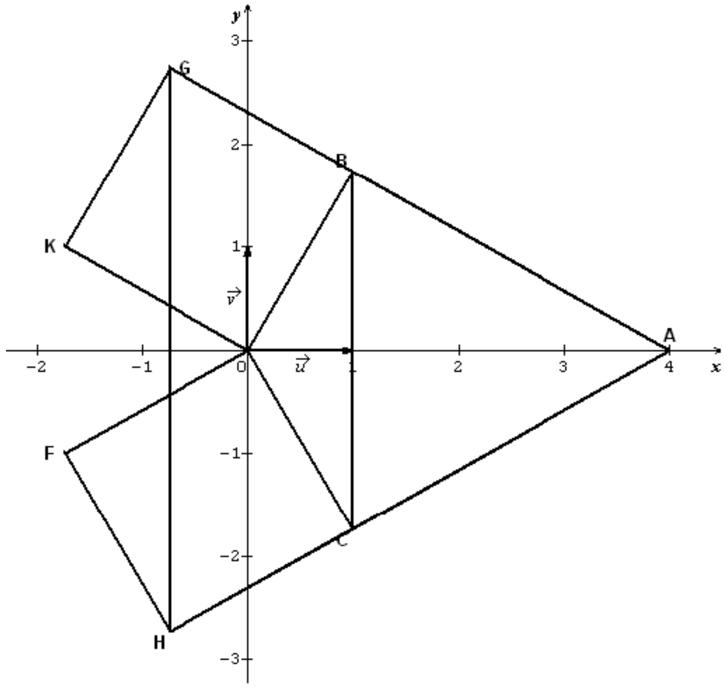
$P(Z) = (Z - 1 - i\sqrt{3})(Z - 1 + i\sqrt{3})(Z - 4)$

c. $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 1 + i\sqrt{3}, Z = 1 - i\sqrt{3}$ ou $Z = 4$.

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\mathbb{C}} = \{4; 1 + i\sqrt{3};\ 1 - i\sqrt{3}\}}}$$

2. $a = 4; b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b} = 1 - i\sqrt{3}$

a. Plaçons les points



b. $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$

$= \frac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{12} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AC} = 1 \\ (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Alors ABC est un triangle équilatéral

3. $Z_K = -\sqrt{3} + i$

a. $Z_F = e^{i\frac{\pi}{3}} Z_K = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} + i)$

$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{Z_F = -\sqrt{3} - i}}$

$Z_G = Z_K + Z_{\overrightarrow{OB}} = -\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{Z_G = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}}$

b. $\frac{Z_C}{Z_F} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i} = \frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{4i}{4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$arg\left(\frac{Z_C}{Z_F}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OF};\ \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires

4. H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$

a. $COFH$ est un parallélogramme si $Z_{\overrightarrow{CO}} = Z_{\overrightarrow{HF}}$

$Z_{\overrightarrow{CO}} = Z_{\overrightarrow{HF}} \Leftrightarrow -Z_C = Z_F - Z_H$

$\Leftrightarrow Z_H = Z_C + Z_F$

$\Leftrightarrow Z_H = (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})$

Montrons que $COFH$ est un carré

On sait que $COFH$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{OC}$

Par ailleurs : $OF = |Z_F| = 2$ et $OC = |Z_C| = 2 \Leftrightarrow OF = OC$

On en déduit que $COFH$ est un carré

b. $AG = |Z_G - Z_A| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$;

$AH = |Z_H - Z_A| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$ et

$GH = |Z_H - Z_G| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$

$AG = AH = GH$ alors AGH est un triangle équilatéral

EXERCICE 2

$A(2,0,0)$; $B(0,3,0)$ et $C(0,0,-2)$

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$

2. $H(a;b;c)$ projeté orthogonal de O sur le plan (ABC)

a. $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux car $\vec{u} \perp (ABC)$ et $H \in (ABC)$

On en déduit que :

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow -6(a-2) - 4b + 6c = 0$

$\Leftrightarrow -6a - 4b + 6c + 12 = 0$

$\Leftrightarrow -2(3a + 2b - 3c - 6) = 0$

$\Leftrightarrow 3a + 2b - 3c - 6 = 0$

b. $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires car $\vec{u} \perp (ABC)$ et $\overrightarrow{OH} \perp (ABC)$

On en déduit que :

Il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{OH} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$$

c. $3a + 2b - 3c - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -18t - 8t - 18t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -44t = 6 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{22}$

On en déduit que : $H\left(\frac{9}{11};\frac{6}{11};-\frac{9}{11}\right)$

d. $d(O;(ABC)) = OH = \sqrt{\frac{81}{121}+\frac{36}{121}+\frac{81}{121}} \Leftrightarrow d(O;(ABC)) = \frac{3\sqrt{22}}{11}$

3. $\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3}\mathcal{A}ire(ABC) \times d(O;(ABC))$

$\mathcal{A}ire(ABC) = \frac{\|\vec{u}\|}{2} = \sqrt{22}$

$\Leftrightarrow \mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} \times \sqrt{22} \times \frac{3\sqrt{22}}{11} = 2$

$\mathcal{V}_{OABC} = 2\ uv$

PROBLEME

PARTIE A

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln|x|$; $D_g = \mathbb{R}^*$

1. $g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\frac{2x^2+1}{x}$

$\forall x \in]-\infty;0[, x < 0$ et $2x^2 + 1 > 0$ alors $g'(x) > 0$

$\forall x \in]0;+\infty[, x > 0$ et $2x^2 + 1 > 0$ alors $g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty;0[$, g est strictement croissante

Sur $]0;+\infty[$, g est strictement décroissante

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

$\forall x \in]-\infty;0[, g(x) = -x^2 + 1 - \ln(-x)$;

posons $X = -x$

Si $\longrightarrow -\infty$, $X \longrightarrow +\infty$ et

$\lim\limits_{X\to+\infty} -X^2 + 1 - \ln X = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} -X^2 + 1 = -\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Si $x \longrightarrow 0^-$, $X \longrightarrow 0^+$ et $\lim_{X \to 0^+} -X^2+1-\ln X = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{X \to 0^+} -X^2+1 = 1 \\ \lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$

$\forall\, x \in \,]0;\, +\infty[, g(x) = -x^2+1-\ln x$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} -x^2+1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} -x^2+1 = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

2. $g(-1) = 0$ et $g(1) = 0$
   Déduction
   Sur $]-\infty; 0[$, g est croissante et $g(-1) = 0$
   alors : $\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]-\infty;\, \mathbf{-1}[, \boldsymbol{g(x)} < 0$ et
   $\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]\mathbf{-1}; \mathbf{0}[, \boldsymbol{g(x)} > 0$
   Sur $]0;\, +\infty[$, g est décroissante et $g(1) = 0$
   alors :$\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]\mathbf{0}; \mathbf{1}\,[, \boldsymbol{g(x)} > 0$ et
   $\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]\mathbf{1};\, +\infty[, \boldsymbol{g(x)} < 0$

PARTIE B

$f(x) = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2;\ D_f = \mathbb{R}^*$

1. $\forall\, x \in \,]-\infty; 0[, f(x) = \frac{-\ln(-x)}{x} + x - 2,$
   posons $X = -x$
   Si $\longrightarrow -\infty$, $X \longrightarrow +\infty$ et
   $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} - X - 2 = -\infty$
   car $\begin{cases} \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \\ \lim_{X \to +\infty} -X-2 = -\infty \end{cases}$
   Alors $\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$
   Si $x \longrightarrow 0^-$, $X \longrightarrow 0^+$ et
   $\lim_{X \to 0^+} \frac{1}{X} \times \ln X - X - 2 = -\infty$
   car $\begin{cases} \lim_{X \to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty \\ \lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \\ \lim_{X \to 0^+} -X-2 = -2 \end{cases}$
   Alors $\lim_{x \to 0^-} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$

$\forall\, x \in \,]0;\, +\infty[, f(x) = \frac{-\ln x}{x} + x - 2$

$\lim_{x \to 0^+} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{X \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{X \to 0^+} x-2 = -2 \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} x-2 = +\infty \end{cases}$

On en déduit que :
($\mathcal{C}$) admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x = 0}$

2.
a. $(D): y = x - 2$; $f(x) - y = \frac{-\ln|x|}{x}$
   $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y) = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$
   $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$
   Alors la droite ($\boldsymbol{D}$) d'équation $\boldsymbol{y = x - 2}$ est une asymptote oblique à ($\mathcal{C}$) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$
b. $\forall\, x \in \,]-\infty; 0[, -x > 0$ et $\ln(-x) > 0$
   $\Leftrightarrow x < -1$
   $\forall\, x \in \,]0;\, +\infty[, x > 0$ et $-\ln x > 0$
   $\Leftrightarrow x < 1$
   Par conséquent :
   $\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]-\infty; \mathbf{-1}[\, \cup \,]\mathbf{0}; \mathbf{1}[, \boldsymbol{f(x) - y} > 0$
   $\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]\mathbf{-1}; \mathbf{0}[\, \cup \,]\mathbf{1};\, +\infty[, \boldsymbol{f(x) - y} < 0$
   On en déduit que :
   Sur $]-\infty; \mathbf{-1}[$ et sur $]\mathbf{0}; \mathbf{1}[$, ($\mathcal{C}$) est au dessus de ($\boldsymbol{D}$)
   Sur $]\mathbf{-1}; \mathbf{0}[$ et sur $]\mathbf{1};\, +\infty[$, ($\mathcal{C}$) est en dessous de ($\boldsymbol{D}$)

3.
a. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x + \ln x}{x^2} + 1$
   $\Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2 - 1 + \ln x}}{\boldsymbol{x^2}}$
   On a donc : $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$
   $\forall\, x \in D_f, x^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-g(x)$
   Par conséquent, on a d'après PARTIEA :
   $\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]-\infty; \mathbf{-1}[\, \cup \,]\mathbf{1};\, +\infty[\,, \boldsymbol{f'(x)} > 0$
   $\forall\, \boldsymbol{x} \in \,]\mathbf{0}; \mathbf{1}[\, \cup \,]\mathbf{0}; \mathbf{1}[, \boldsymbol{f'(x)} < 0$
   On en déduit que :
   Sur $]-\infty; \mathbf{-1}[$ et sur $]\mathbf{1};\, +\infty[$, $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante

Sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$, f est strictement décroissante

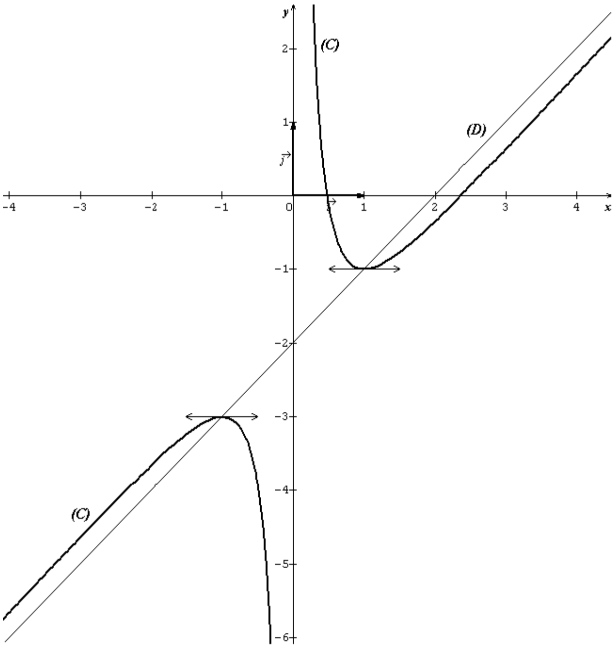
b. Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\ 0$	$-$	-0	$+$	‖				
$f(x)$			-3		‖ $+\infty$				$+\infty$
		↗		↘	‖	↘		↗	
	$-\infty$			$-\infty$	‖		-1		

a. $I(x=0\,;y=x-2) \Leftrightarrow I(0;\,-2)$
$I(0;\,-2)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$ si $f(-x)+f(x)=-4$

$$f(-x)+f(x)$$
$$=\frac{-\ln|-x|}{-x}-x-2+\frac{-\ln|x|}{x}+x-2$$
$$=-4+\frac{\ln|-x|}{x}-\frac{\ln|x|}{x}$$

Or $|-x|=|x|$ d'où $f(-x)+f(x)=-4$



On conclut donc que $I(0;\,-2)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$

b. Construction de $(\mathcal{C})$

4. Discussion sur le nombre de solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$, $f(x)=m$ $(m\in\mathbb{R})$
Si $m\in]-\infty;\,-3[$, $f(x)=m$ admet deux solutions
Si $m=-3$, $f(x)=m$ admet une solution $x=-1$
Si $m\in]-3;\,-1[$, $f(x)=m$ n'admet pas de solution
Si $m=-1$, $f(x)=m$ admet une solution $x=1$
Si $m\in]-1;\,+\infty[$, $f(x)=m$ admet deux solutions

PARTIE C

$-1\le\alpha<0$

1.
a. $\mathcal{A}(\alpha)=ua\times\int_{-1}^{\alpha}\big(y-f(x)\big)dx$

$\int_{-1}^{\alpha}\big(y-f(x)\big)dx=\int_{-1}^{\alpha}\frac{\ln(-x)}{x}dx$

$=\left[\frac{1}{2}(\ln(-x))^2\right]_{-1}^{\alpha}=\frac{1}{2}(\ln(-\alpha))^2$;

$$ua=4\,cm^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}(\alpha)=2(\ln(-\alpha))^2}}$$

b. $\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha<0}}\mathcal{A}(\alpha)=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha<0}}\ln(-\alpha)=-\infty$

Interprétation graphique
La région (Δ) est un domaine illimité du plan lorsque $\alpha\ \to\ 0$ par valeur inférieur

2. $u_n=\int_1^n f(x)dx,\ n>0$

a. $u_n=\int_1^n\left(-\frac{\ln x}{x}+x-2\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^n$

$$\boxed{\boldsymbol{u_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{1}{2}n^2-2n}}$$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}n^2\left[\frac{3}{n^2}-\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+1-\frac{4}{n}\right]=+\infty$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}n^2=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ alors la suite (u_n) diverge

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2011
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

Dans le tableau suivant figurent les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de'un modèle de chaussures, en fonction de son prix de vente.

Prix en francs : x_i	350	400	450	500	550	600
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	140	120	100	90	80	55

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ correspondant à cette série statistique dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) tel que 1cm représente 100 francs sur l'axe des abscisses et 1cm représente 20 acheteurs sur l'axe des ordonnées.
2) On appelle G_1 et G_2 les points moyens des sous nuages constitués d'une part par les trois premiers points et d'autre part par les trois derniers points.
   a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.
   b) Placer les points G_1 et G_2sur la figure tracer la droite (G_1G_2).
   c) Déterminer une équation de la forme $y = mx + p$ de la droite (G_1G_2).
3) Déduire du 2-c) une équation :
   a) du nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures vendu 650 F.
   b) du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiel est 150.

EXERCICE II (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$,$\vec{v}$).

Soient les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$ et $z_0 = 6 + 6i$.

On note A_0 le point d'affixe z_0 et pour tout n entier non nul ,on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$.

1)
   a) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique. Ecris z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   b) Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire z_3 et z_7 sous forme exponentielle.
2) Pour tout n entier naturel , on pose $|z_n| = r_n$ ·
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ·
   b) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et de courbe représentative (C) dans un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) du plan (unité graphique 4 cm).

PARTIE A

1)
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3) Soit A le point de (C) d'abscisse 0.
   a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à (C) en A.
   b) Montrer que A est un centre de symétrie pour (C).
4) Tracer (T) et (C) dans le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

PARTIE B

Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 1$, $x = 0$, $x = n$. A_n désigne l'aire de la région D_n exprimer en unité d'aire.

1) Hachurer la région D_2 sur le graphique (pour $n = 2$).
2) Montrer que $A_n = \ln 2 - \ln(1 + e^n) + n$.
3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} A_n$.

PARTIE C

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que :
$$\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{ae^x}{(1+e^x)} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2}$$
2) Soit α un réel négatif. On note $V(\alpha)$ le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C) obtenue pour $\alpha \leq x \leq 0$.
   a) Exprimer $V(\alpha)$ en fonction de α.
   b) Déterminer la limite de $V(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

PARTIE D

Soit (Γ) la courbe paramétrée de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 \end{cases} , \quad t \geq 1.$$

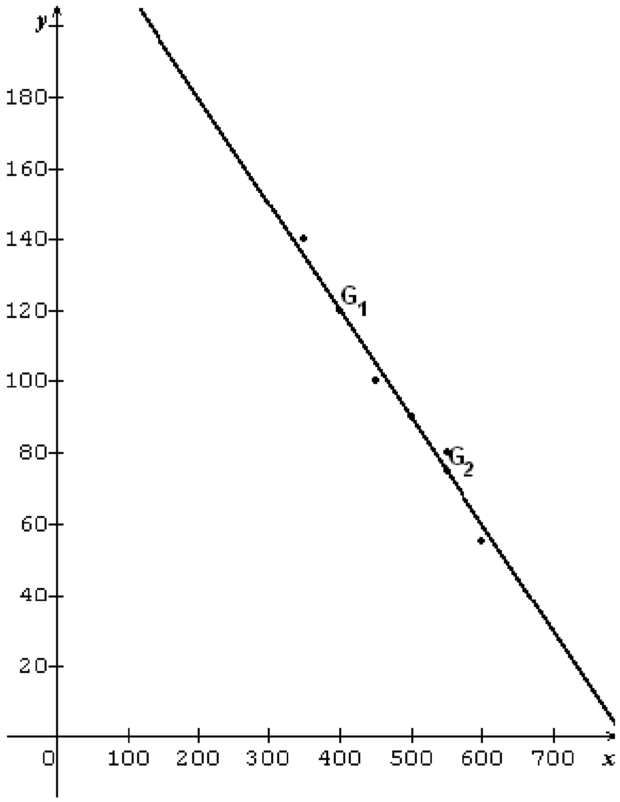
1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ).
2) Expliquer comment à partir de (C) on obtient (Γ). Construire (Γ) en pointillés.
   On donne $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}62$; $f(1) \simeq 0{,}73$; $f(2) \simeq 0{,}88$.

Année 2011
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1) Représentons le nuage de points



2)
a) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2 ·

$x_{G_1} = \frac{350+400+450}{3} = 400$ et

$y_{G_1} = \frac{140+120+100}{3} = 120$

$\boxed{G_1(400; 120)}$

$x_{G_2} = \frac{500+550+600}{3} = 550$ et

$y_{G_2} = \frac{90+80+55}{3} = 75$

$\boxed{G_2(550; 75)}$

b) Plaçons les points G_1 et G_2. (Voir figure)

c) Equation de (G_1G_2) sous la forme

$$y = mx + p$$

$$\begin{cases} 120 = 400m + p \\ 75 = 550m + p \end{cases}$$

$m = -0{,}3$ et $p = 240$

$\boxed{(G_1G_2): y = -0{,}3x + 240}$

3) Déduisons du 2-c) une estimation

a) Du nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures vendu à 650 F.

$x = 650$, alors on a :

$$y = -0{,}3 \times 650 + 240 = 45$$

Il y a 45 acheteurs potentiels pour un modèle de chaussures vendu à 650 F.

b) Du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiels est 150.

$y = 150$, alors on a : $150 = -0{,}3 \times x + 240 \leftrightarrow x = 300$

Le prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiels est 150 est 300F.

EXERCICE II

$a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$; $z_0 = 6 + 6i$

$$z_n = a^n z_0$$

1)
a) Exprimons z_1 et a^2 sous forme algébrique

$z_1 = az_0 = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right](6 + 6i)$

$= \frac{3}{2}\left[\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)\right](1 + i)$

$\boxed{z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}}$

$a^2 = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right]^2$

$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\left(\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right) + \left(\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right)^2$

$\boxed{a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}}$

Ecrivons z_1 sous forme exponentielle et montrons que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$|z_1| = 6$; $arg(z_1) = \theta$

$\leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Alors $\boxed{z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}}$

b) Exprimons z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2.

$z_3 = a^3 z_0 = a^2 \times a z_0$. D'où $\boxed{\boldsymbol{z_3 = a^2 z_1}}$

$z_7 = a^7 z_0 = a^6 \times a z_0$.

D'où $\boxed{\boldsymbol{z_7 = (a^2)^3 z_1}}$

Déduisons l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle

$z_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}$

$\leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}}}$

$z_7 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}e^{i\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}$

$\leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{z_7 = \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}}}$

2) $r_n = |z_n|$

a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$r_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

$r_n = |z_n| = |a^n z_0| = |a|^n \times |z_0|$

$|a|^2 = \frac{1}{2} \leftrightarrow |a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $|z_0| = 6\sqrt{2}$.

D'où $r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times 6\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times \frac{6\sqrt{2}}{2} \times 2$

Donc $\boxed{\boldsymbol{r_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}}$

b) Déduisons que (r_n) est une suite géométrique

$r_{n+1} = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2} = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{r_{n+1} = r_n \times \frac{\sqrt{2}}{2}}}$

Alors (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme

$\boxed{\boldsymbol{r_0 = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{0+1} = 6\sqrt{2}}}$

c) Déterminons la limite de la suite (r_n)

$\boxed{\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} r_n = 0}}$ car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ ·

Interprétons géométriquement le résultat obtenu

$r_n = |z_n| = OM_n$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} r_n = 0 \leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} OM_n = 0$

Alors lorsque $\boldsymbol{n \to +\infty}$ le point $\boldsymbol{M_n}$ converge vers l'origine O du repère$(\boldsymbol{O};\ \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$.

PROBLEME

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

PARTIE A

1)

a) Déterminons l'ensemble de définition de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 + e^x \neq 0\}$$

$\boldsymbol{1 + e^x \neq 0}$ est toujours vrai car pour tout réel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e^x > 0}$. Donc $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R}}$

b) Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{-x}+1} = 1$

$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1}}$ car $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$

$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}}$ car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

On en déduit que $(\boldsymbol{C})$ admet deux asymptotes horizontales d'équations $\boldsymbol{y = 0}$ au voisinage de $\boldsymbol{-\infty}$ et $\boldsymbol{y = 1}$ au voisinage de $\boldsymbol{+\infty}$.

2) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variations

$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$, alors $f'(x) > 0$. On en déduit que f et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

3) $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

a) Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C) en A

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$f'(0) = \frac{1}{4}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$

b) Montrons que A est un centre de symétrie de (C).

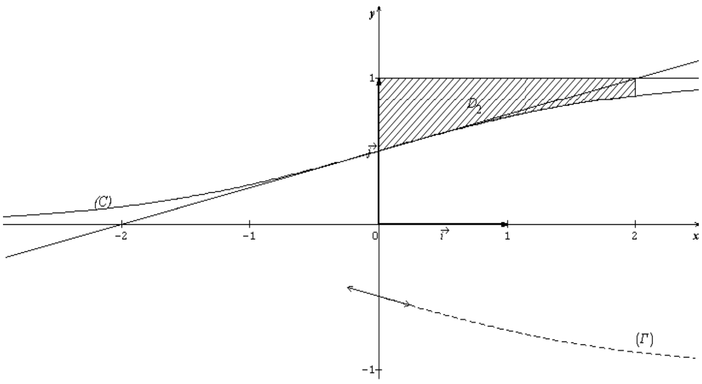
$f(2x_A - x) + f(x) = f(-x) + f(x)$

$= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} = 1$

$\boldsymbol{f(2x_A - x) + f(x) = 2 \times \frac{1}{2} = 2y_A}$ **alors**

A est un centre de symétrie de $(\boldsymbol{C})$.

4) Traçons (T) et (C)



PARTIE B

1) Hachurons la région D_2 (voir figure)

2) Montrons que

$\mathcal{A}_n = \ln 2 - \ln(1+e^n) + n$

$\mathcal{A}_n = \int_0^n (1 - f(x))dx$

$= [x - \ln(1+e^x)]_0^n$

$= n - \ln(1+e^n) + \ln 2.$

Donc $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}_n = \ln 2 - \ln(1+e^n) + n}}$

3) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2 - \ln(1+e^n) + n$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2 - \ln[e^n(1+e^{-n})] + n$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2 - \ln e^n - \ln(1+e^{-n}) + n$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2 - n - \ln(1+e^{-n}) + n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{A}_n = \ln 2}}$$

PARTIE C

1) Déterminons les réels a et b

$\frac{ae^x}{1+e^x} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2} = \frac{ae^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{ae^{2x}+(a+b)e^x}{(1+e^x)^2}$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases}}$

Donc $\frac{\boldsymbol{e^{2x}}}{\boldsymbol{(1+e^x)^2}} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{1+e^x}} - \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{(1+e^x)^2}}$

2)

a) Exprimons $V(\alpha)$ en fonction de α

$V(\alpha) = \pi \times \int_\alpha^0 f^2(x)dx$

$= \pi \times \int_\alpha^0 \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} dx$

$= \pi \times \int_\alpha^0 \left(\frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right) dx$

$= \pi \times \left[\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}\right]_\alpha^0$

$$\boxed{\boldsymbol{V(\alpha) = \pi\left[\ln 2 + \frac{1}{2} - \ln(1+e^\alpha) - \frac{1}{1+e^\alpha}\right]}}$$

b) Déterminons la limite de $V(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty} V(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \pi\left[\ln 2 + \frac{1}{2} - \ln(1+e^\alpha) - \frac{1}{1+e^\alpha}\right] = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{\lim_{\alpha\to-\infty} \boldsymbol{V(\alpha) = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)}}$$

Car $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} e^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \ln(1+e^\alpha) = 0$

PARTIE D

$(\Gamma)\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \frac{1}{1+t} - 1 \end{cases}, \quad t \geq 1$

1) Déterminons une équation cartésienne de (Γ)

$x = \ln t \quad \leftrightarrow t = e^x$

$y = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1}{1+e^x} - 1 = -\frac{e^x}{1+e^x}$

$t \geq 1 \leftrightarrow \ln t \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x \geq 0$

$\boxed{(\boldsymbol{\Gamma}): \boldsymbol{y = -\frac{e^x}{1+e^x}\ ;\ x \geq 0}}$

2) Expliquons comment à partir de (C) on obtient (Γ)

$$(\Gamma): y = -f(x)\ ;\ x \geq 0$$

Donc (Γ) est la symétrique de la partie de (C) correspondant à $x \geq 0$ par rapport à l'axe des abscisses.

Construction de (Γ) en pointillés. (Voir le graphique)

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2011
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, $(n \in \mathbb{N})$.

1) Calculer I_0 , $I_0 + I_1$ et en déduire I_1 .
2) Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.
3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive.
4) Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE II (4 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ unité de longueur 1 cm, on considère les points : A(3; 2; 4) ; B(0; 3; 5) ; C(0; 2 ; 1) ; D(3 ; 1 ; 0) et F(1 ; 2 ; 3).

1) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
2) Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. Calculer les coordonnées de E.
3) Calculer l'aire A en cm² du parallélogramme ABCD.
4) Calculer le volume V en cm³ du prisme droit de base ABCD et de hauteur $[AE]$.
5) Le point F appartient-il à la droite (AB)? Justifier la réponse.

PROBLEME (12 points)

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et l'unité est 2 cm. On placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille.

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(2 - \frac{2}{x}\right)(\ln x - 1)$. (C) désigne sa courbe représentative relative au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2\ln x + 2x - 4$.
   a) Etudier le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
   c) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.
4)
   a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
c) Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

5)
a) Etudier le signe de f sur $]0; +\infty[$.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation qu résultat obtenu.
c) Construire (C). On prendra $\alpha = 1{,}75$ et $f(\alpha) = -0{,}6$.

6) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $h(x) = -f(x)$, (C') désigne sa courbe représentative . Sans étudier h, construire (C') dans le même (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). Justifier la construction de (C').

PARTIE B

Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. (Γ) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1)
a) Que représente F pour f?
b) Sans calculer $F(x)$, donner le sens de variation de F.
c) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) aux points d'abscisses 1 et e?
(On pourra utiliser 4-c) de la partie A)

2)
a) Le nombre x étant strictement positif, calculer $\int_1^x \ln t\, dt$ (on pourra utiliser une intégration par parties)
b) Montrer que , pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = 2\ln x - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$.
c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3) Calculer l'aire A en cm² du domaine plan limité par (C), (C') et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On donne $\ln 2 \simeq 0{,}7$ et $\ln 2 \simeq 1{,}1$.

Année 2011
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, $(n \in \mathbb{N})$

1) Calculons I_0 et $I_0 + I_1$

$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1$

$\boxed{I_0 = \ln 2}$

$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx =$
$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x} dx = \int_0^1 dx$

$\boxed{I_0 + I_1 = 1}$

Déduisons I_1

$\boxed{I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln 2}$

2) Calculons $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n

$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx =$
$\int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx$

$I_n + I_{n+1} = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1$

$\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$

3) Montrons que la suite(I_n) est décroissante et positive

$\forall\, x \in [0; 1], 0 \leq x \leq 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, x^n \geq 0$

$\leftrightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leftrightarrow 0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x} \leftrightarrow$
$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

$\leftrightarrow \mathbf{0 \leq I_{n+1} \leq I_n}$

On en déduit que la suite(I_n) est décroissante et positive.

4) Montrons que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1}$

$\leftrightarrow I_n \leq I_n + I_{n+1}$ · Or $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ·

D'où $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Déduisons que la suite (I_n) est convergente et déterminons sa limite

La suite(I_n) étant décroissante et positive, alors elle est convergente

Par ailleurs $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

EXERCICE II

1) Démontrons que ABCD est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Alors ABCD est un parallélogramme.

2) Calculons les coordonnées de E

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$

$\leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \leftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 = -1 \\ y_E - 2 = -4 \\ z_E - 4 = 1 \end{cases}$

Donc $\boxed{E(2; -2; 5)}$

3) Calculons l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du parallélogramme ABCD

$\boxed{\mathcal{A} = ua \times \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 9\sqrt{2}cm^2}$

4) Calculons le volume V en cm^3 du prissme droit de base ABCD et de hauteur $[AE]$

$\boxed{V = uv \times \mathcal{A} \times \|\overrightarrow{AE}\| = 54cm^3}$

5) $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\leftrightarrow \overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FB} \neq \vec{O}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FB}$ ne sont pas colinéaires et donc le point F n'appartient pas à la droite (AB)

PROBLEME

PARTIE A

$f(x) = \left(2 - \frac{2}{x}\right)(\ln x - 1);\ D_f =]0;\ +\infty[$

1) Déterminons les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(2 - \frac{2}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}(\ln x - 1) = -\infty \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty}\left(2 - \frac{2}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x - 1) = +\infty \end{cases}$

2) Montrons que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ puis calculer $f'(x)$

La fonction $x \longmapsto 2 - \frac{2}{x}$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$car elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction $x \longmapsto \ln x - 1$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$ et pour tout $x \in]0;\ +\infty[$

On a :

$\boxed{f'(x) = \frac{2\ln x + 2x - 4}{x^2}}$

3) $g(x) = 2\ln x + 2x - 4;\ D_g =]0;\ +\infty[$

a) Etudions le sens de variation de g sur $]0;\ +\infty[$ puis dressons son tableau de variation

$\boldsymbol{g'(x) = \frac{2}{x} + 2} > 0\ \forall\, x \in \boldsymbol{]0;\ +\infty[}$

On en déduit que g est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$

Sur $]0;\ +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante. Alors g réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur $]-\infty;\ +\infty[$.

Or $g(1) \times g(2) < 0$ (car $g(1) = -2$ et $g(2) = 2\ln 2$.) Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.

c) Déduisons le signe de g sur $]0;\ +\infty[$

$g(\alpha) = 0$ et g est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$. Alors

$\forall\, \boldsymbol{x \in]0;\ \alpha\, [,\ g(x)} < 0$ **et**

$\forall\, \boldsymbol{x \in]\alpha; +\infty\, [,\ g(x)} > 0$

4)

a) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation sur $]0;\ +\infty[$

$f'(x) = \frac{2\ln x + 2x - 4}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$. Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ \alpha\, [, f'(x) < 0$ et

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty\, [, f'(x) > 0.$

On en déduit que :

sur $]0;\ \alpha\, [$, f est strictement décroissante et

sur $]\alpha; +\infty\, [$, f est strictement croissante.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

b) Montrons que $f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$

$f(\alpha) = \left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 1) = \frac{2(\alpha-1)(\ln\alpha - 1)}{\alpha}$

Or $g(\alpha) = 2\ln\alpha + 2\alpha - 4 = 0$

$\leftrightarrow\ \ln\alpha = -\alpha + 2$ et $f(\alpha) = \frac{2(\alpha-1)(-\alpha+1)}{\alpha}$.

Donc $f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

c) Calculons $f(1)$ et $f(e)$

$\boxed{f(1)=0}$ et $\boxed{f(e)=0}$

5)

a) Etudions le signe de f sur $]0;\ +\infty[$.

$f(x)=\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)=\frac{(2x-2)(\ln x-1)}{x}$

$\forall\ x\in\ ]0;\ +\infty[, x>0$ donc le signe de $f(x)$ dépend de celui de $(2x-2)(\ln x-1)$

x	0		1		e		$+\infty$
$2x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall\ \boldsymbol{x}\in\ ]\mathbf{0};\ \mathbf{1}[$ **et** $\forall\ \boldsymbol{x}\in\ ]\boldsymbol{e};\ +\infty[,\ \boldsymbol{f(x)}>0$

$\forall\ \boldsymbol{x}\in\ ]\mathbf{1};\ \boldsymbol{e}[,\ \boldsymbol{f(x)}<0$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation qu résultat obtenu

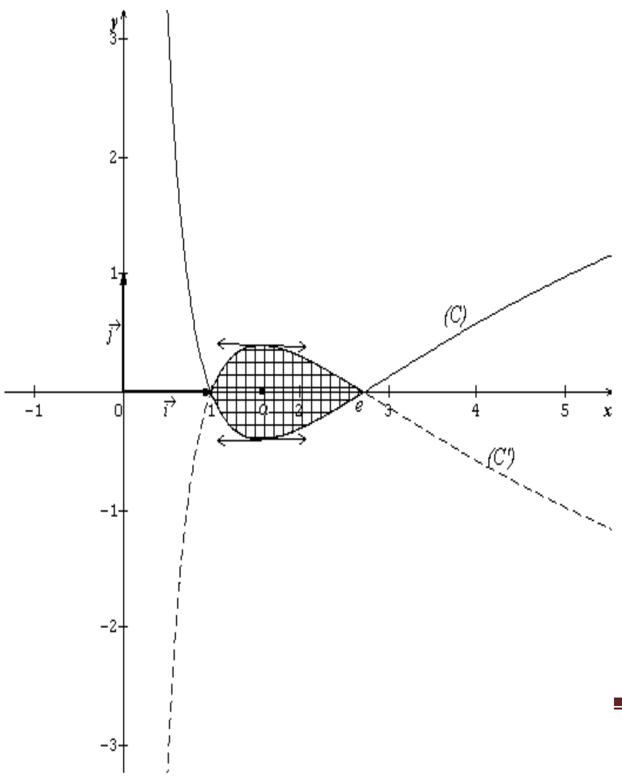
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$

On en déduit que :

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

c) Construisons (C)



6) **(C') est la symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses.** Voir le graphique.

PARTIE B

1) $F(x)=\int_1^x f(t)dt\,,x>0$

a) F représente l'unique primitive de f qui s'annule pour $x=1$.

b) $F'(x)=f(x)$ d'où on déduit de la question 5-a) de la partie A, que :

sur $]0;\ 1[$ et sur $]e;\ +\infty[$, F est strictement croissante

sur $]1;\ e[$, F est strictement décroissante.

c) $F'(1)=f(1)=0$ et $F'(e)=f(e)=0.$

Alors les tangentes à (Γ) aux points d'abscisses 1 et e sont parallèles à l'axe des abscisses.

2)

a) calculons $\int_1^x \ln t\,dt,\ x>0$

Posons $\begin{cases}u(t)=\ln t\\ v'(t)=1\end{cases}$ on a : $\begin{cases}u'(t)=\frac{1}{t}\\ v(t)=t\end{cases}$

$\int_1^x \ln t\,dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt$

$\boxed{\int_1^x \ln t\,dt=x\ln x-x+1}$

b) Montrons que , pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)=2\ln x-2\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$

$f(x)=\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)$

$=2\ln x-2-2\cdot\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}\cdot$

D'où $f(x)=2\ln x-2\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$ pour tout réel $x>0$.

c) Déduisons l'expression de $F(x)$

$F(x)=\int_1^x f(t)dt$

$=\int_1^x\left(2\ln t-2\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}-2\right)dt$

$=2x\ln x-2x+2+[-(\ln t)^2+2\ln t-2t]_1^x$

$\boxed{F(x)=2x\ln x+2\ln x-(\ln x)^2-4x+4}$

3) Calculons l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2

$\mathcal{A}=-ua\times 2\times\int_1^e f(t)dt$

$=-8F(e)=8(2e-5)$

$\boxed{\mathcal{A}=8(2e-5)\ cm}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2010
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I **(4 points)**

Soit $(z) = z^3 - (1-i)z^2 + z - 1 + i,\ z \in \mathbb{C}$.

1) Démontrer que $P(z)$ admet deux racines imaginaires pures
2) Résoudre l'équation $P(z) = 0$, puis donner les solutions sous forme exponentielle.
3) Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On note $a = -i$; $b = i$ et $c = 1 - i$.
   a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On notera A, B et C les points d'affixes respectives a , b et c.
   b) Calculer $\frac{a-b}{a-c}$, puis préciser la nature du triangle ABC.
   c) Soit C l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   Calculer l'affixe du point D.
   d) E est l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'affixe du point E
   e) Pour quelles valeurs de n, c^n est-il un réel.

EXERCICE II **(4 points)**

Une urne contient dix boules : quatre rouges et six blanches.

1) On extrait simultanément trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules rouges extraites. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance E(X) de X.
2) On répète $n$fois l'épreuve précédentes ; après chaque tirage de trois boules rouges.
   a) On suppose $n = 5$. Calculer la probabilité que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois boules rouges.
   b) On prend maintenant $n = 2$. On note S l'évènement « le nombre total de boules rouges obtenues après les deux tirages est 3». Calculer la probabilité de S.

PROBLEME **(12 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) , $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

PARTIE A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

1)
   a) Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f)? Caculer la limite de f en $-\infty$.
   b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
   c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

2)
   a) Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Calculer $g'(x)$, étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations.

3)
   a) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ et en déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g).
   b) Montrer que les tangentes en A(0,1) aux courbes (C_f) et (C_g) sont perpendiculaires .

4) Tracer (C_f) et (C_g) et leurs tangentes en A.

PARTIE B

1) Déterminer les réels a , b et c tels que la fonction qui à t associe $(at^2 + bt + c)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction qui à t associe $(t^2 + 2t)e^{-t}$
2) Soit α un réel positif
   a) Calculer $A(\alpha)$ en cm² de la région du plan comprise entre (C_f) , (C_g) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$. (On pourra utiliser le résultat précédent)
   b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} A(\alpha)$.
3) Calculer en cm² de la région du plan comprise entre (C_f) , (C_g) , droite d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées .

PARTIE C

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $U_n = \ln[f(n)]$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1) Justifier que la suite (U_n) est décroissante.
2) On désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite (U_n) :
   $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
   a) Montrer que $U_n = -n + \ln(n+1)$.
   b) Démontrer que : $S_n = 2\ln[\ln(n+1)!] - \frac{n(n+1)}{2}$
   On donne $e^{-1} = 0,4$.

Année 2010
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

$P(z) = z^3 - (1-i)z^2 + z - 1 + i$

1) Montrer que $P(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures

Posons $z = ib$ et $P(ib) = 0$ on a :

$(ib)^3 - (1-i)(ib)^2 + ib - 1 + i = 0$

$\leftrightarrow \begin{cases} -b^3 - b^2 + b + 1 = 0 & (1) \\ b^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

(2) $\leftrightarrow b = \pm 1$

si $b = -1$ alors

$-(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 1 = 0$

si $b = 1$ alors $-1^3 - 1^2 + 1 + 1 = 0$

Donc $P(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures $z = -i$ et $z = i$.

2) Résolution de l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = (z - i)(z + i)(az + b) =$

$(z^2 + 1)(az + b) = az^3 + bz^2 + az + b$

Par identification on a : $a = 1$ et $b = -1 + i$ d'où

$P(z) = (z - i)(z + i)(z - 1 + i)$

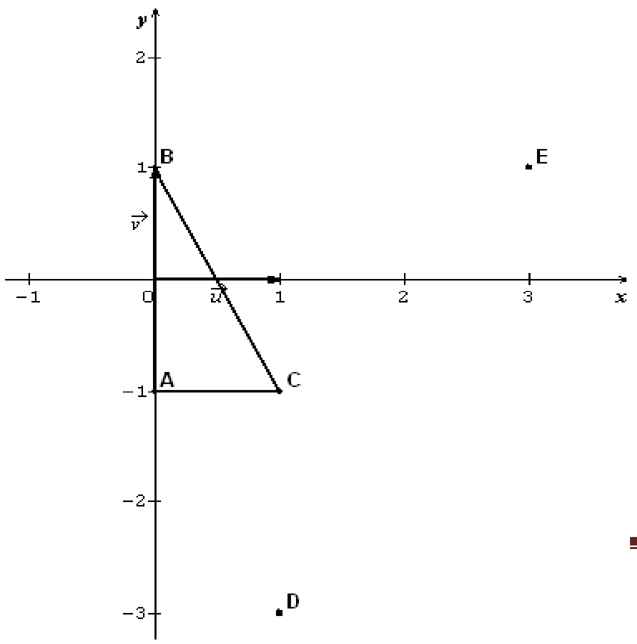
$P(z) = 0$

$\leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$ ou $z = 1 - i$.

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-i\ ; i\ ; 1 - i\}}$

3) $a = -i$; $b = i$ et $c = 1 - i$

a) Figure



b) Calculons $\frac{a-b}{a-c}$

$\frac{a-b}{a-c} = \frac{-2i}{-1} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\frac{a-b}{a-c} = 2i}$

Précisons la nature du triangle ABC

$\begin{cases} \left|\frac{a-b}{a-c}\right| = 2 \\ arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AC} = 2 \\ (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

On en déduit que ABC est un triangle rectangle en A.

c) Calculons l'affixe de D

$t(D) = C \quad \leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{DC}} = z_{\overrightarrow{AB}}$

$\leftrightarrow c - d = b - a \leftrightarrow d = c - b + a$

$\leftrightarrow \boldsymbol{d = 1 - 3i}$

d) Déterminons l'affixe de E

$e = e^{i\frac{\pi}{2}} \times d = id \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{e = 3 + i}$

e) $c = \left[\sqrt{2}\ ; -\frac{\pi}{4}\right]$

$\leftrightarrow \quad c^n = \left[\left(\sqrt{2}\right)^n ; -\frac{n\pi}{4}\right]$

c^n est réel si et seulement si

$\arg(c^n) = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$-\frac{n\pi}{4} = k\pi \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{n = -4k}$

c^n est réel si et seulement si n est un multiple de 4.

EXERCICE II

$E = \{4bR\ ; 6bB\} \quad ; \quad CardE = 10$

1) On extrait simultanément trois boules :

$Card\Omega = C_{10}^3 = \frac{10\times9\times\times8}{3\times2\times1} = 120.$

X= nombre de boules rouges extraites :

Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3.

La loi de probabilité de X :

$X = x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

$P(X=0)=\frac{C_4^0\times C_6^3}{120}$

$P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{120}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{120}$

$P(X=3)=\frac{C_4^3\times C_6^0}{120}$

$E(X)=\frac{60+72+12}{120} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{E(X)=\frac{6}{5}}$

2) Lors d'un tirage simultané de trois boules la probabilité que l'on obtienne trois boules rouges est $p=\frac{1}{30}\cdot$
On répète n fois cette épreuve :

a) $n=5$
La probabilité que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois boules rouges est $P(2)=C_5^2\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^3$

$=\frac{10\times 29^3}{3^5\times 10^5}=\frac{29^3}{3^5\times 10^4}$

$\leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{p(2)=\frac{24389}{2430000}}}$

b) $n=2$
$S=\{(0\,;3)\,,(3;0)\,,(1\,;2),(2\,;1)\}$
Car $0+3=1+2=3$

$P(S=3)=2\times\frac{20}{120}\times\frac{4}{120}+2\times\frac{60}{120}\times\frac{36}{120}$

$\leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{P(S=3)=\frac{14}{45}}}$

PROBLEME

PARTIEA

$f(x)=(x+1)^2e^{-x}\,;\; D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=e^{-x}\,;\; D_g=\mathbb{R}$

1)

a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}=0$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{f(x)=0}}$ car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0\\ \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0\\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{cases}$

On n'en déduit que la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty\cdot$

Calculons la limite de f en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(x+1)^2e^{-x}=+\infty$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\boldsymbol{f(x)=+\infty}}$

car $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\end{cases}$

b) Calculons $f'(x)$ et étudions son signe
$f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$
$\forall\, x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ alors le signe de $f'(x)$ va dépendre de celui de $(1-x^2)\cdot$
Par conséquent :
$\forall\, x\in\,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[\,, f'(x)<0$
$\forall\, x\in\,]-1\,;\,1[\;, f'(x)>0$

c) Sens de variation et tableau de variations de f
sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$, f est strictement décroissante.
sur $]-1\,;\,1[$, f est strictement décroissante.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

2)

a) Calculons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\boldsymbol{g(x)=+\infty}}$ car $\begin{cases}e^{-x}=\frac{1}{e^x}\\ \lim_{x\to-\infty} e^x=0\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{g(x)=0}}$ car $\begin{cases}e^{-x}=\frac{1}{e^x}\\ \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty\end{cases}$

b) Calculons $g'(x)$

$\boxed{\boldsymbol{g'(x)=-e^{-x}}}$

Etudions le sens de variation de g
$\forall\, x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0\,;$ donc $g'(x)<0\cdot$
On en déduit que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}\cdot$

Tableau de variations de g

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0

3)

a) Etudions le signe de $f(x) - g(x)$

$\boxed{f(x) - g(x) = (x^2 + x)e^{-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, alors le signe de $f(x) - g(x)$ va dépendre de celui de $x^2 + x$. Par suite :

$\forall x \in]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$, $f(x) - g(x) > 0$

$\forall x \in]-2 ; 0[$, $f(x) - g(x) < 0$.

On en déduit que :

sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]0 ; +\infty[$, (C_f) est au dessus de (C_g)

sur $]-2 ; 0[$, (C_f) est en dessous de (C_g).

b) Montrons que les tangentes en A(0,1) aux courbes (C_f) et (C_g) sont perpendiculaires

La tangente en A(0,1) à (C_f) a pour coefficient directeur $f'(0)$.

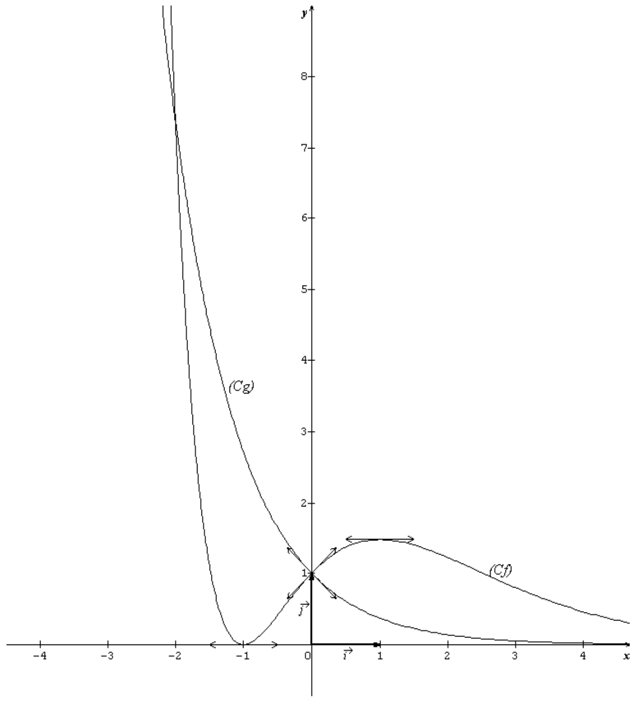
La tangente en A(0,1) à (C_g) a pour coefficient directeur $g'(0)$.

$$f'(0) \times g'(0) = 1 \times (-1) = -1.$$

Alors les tangentes en A(0,1) aux courbes (C_f) et (C_g) sont perpendiculaires.

4) Traçons (C_f) et (C_g) et leur tangente en A

La tangente en A(0,1) à (C_f) a pour équation $y = x + 1$



PARTIE B

1) Déterminons les réels a, b et c.

Posons $H(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t}$ et $h(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$

$H'(t) = h(t)$

$\Leftrightarrow (-at^2 + (2a - b)t + b - c)e^{-t} = (t^2 + 2t)e^{-t}$

Par identification :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 2 \\ b - c = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -4 \end{cases}$$

$t \mapsto (-t^2 - 4t - 4)e^{-t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto (t^2 + 2t)e^{-t}$

2) Soit $\alpha > 0$

a) Calculons l'aire $A(\alpha)$ en cm²

$A(\alpha) = ua \times \int_0^\alpha (f(x) - g(x))dx$

$A(\alpha) = ua \times \int_0^\alpha (x^2 + 2x)e^{-x}dx$

$A(\alpha) = 4 \times [(-x^2 - 4x - 4)e^{-x}]_0^\alpha$

$\boxed{A(\alpha) = 4[4 - (\alpha^2 + 4\alpha + 4)e^{-\alpha}]cm^2}$

b) Calculons $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} 4[4 - \alpha^2 e^{-\alpha} - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha}]$

$\boxed{\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = 16}$

3) Calculons l'aire de la région du plan comprise entre (C_f) et (C_g), la droite

d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées.

$A = ua \times \int_{-2}^{0}\big(g(x) - f(x)\big)dx$

$= 4[(x^2 + 4x + 4)e^{-x}]_{-2}^{0}$

$\boxed{\boldsymbol{A = 16cm^2}}$

PARTIE C

$U_n = \ln[f(n)]\ \ , n > 0$

1) Justifions que (U_n) est décroissante

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n + 1 \geq n$.

Alors $f(n+1) \leq f(n)$ car f est décroissante sur $[1; +\infty[$ ·

$f(n+1) \leq f(n)$

$\leftrightarrow\ \ \ln[f(n+1)] \leq \ln[f(n)]$

$\leftrightarrow U_{n+1} \leq U_n$

On en déduit que la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est décroissante.

2) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

a) Montrons que $U_n = -n + 2\ln(n+1)$

$U_n = \ln\left[(n+1)^{2e^{-n}}\right]$

$= \ln(n+1)^2 + \ln e^{-n} = 2\ln(n+1) - n$

Alors $\boxed{\boldsymbol{U_n = -n + 2\ln(n+1)}}$

b) Démontrons que

$S_n = 2\ln[(n+1)!] - \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = 2\ln(1) - 1 + 2\ln(2) - 2 + \cdots + 2\ln(n+1) - n$

$S_n = 2[\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n+1)] - (1 + 2 + \cdots + n)$

$S_n = 2\ln[1 \times 2 \times \cdots \times (n+1)] - \frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{\boldsymbol{S_n = 2\ln[(n+1)!] - \frac{n(n+1)}{2}}}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2010
Session Normale
Epreuve du 2^{nd} tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) ; unité graphique 2 cm. On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectives sont : 2i, -1 et i. Soit f l'application de (P)\ $\{A\}$ dans (P) qui, à tout point M d'affixe z $(z \neq 2i)$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+1}{z-2i}$.

1) Placer les points A, B et C. On complètera la figure dans la suite.
2) Déterminer l'affixe du point C', image de C par f. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?
3) Montrer que le point C admet un unique antécédent C'' par f. Quelle est la nature du triangle BCC''.
4) Donner une interprétation géométrique de $|z'|$ et $\arg(z')$.
5) Déterminer les ensembles suivants :
   a) L'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un réel strictement négatif.
   b) L'ensemble (F) des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pur non nul.
   c) L'ensemble (D) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre complexe de module 1
6) Construire ACBC', BCC'', (E), (F) et (D) dans la figure.

EXERCICE II (4 points)

Une entreprise fabrique des vêtements. Dans le tableau suivant , on a indiqué pour les sept premiers mois de l'année 2008 la production journalière moyenne de pulls.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Rang du moi x_i	1	2	3	4	5	6	7
Production journalière y_i	200	210	260	265	270	300	315

La direction devra fermer l'atelier de fabrication de pulls si la production moyenne journalière n'atteint pas 350 pulls à la fin de l'année 2008.
On considère le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé au tableau ci-dessus, relativement à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) , prendre pour unité :en abscisse 1 cm par rang de mois ; en ordonnée 1cm pour 20 pulls produits.

1)
   a) Représenter le nuage de points dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
   b) Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.
2)
   a) Calculer les coordonnées du moint moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau , puis celles du point moyen G_2 associé aux trois derniers points.
   b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et la tracer.

3) On admet que (G_1G_2) réalise un ajustement du nuage de points.
   a) Déterminer par le calcul la production journalière moyenne de pulls en décembre 2008.
   b) Comment peut-on retrouver graphiquement ce résultat ?
4) L'atelier de fabrication de pulls a-t-il été fermé en fin décembre ? justifier votre réponse.

PROBLEME (12 points)

PARTIE A

Soit u la fonction numérique définie par $u(x) = 1 - xe^{-x}$.

1) Etudier le sens de variation de u (on ne demande pas ni les limites ni le tableau de variation)
2) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-4\ln(-x)}{x} & si\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}) & si\ x \in [-1\ ;\ +\infty[\end{cases},$$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), (unite: 2 cm).

1)
   a) Vérifier que f est continue en -1.
   b) Etudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.
   c) Calculer la limite de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes à (C).
   d) Montrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à (C). Etudier la position relative de (C) et de (D) sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.
2)
   a) Vérifier que pour $x < -1$, $f'(x) = \frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$.
   b) Etudier les variations de f sur $]-\infty\ ;\ -1[$, puis sur $[-1\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.
   c) Montrer qu'il existe un point d'abscisse supérieur à -1 où la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (D).
3)
   a) Montrer que la courbe (C) est située au dessus de l'axe des abscisses.
   b) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes, puis la tangente (T) à (C).

PARTIE C

1) Soit λ un nombre réel supérieur à -1.
   a) Calculer les intégrales $I = \int_{-e}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx$ et $J(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx$.
   b) On note $A(\lambda)$ l'aire en cm² , de la partie du plan au dessus e l'axe des abscisses, délimitée par la courbe (C), l'asymptote (D) et les droites

d'équations : $x = -e$ et $x = \lambda$. Montrer que $A(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda + 2)e^{-\lambda}$.

2) Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

PARTIE D

Soit (Γ) la courbe dont une représentation paramétrique est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = 4te^{t} \end{cases} (t < 0)$$

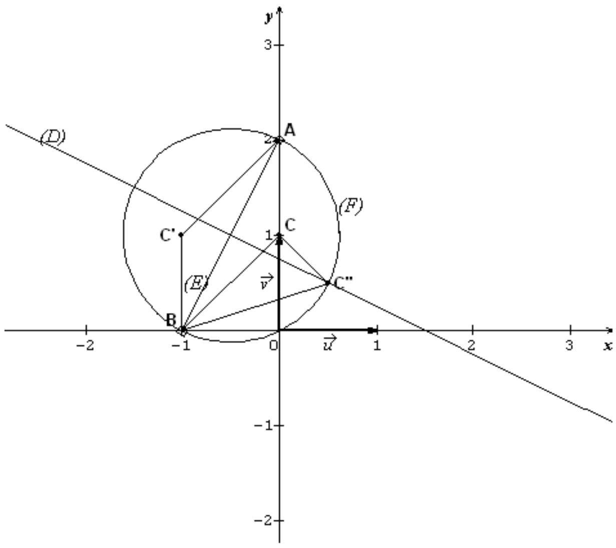
1) Montrer que (Γ) est l'image d'une partie de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (O ; $\vec{\imath}$).
2) Construis (Γ) en pointillés dans le même repère que (C).

Année 2010
2^{nd} tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1) Plaçons les points A, B et C



2) Déterminons l'affixe du point C'

$z_{C'} = \frac{z_C+1}{z_C-2i} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{z_{C'} = -1+i}$

Nature du quadrilatère ACBC'

$\begin{cases} z_C - z_A = -i \\ z_B - z_{C'} = -i \end{cases} \leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC'}$

On en déduit que ACBC' est un parallélogramme.

3) Démontrons que le point C admet un unique antécédent C'' par f

$f(z_{C''}) = z_C$

$\frac{z_{C''}+1}{z_{C''}-2i} = i \quad \leftrightarrow \quad z_{C''} = \frac{1}{1-i}$

$\boxed{\boldsymbol{z_{C''} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}}}$

Nature du triangle BCC''

$\frac{z_{C''} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{i}{2} \quad \leftrightarrow \quad (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CC''}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On en déduit que BCC'' est un triangle rectangle en C.

4) Donnons une interprétation géométrique de $|z'|$ et $arg(z')$

$z' = \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$

$\boxed{\begin{cases} |z'| = \frac{BM}{AM} \\ arg(z') = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})[2\pi] \end{cases}}$

5) Déterminons les ensembles suivants :

a) z' est un réel strictement négatif si et seulement si $arg(z') = \pi[2\pi]$

$arg(z') = \pi[2\pi] \quad \leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$

(E) est l'ensemble des points du segment $[AB]$ privé des points A et B.

b) z' est un imaginaire pur non nul si et seulement si $arg(z') = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$arg(z') = \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

(F) est l'ensemble des points du cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

c) $|z'| = 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{BM}{AM} = 1$

$BM = AM$

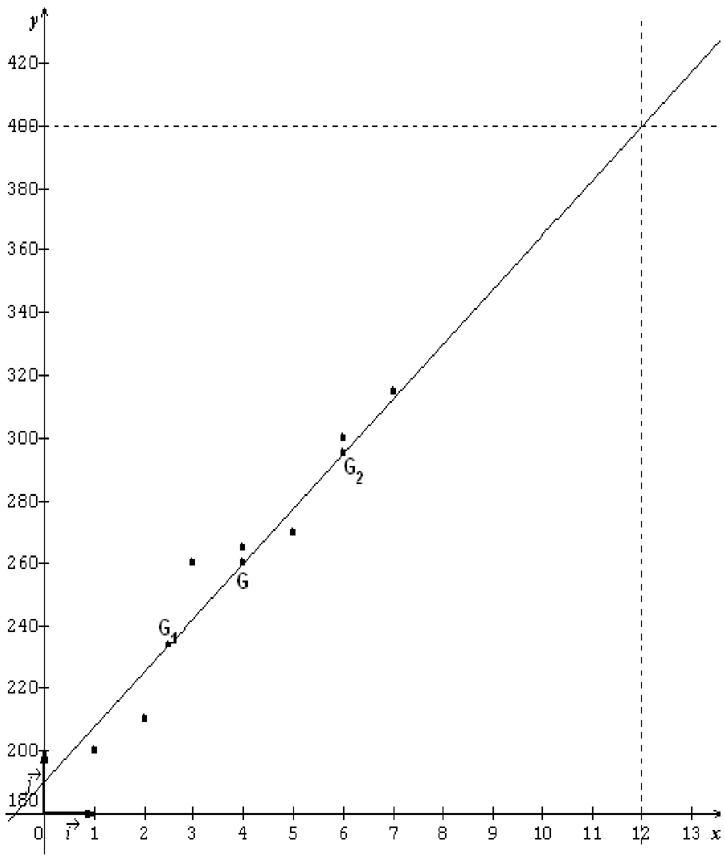
(D) est l'ensemble des points de la médiatrice du segment $[AB]$.

6) Construction (voir la figure)

EXERCICE II

1)

a) Représentons le nuage de points dans le repère



b) Calculons les coordonnées de G

$$\begin{cases} x_G = \frac{28}{7} = 4 \\ y_G = \frac{1820}{7} = 260 \end{cases} \leftrightarrow \boxed{G(4; 260)}$$

Plaçons le point G (voir le graphique)

2)

a) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2

$$\begin{cases} x_{G_1} = \frac{10}{4} = 2{,}5 \\ y_{G_1} = \frac{935}{4} = 233{,}75 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\boxed{G_1(2{,}5\,; 233{,}75)}$$

$$\begin{cases} x_{G_2} = \frac{18}{3} = 6 \\ y_{G_2} = \frac{885}{3} = 295 \end{cases} \leftrightarrow \boxed{G_2(6\,; 295)}$$

b) Déterminons une équation de (G_1G_2)

$$(G_1G_2): y = ax + b$$

$$\begin{cases} 2{,}5a + b = 233{,}75 \\ 6a + b = 295 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \quad a = 17{,}5 \text{ et } b = 190$$

$$\boxed{(G_1G_2): y = 17{,}5x + 190}$$

Traçons (G_1G_2) (voir le graphique)

3)

a) Déterminons la production moyenne journalière de pulls en décembre 2008

$$x = 12 \leftrightarrow$$

$$y(12) = 17{,}5 \times 12 + 190 = 400$$

En décembre 2008, la production journalière est de 400 pulls.

b) Il faut déterminer l'ordonnée du point d'intersection de (G_1G_2) et de la verticale $x = 12$.

(Voir le graphique)

4) $400 > 350$ **donc l'atelier n'a pas fermé en fin décembre 2008.**

PROBLEME

PARTIE A

$u(x) = 1 - xe^{-x}$

1) Etudions le sens de variation de u.

$$D_u = \mathbb{R}$$

$$\boxed{u'(x) = (-1 + x)e^{-x}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$. Donc le signe de $u'(x)$ dépend de celui de $(-1 + x)$.

Par conséquent : $\forall\, x \in\,]-\infty; 1[$, $u'(x) < 0$ et $\forall\, x \in\,]1; +\infty[, u'(x) > 0$.

On en déduit que : sur $]-\infty; 1[$, u est strictement décroissante et sur $]1; +\infty[$, u est strictement croissante.

2) Déduisons le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x

u admet un minimum absolu en 1. On en déduit que :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ u(x) \geq u(1)$.

Or $u(1) = 1 - e^{-1} > 0$.

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ u(x) > 0$.

PARTIE B

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-4\ln(-x)}{x} & si\ x \in\,]-\infty\,; -1[\\ f(x) = (x+1)(1 + e^{-x}) & si\ x \in [-1\,; +\infty[\end{cases}$$

$D_f = (]-\infty\,;\,0[\,\cap\,]-\infty\,;\,-1[) \cup (\mathbb{R}\,\cap\,[-1\,;\,+\infty[) = \mathbb{R}$

1)

a) Vérifions que f est continue en -1

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{-4\ln(-x)}{x} = \frac{-4\ln(1)}{-1} = 0$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = f(-1) = 0$

$\boldsymbol{\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = f(-1)}$.

Alors f est continue en -1.

b) Etudions la dérivabilité en -1.

$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to-1^-} \frac{-4\ln(-x)}{x(x+1)}$

Posons $X = -x$

$\lim_{x\to-1^-} X = 1^+$ et $\lim_{x\to1^+} -\frac{4}{X}\cdot\frac{\ln X}{X-1} = -4$ car $\lim_{x\to1^+} \frac{\ln X}{X-1} = 1$.

Alors $\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = -4$.

$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to-1^+} 1+e^{-x} = 1+e$

$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \neq \lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$. Alors f n'est pas dérivable en -1.

<u>Interprétation graphique des résultats</u>

Au point de coordonnées $(-1;0)$, (C) admet deux demi-tangentes d'équations : $(T_1): y = -4x-4$ à gauche et $(T_1): y = (1+e)(x+1)$.

Le point de coordonnées $(-1;0)$ est donc un point anguleux pour (C).

c) Calculons la limite de f aux bornes de son ensemble de définition

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4\ln(-x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} 4\cdot\frac{\ln X}{X} = 0$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ car $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

On en déduit que (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

d) Montrons que la droite (D) d'équation : $y = x+1$ est asymptote à (C)

$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}+e^{-x} = 0$

$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} [f(x)-y] = 0}$

car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

Alors la droite (D) d'équation : $y = x+1$ est asymptote à (C).

<u>Etudions la position relative de (C) et de (D) sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$</u>

$\boldsymbol{f(x) - y = (x+1)e^{-x}}$

$\forall\, x \in [-1\,;\,+\infty[$, $(x+1) \geq 0$ et $e^{-x} > 0$; donc $f(x)-y \geq 0$.

On en déduit que sur $[-1\,;\,+\infty[$,(C) est au dessus de (D).

2)

a) Vérifions que pour $x < -1$, $f'(x) = \frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$

Pour $x < -1$,

$f'(x) = \frac{-4\cdot\frac{1}{x}\cdot x+4\ln(-x)}{x^2} = \frac{-4+4\ln(-x)}{x^2}$.

Donc pour $x < -1$, $f'(x) = \frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$.

b) Etudions les variations de f

Pour $x < -1, x^2 > 0$ et $4 > 0$; alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\ln(-x)-1$.

$\ln(-x)-1 > 0 \leftrightarrow \ln(-x) > 1 \leftrightarrow -x > e \leftrightarrow x < -e$

Pour $x \in]-\infty;-e[$, $f'(x) > 0$ et pour $x \in]-e;-1[$, $f'(x) < 0$.

Pour $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = 1-xe^{-x} = u(x) > 0$ d'après la partie A.

On en déduit que :

sur $]-\infty;-e[$, f est strictement croissante

sur $]-e;-1[$, f est strictement décroissante

sur $]-1;+\infty[$, f est strictement croissante.

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-e$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-4\|\|1+e$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Montrons qu'il existe un point d'abscisse supérieur à -1 où la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (D).

$\begin{cases} f'(x_0) = 1 \\ x_0 > -1 \end{cases}$

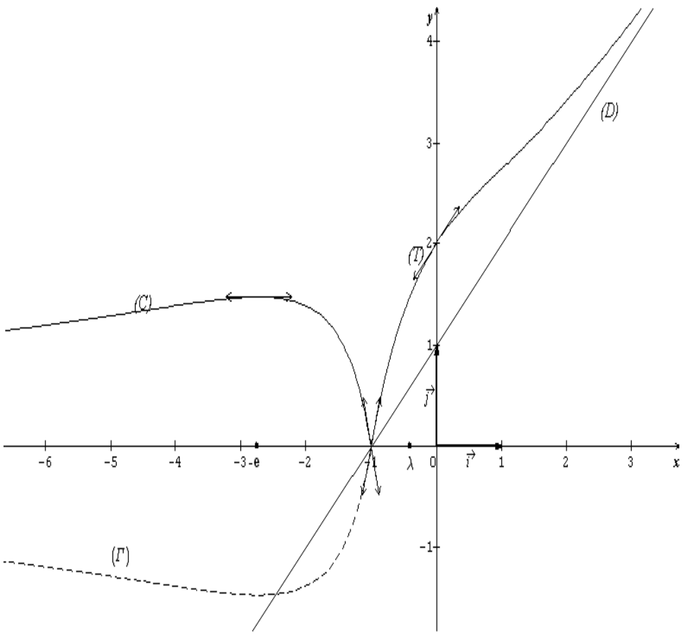
$1 - x_0 e^{-x_0} = 1 \leftrightarrow x_0 = 0$ car $e^{-x_0} \neq 0$.

Alors au point $(0;1)$ la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (D).

3)

a) Montrer que la courbe (C) est située au dessus de l'axe des abscisses

D'après le tableau de variations de f ; $f\,(]-\infty;\ +\infty[) = [0;\ +\infty[$. C'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.On en déduit



que (C) est située au dessus de l'axe des abscisses.

b) Traçons la courbe (C) et ses asymptotes, puis la tangente (T) à (C)

PARTIE C

1) $\lambda > -1$

a) Calculons les intégrales $I = \int_{-e}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx$ et $J(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx$

$I = \int_{-e}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(-x))^2\right]_{-e}^{-1}$

$\boxed{I = -\frac{1}{2}}$

$J(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \longleftrightarrow$

$\begin{cases} u'^{(x)} = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$J(\lambda) = [-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\lambda} + \int_{-1}^{\lambda} e^{-x} dx$

$= [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{\lambda}$

$\boxed{J(\lambda) = e - (\lambda+2)e^{-\lambda}}$

b) Montrons que

$\mathcal{A}(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda+2)e^{-\lambda}$

$\mathcal{A}(\lambda) = ua \times \left(\int_{-e}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{\lambda}(f(x) - y)dx\right)$

$= 4\left(\int_{-e}^{-1} -4 \cdot \frac{\ln(-x)}{x} dx + \int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{-x}dx\right)$

$\mathcal{A}(\lambda) = 4(-4I + J(\lambda))$

$\boxed{A(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda+2)e^{-\lambda}}$

2) Calculons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 8 + 4e}$

car $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{-\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$

PARTIE D

$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = 4te^{t} \end{cases} (t < 0)$

1) Montrons que (Γ) est l'image d'une partie de (C) par la symétrie orthogonale d'axe $(O\,;\vec{\imath}\,)$.

$x = -e^{-t} \quad \leftrightarrow \quad t = -\ln(-x)$ et $y =$
$-4\ln(-x) \times \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{4\ln(-x)}{x}$
$= -f(x)$

$t < 0 \ \leftrightarrow -t > 0 \leftrightarrow e^{-t} > 1 \leftrightarrow x < -1$

$\boxed{(\boldsymbol{\Gamma}): \boldsymbol{y} == -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{ avec } \boldsymbol{x} < -1}$

On en déduit que $(\boldsymbol{\Gamma})$ est l'image de la partie de $(\boldsymbol{C})$ correspondant à $\boldsymbol{x} < -1$ par la symétrie orthogonale d'axe (O ; $\vec{\mathbf{i}}$).

2) Construisons (Γ) en pointillés dans le même repère que (C)
(Voir le graphique)

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2009
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I **(4 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) d'unité graphique 2cm. Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t(3-t^2) \\ y(t) = t\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \end{cases} \quad t \in [-2\,;2]$$

1°) Comparer M(t) et M(-t) pour t ∈ [-2 ; 2] et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (Γ) à [0 ; 2].

2°) Etudier le sens de variation de x sur [0 ; 2]

3°) a) Montrer que pour tout t ∈ [0 ; 2], $\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \geq 0$

b) Etudier le sens de variation de y sur [0 ; 2].

4°) Dresser le tableau de variation conjoint de x et y.

5°) Déterminer les points d'intersections de (Γ) avec l'axe des ordonnées.

6°) Tracer (Γ).

On donne : $\ln 5 \simeq 1{,}60$; $\ln 2 \simeq 0{,}69$; $\ln(2+\sqrt{3}) \simeq 1{,}31$; $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$

EXERCICE II **(4 points)**

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) on considère les points A,B,C,D d'affixes respectives $z_A = -2i$; $z_B = 4 - 2i$; $z_C = 4 + 2i$; $z_D = 1$.

1°) a) Placer les points A,B,C et D.

b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature exacte du triangle ABC.

2°) On désigne par f l'application qui a tout point M ≠ A d'affixe z de P associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$

a) Déterminer les images B' et C' des points B et C par f

b) Ecrire l'affixe $z_{B'}$ de B' sous forme trigonométrique.

c) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$

3°) a) Montrer que pour tout complexe z distinct de -2i, (z'-1)(z + 2i) = -4 - 4i.

b) Montrer que pour tout point M ≠ A

i) M' ≠ D

ii) $DM' \times AM = 4\sqrt{2}$

iii) $mes(\vec{u}\,;\overrightarrow{DM'}) + mes(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{4}$

PROBLEME **(12 points)**

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité graphique : 4cm)

PARTIE A : Etude d'une fonction auxilliaire.

Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par : $g(x) = x + 2 - e^x$

1°) Etudier le sens de variation de g sur [0 ; +∞[et déterminer la limite de g en +∞

2°) a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans [0 ; +∞[et que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

b) En déduire le signe de g suivant la valeur de x.

PARTIE B

1°) a) Montrer que pour tout x ∈ [0 ; +∞[$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[.

2°) a) Montrer que pour tout x ∈ [0 ; +∞[; $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b) En déduire la limite de f en +∞. Interpreter graphiquement le resultat trouvé.

3°) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A) 2) donner un encadrement de f(α) d'amplitude de 10^{-2}

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5°) a) Etablir que pour tout x ∈ [0 ; +∞[$f(x) = x + \frac{(x+1).u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$

b) Etudier le sens de variation de la fonction u sur [0 ; +∞[. En déduire le signe de u(x).

c) Déduire des résultats précédents la position de (C) par rapport à (T).

PARTIE C

1°) Déterminer une primitive F de f sur [0 ; +∞[.

On pourra utiliser l'expression de f(x) etablie dans la question B) 2).

2°) On note D le domaine délimité par (C) ; (T) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

Calculer en cm^2, l'aire A du domaine D.

3°) Pour tout entier n on pose $V_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

a) Calculer V_0, V_1 et V_2

b) Interpréter graphiquement V_n

c) Montrer que pour tout n ≥ 2 ; $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$.

En déduire que pour tout n ≥ 2 ; $V_{n+1} \leq V_n$

d) Déterminer la limite de (V_n)

On donne : $e \simeq 2{,}72$; $e^{1,14} \simeq 3{,}12$; $e^{1,15} \simeq 3{,}16$

Année 2009
1er tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

$(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = t(3-t^2) \\ y(t) = t\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \end{cases}$ $, t \in [-2;-2]$

1°) Pour tout t ∈ [-2 ; 2]

x(-t) = (-t)(3 – $(-t)^2$) = -t(3 - t^2) = -x(t)

y(-t) = (-t)ln($\frac{3-t}{3+t}$) = tln($\frac{3+t}{3-t}$) = y(t) ; (car ln($\frac{3-t}{3+t}$) = - ln($\frac{3+t}{3-t}$))

$\begin{cases} \mathbf{x(-t) = -x(t)} \\ \mathbf{y(-t) = y(t)} \end{cases}$ **donc les M(t) et M(-t) sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Si t ∈ [0 ; 2] ⇔ -t ∈ [-2 ; 0] donc **on peut étudier (Γ) sur [0 ; 2] et compléter la courbe par symétrie d'axe (oy)**

2°) Pour tout t ∈ [0 ; 2] ; x'(t) = 3(1 - t^2) = 3(1-t)(1+t). Le signe de x'(t) dépend de celui de(1-t). Par conséquent :

Si t ∈ [0 ; 1] x'(t) ≥ 0 ; et Si t ∈ [1 ; 2] x'(t) ≤ 0.

On en déduit que : **x est croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; 2]**

3°) a) Montrons que ln($\frac{3+t}{3-t}$) ≥ 0

Pour tout t ∈ [0 ; 2], 3≤ $3+t \leq 5$ et 1 ≤ 3 – t ≤ 3 ⇔ $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-t} \leq 1$

$\begin{cases} 3 \leq 3+t \leq 5 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-t} \leq 1 \end{cases}$ ⇔ $\frac{3+t}{3-t} \geq \frac{3}{3} = 1$ (en faisant le produit membre à membre de ces deux égalités). On en déduit que : $\boxed{\mathbf{\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \geq \ln 1 = 0}}$ D'où le résultat.

b)Variations de y

∀ t ∈ [0 ; 2], y(t) = t ln($\frac{3+t}{3-t}$)

y'(t) = ln($\frac{3+t}{3-t}$) + $\frac{6t}{(3-t)(3+t)}$ ≥ 0 pour tout t ∈ [0 ; 2] ; (car ln($\frac{3+t}{3-t}$) ≥ 0 et $\frac{6t}{(3-t)(3+t)}$ ≥ 0).

On en déduit que y est croissante.

4°) Tableau de variations conjoint de x et y

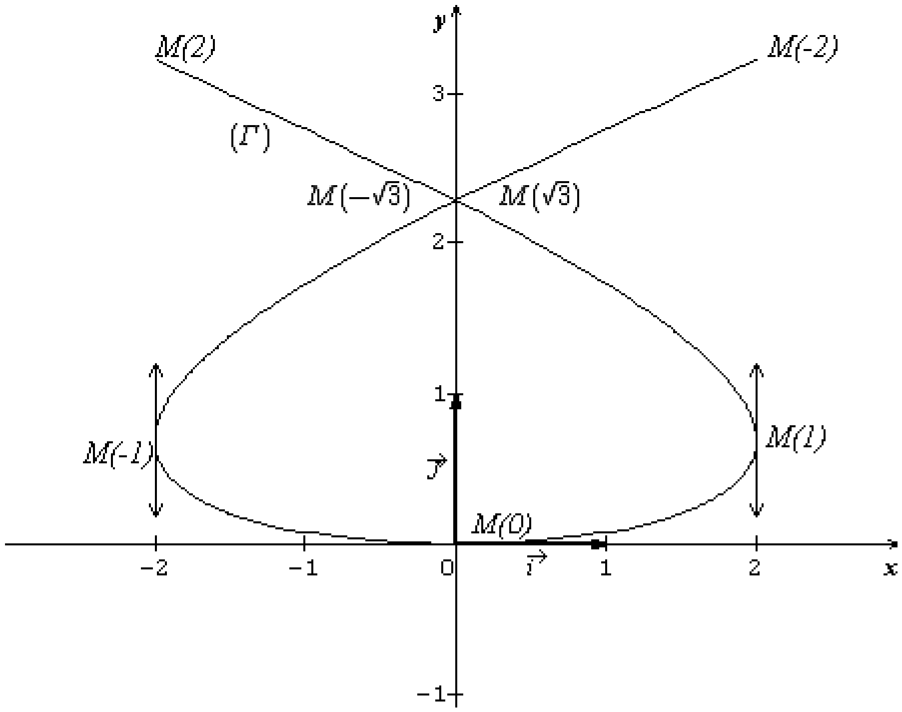
t	0		1		2
x'(t)	3	+	0	-	-9
x(t)	0	↗	2	↘	-2
y'(t)	0	+	$\frac{3}{4}$ + ln2	+	$\frac{12}{5}$ + ln5
y(t)	0	↗	ln2	↗	2ln5

5°) Points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées :

$x(t) = 0 \Leftrightarrow t(3 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \sqrt{3}$ ou $t = -\sqrt{3}$

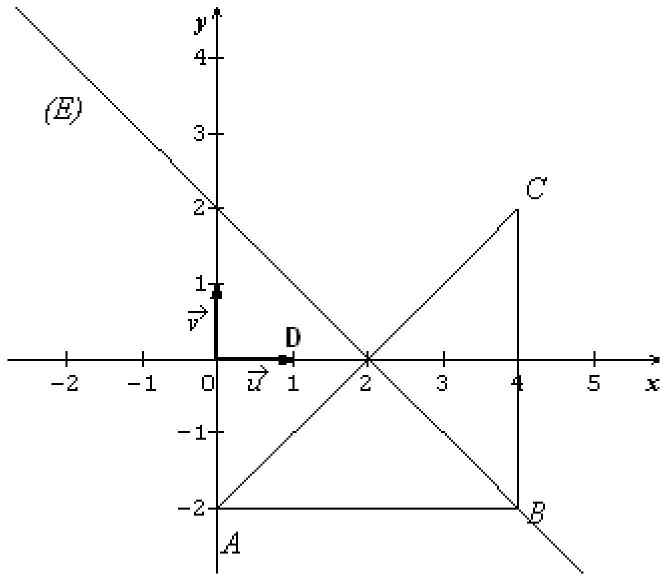
$y(0) = 0$; $y(\sqrt{3}) = y(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}\ln(2 + \sqrt{3})$

Les points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées sont les points $(0 ; 0)$ et $(0 ; \sqrt{3}\ln(2 + \sqrt{3}))$.



EXERCICE II

1°) a) Figure



b) *Calcul de* $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-4}{4i} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i}$

On en déduit que $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$ et BA = BC donc ABC est isocèle et rectangle en B.

2°) a) Calcul des affixes des points B' et C' images respectives de B et C par la transformation F.

$z_{B'} = \frac{z_B - 4 - 2i}{z_B + 2i} = \frac{4 - 2i - 4 - 2i}{4 - 2i + 2i} \quad \Leftrightarrow \quad z_{B'} = -i \quad ; \qquad \boxed{z_{C'} = \frac{z_C - 4 - 2i}{z_C + 2i} = 0}$

B' et C' sont les points d'affixes respectives $z_{B'}$ = -i et $z_{C'}$ = 0

b) Forme trigonométrique de $Z_{B'}$

$\boxed{z_{B'} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

c) détermination de l'ensemble (E) :

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z - z_C}{z - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z - z_C|}{|z - z_A|} = 1 \Leftrightarrow \frac{CM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = CM$

Donc (E) est la médiatrice de [AC].

3°) a) Pour tout z ≠ -2i ; montrons que (z'-1)(z+2i) = -4 - 4i

$\boxed{z' - 1 = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i} - 1 = \frac{-4 - 4i}{z + 2i} \text{ donc } (z'-1)(z+2i) = -4 - 4i}$.D'où le résultat.

b) Démonstration des proprietés pour M$\neq A$:

i) M$\neq A \Leftrightarrow z \neq -2i \Leftrightarrow z + 2i \neq 0$. Or (z'-1)(z+2i) = -4 - 4i d'où z'-1 = $\frac{-4-4i}{z+2i} \neq 0$ c'est à dire $z' \neq 1$. On en déduit que : $\boxed{M \neq A \Leftrightarrow M' \neq D}$.

ii) (z'-1)(z+2i) = -4 -4i ⇔ $|z' - 1| \times |z + 2i| = |z' - z_D| \times |z - z_A| = |-4 - 4i| = 4\sqrt{2}$

$\boxed{(z'-1)(z+2i) = -4 - 4i \Leftrightarrow DM' \times AM = 4\sqrt{2}}$

iii) (z'-1)(z+2i) = -4 -4i pour tout z ≠ -2i

(z'-1)(z+2i) = -4 -4i ⇔ arg(z'-1) + arg(z+2i) = arg(-4 -4i)

⇔ arg(z'-z_D) + arg(z - z_A) = arg(-4 -4i) = $\frac{5\pi}{4}[2\pi]$

$\boxed{(z'-1)(z+2i) = -4 - 4i \Leftrightarrow (\vec{u} ; \overrightarrow{DM'}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{4}[2\pi]}$

PROBLEME

PARTIE A

1°) Etude du sens de variation de g.

g est dérivable sur [0 ; +∞[et $\boxed{g'(x) = 1 - e^x}$

∀ x ∈ [0 ; +∞[; $e^x \geq e^0 = 1 \Leftrightarrow 1 - e^x \leq 0$. **g'(x) ≤ 0 donc g est décroissante sur [0 ; +∞[**

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [x(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x})] = -\infty}$ (car $\lim_{x\to+\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$)

2°) a) g'(x) < 0 sur]0 ; +∞[donc g est strictement décroissant sur [0 ; +∞[et realise une bijection de [0 ; +∞[sur] $\lim_{x\to+\infty} g(x)$; g(0)[=] -∞ ; 1]

0 ∈] -∞ ; 1] donc l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α ∈ [0 ; +∞[

De plus g(1,14)×g(1,15) < 0 (car g(1,14) = 0,02 et g(1,15) = - 0,01) ; d'où 1,14 < α < 1,15

b) Signe de g(x)

∀ x ∈[0 ; α], g(x) ≥ 0 et ∀ x ∈[α ; +∞[, g(x) ≤ 0

PARTIE B

1°) a) Etude des variations de f : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

f est dérivable sur [0 ; +∞[et ∀ x ∈[0 ; +∞[

$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x+1)^2} = \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x(2 + x - e^x)}{(xe^x+1)^2} = \frac{\mathbf{e^x g(x)}}{\mathbf{(xe^x+1)^2}}$

b) ∀ x ∈[0 ; +∞[; $\frac{e^x}{(xe^x+1)^2} > 0$ donc f '(x) est du même signe que g(x).

Donc, ∀ x ∈[0 ; α], f '(x) ≥ 0 et ∀ x ∈[α ; +∞[, f '(x) ≤ 0. Par suite f est croissante sur [0 ; α] et décroissante sur [α ; +∞[.

2°) a) montrons que $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

∀ x ∈[0 ; +∞[, $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$. Donc $\boxed{\mathbf{f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}}}$

b) Déduisons la limite de f lorsque x tend vers +∞ :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}\right) = 0$ (car $\lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$)

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f(x) = 0}}$

Interprétation graphique

La droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de +∞

3°) a) Montrons que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

D'après 2°) a) g(α) = 0 donc $e^{\alpha} = \alpha + 2$

$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha e^{\alpha} + 1} = \frac{(e^{\alpha} + 2) - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$

Donc $\boxed{\mathbf{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}}}$

b) Encadrement de f(α) :

D'après A. 2°) 1,14 < α < 1,15

1,14 < α < 1,15 ⇔ 2,14 < α + 1 < 2,15 ⇔ $\frac{1}{2{,}15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2{,}14}$ ⇔ $\boxed{\mathbf{0{,}46 < f(\alpha) < 0{,}47}}$

4°)Equation de la tengante à (C) au point d'abscisse 0 : f(0) = 0 et f '(0) = 1 donc $\boxed{\mathbf{(T) : y = x}}$

5°) a)Montrons que $f(x) = x + \frac{(x+1).u(x)}{xe^x + 1}$; avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$

Pour tout x ∈[0 ; +∞[,

$x + \frac{(x+1).u(x)}{xe^x+1} = \frac{x(xe^x+1) + (x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x+1} = \frac{x^2e^x + x + xe^x - x^2e^x - x + e^x - xe^x - 1}{xe^x+1} = \frac{e^x - 1}{xe^x+1} = f(x)$

Donc $\boxed{\mathbf{f(x) = x + \frac{(x+1).u(x)}{xe^x+1}}}$

b) u est dérivable sur [0 ; +∞[et $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

u'(x) ≤ 0 ∀ x ∈[0 ; +∞[, donc u est décroissante sur [0 ; +∞[

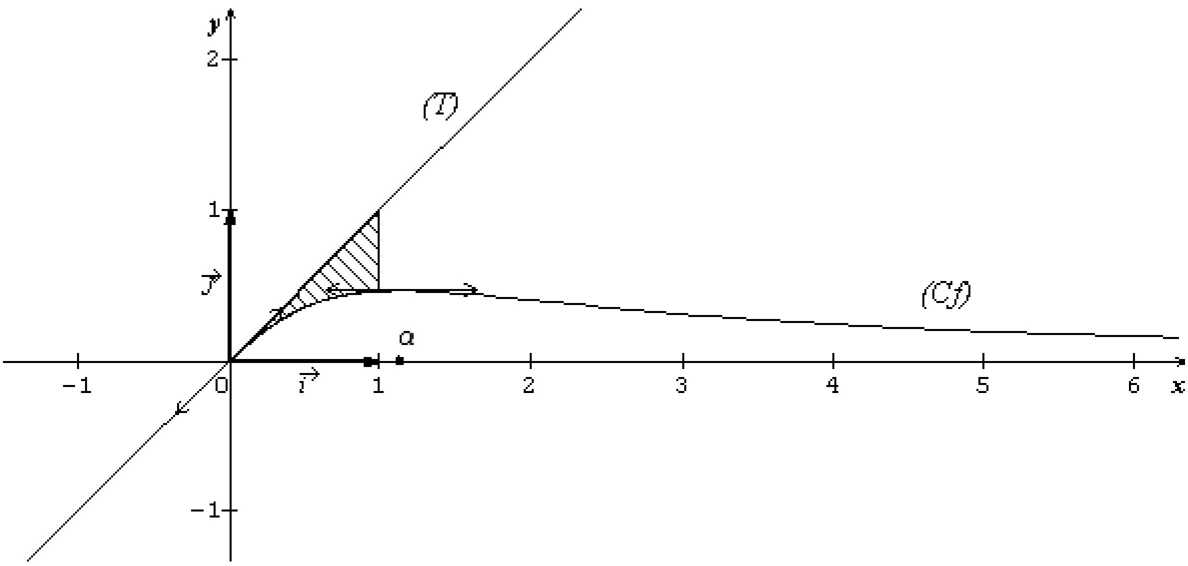
Déduction du signe de u(x)

u(0) = 0 et u est décroissante sur [0 ; +∞[donc u(x) ≤ 0 ∀ x ∈[0 ; +∞[

c) Position de (C) par rapport à (T)

∀ x ∈[0 ; +∞[, $\mathbf{f(x) - x = \frac{(x+1).u(x)}{xe^x+1} \leq 0}$ (car u(x) ≤ 0) donc (C) est en dessous de (T)

6°) Voir figure



PARTIE C

1°) Détermination d'une primitive de f : $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

Posons $\varphi(x) = x + e^{-x}$, on a : $f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ et φ strictement positive sur [0 ; +∞[donc

F : $x \longmapsto \ln(x + e^{-x})$ est une primitive de f sur [0 ; +∞[

2°) Calcul d'aire: (C) est en dessous de (T) ; donc :

$A = [\int_0^1 (x - f(x))dx] \times u.a = [\frac{1}{2}x^2 - \ln(x + e^{-x})]_0^1 \times 16\ cm^2 = [\frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1})] \times 16\ cm^2$

$A = (8 - 16\ln(1 + \frac{1}{e}))\ cm^2 \iff \boxed{A = (24 - 16\ln(1 + e))\ cm^2}$

3°) a) $V_n = \int_n^{n+1} f(x)dx = F(n+1) - F(n)$

Calcul de V_0; V_1 et V_2:

$\boxed{V_0 = \ln(1 + e^{-1})}$

$V_1 = \ln(2 + e^{-2}) - \ln(1 + e^{-1}) \iff \boxed{\mathbf{V_1} = \frac{\ln(2+e^{-2})}{\ln(1+e^{-1})}}$

$V_2 = \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2}) \iff \boxed{\mathbf{V_2} = \frac{\ln(3+e^{-3})}{\ln(2+e^{-2})}}$

b) Interprétation graphique de (V_n) :

(V_n) est l'aire en u.a du domaine plan, compris entre (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = n et x = n + 1

c) Montrons que pour tout $n \geq 2$: $f(n+1) \leq V_n \leq f(n)$

f est décroissante sur [α ; +∞[et α < 2 donc pour tout n ≥ 2 ; f est décroissante sur [n ; n+1]. Par suite $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, $\forall\ x \in [n ; n+1]$. En appliquant l'inégalité de la moyenne on obtient : $\mathbf{f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)}$ **c'est-à-dire** $\mathbf{f(n+1) \leq V_n \leq f(n)}$.

Déduisons que $\forall\ n \geq 2,\ V_{n+1} \leq V_n$:

$\forall\ n \geq 2$, $f(n+2) \leq V_{n+1} \leq f(n+1) \leq V_n \leq f(n)$ donc $\boxed{\mathbf{V_{n+1} \leq V_n}}$

d)Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n$:

On a : $\boxed{\mathbf{f(n+1) \leq V_n \leq f(n) \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(n) = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} V_n = 0}}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2009
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCIE I **(4 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), unité graphique 2 cm.
Soient les points A (-2, 1, -4) ; B(2, 3, 1) ; C(2, 2, -1) et D(-3, -1, 3).
Soient les points E, F, G et H tel que ABCDEFGH soit un parallélépipède.

1) Déterminer les coordonnées du point F.
2) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du parallélogramme ABFC et du triangle ABC en cm².
3) Calculer la distance d du point D au plan (ABC).
4) Calculer en cm³ le volume V de la pyramide de sommet D et de base ABFC.
5) Calculer le volume V' du parallélépipède ABFCDEGH.

EXERCICE II **(4 points)**

Le Tableau suivant donne le montant des prêts octroyés par une banque à des associations féminines entre 2002 et 2007.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Montant des prêts en millions de francs CFA y	4,5	5	5,2	5,8	6,3	7,1

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal.
   On prendra 1cm pour une unité en abscisse et 1cm pour un million en ordonnée.
2) Soit (Δ) la droite d'ajustement de Mayer obtenue par regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage.
   Soit G_1 le point moyen des trois premiers points et G_2 celui des trois derniers points du nuage.
   a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.
   b) Construire la droite (Δ).
   c) Déterminer une équation réduite de (Δ).
3) On suppose que l'évolution du montant des prêts faits aux associations féminines reste la même aucours des années à venir.
   A partir de quelle année le montant des prêts sera –t-il strictement supérieur au double de celui de 2009 ?

PROBLEME **(12 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité 2 cm).

PARTIE A

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi, 0[$ par $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$.

1)
   a) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi, 0[$ et que $g'(x) = -\sin x\,(2\cos x + 1)$.
   b) En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$ et que

$g^{'}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right[$

c) Dresser le tableau de variation de g.

2)

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in \left]-\pi, 0\right[$ et que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[$.

b) En déduire le signe de g sur $\left]-\pi, 0\right[$.

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie sur $\left]-\pi, +\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} & si\ x \in \left]-\pi, 0\right] \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} & si\ x > 0 \end{cases}$

On note (C_f) la courbe représentative de f.

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.
3)
   a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\pi; 0\right[$ on a : $f(x) = \frac{4\sin x \cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2}$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to -\pi} f(x) = +\infty$.
   c) En déduire les asymptotes de la courbe (C_f).
4)
   a) Calculer $f^{'}(x)$ pour tout $x \in \left]0; +\infty\right[$ et en déduire le sens de variation de f sur $\left]0; +\infty\right[$.
   b) Montrer que $f^{'}(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$ pour tout $x \in \left]-\pi; 0\right[$ et en déduire le sens de variation de f sur $\left]-\pi; 0\right[$.
   c) Dresser le tableau de variation de f sur $\left]-\pi, +\infty\right[$.
5) Construire (C_f), ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

PARTIE C

On admet que pour tout $x \in [1{,}5 ; 2]$, $0 \leq f^{'}(x) \leq \frac{1}{2}$ (e)

1) Soit h la fonction définie sur $[1{,}5 ; 2]$ par $h(x) = f(x) - x$.
   Etudier les variations de h et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5 ; 2]$.
2) Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1{,}5$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1{,}5 ; 2]$ en utilisant (e).
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.
   d) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

On donne : $h(1{,}5) = 0{,}46$; $h(2) = -0{,}007$; $\ln 10 = 2{,}30$; $\ln 2 = 0{,}69$

Année 2009
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1) Déterminons les coordonnées de F

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$ car ABFC est un parallélogramme

$$\begin{pmatrix} x_F - 2 \\ y_F - 2 \\ z_F + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_F = 6 \\ y_F = 4 \\ z_F = 4 \end{cases} \text{ et } \boxed{\boldsymbol{F(6;4;4)}}$$

2) Calculons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}}$$

Déduisons l'aire du parallélogramme ABFC et du triangle ABC en cm²

$Aire(ABFC) = 4cm^2 \times \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 36\ cm^2$

$Aire(ABC) = \frac{1}{2} \times Aire(ABFC)$ donc $\boxed{\boldsymbol{Aire(ABC) = 18cm^2}}$

3) Calcul de d

$$d = d\big(D;\ (ABC)\big) = \frac{|\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|} = \frac{|45|}{9} = 5$$

4) Calculons en cm³ le volume V de la pyramide de sommet D et de base ABFC

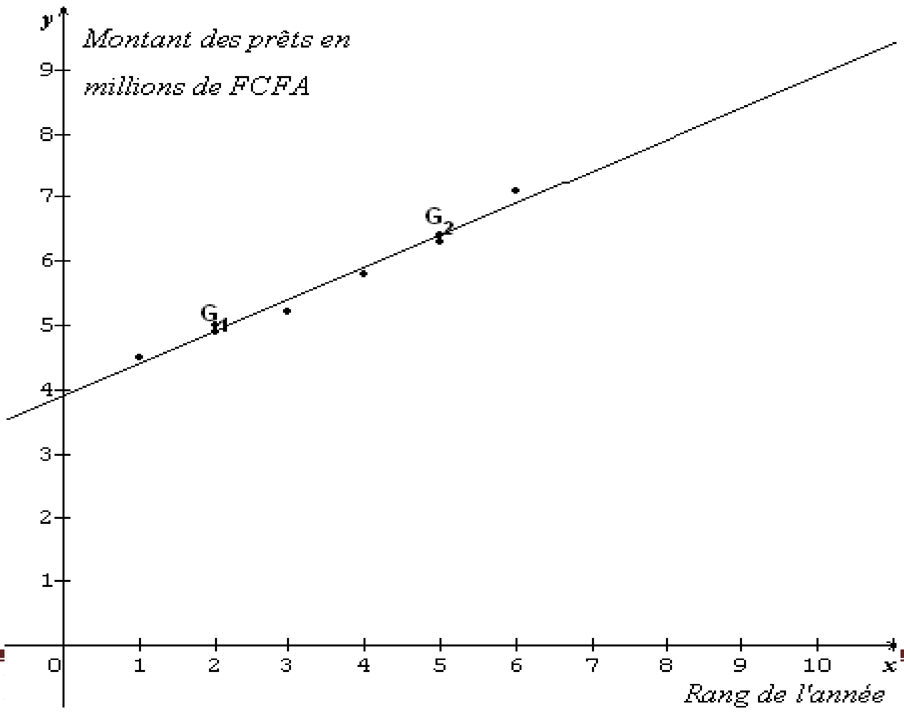
$V = uv \times \frac{1}{3} \times Aire(ABFC) \times d\ ;\ uv = 8\ cm^3 \iff \boxed{\boldsymbol{V = 120\ cm^3}}$

5) Calculons le volume V' du parallélépipède ABFCDEGH

$V' = uv \times Aire(ABFC) \times d \iff \boxed{\boldsymbol{V' = 360cm^3}}$

EXERCICE II

1) Représentons le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$



2)

a) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2

$\begin{cases} x_{G_1} = \frac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_{G_1} = \frac{4,5+5+5,2}{3} = 4,9 \end{cases} \leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{G_1(2;4,9)}}$; $\begin{cases} x_{G_2} = \frac{4+5+6}{3} = 5 \\ y_{G_1} = \frac{5,8+6,3+7,1}{3} = 6,4 \end{cases} \leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{G_2(5;6,4)}}$

b) Pour le tracer de (Δ) voir la figure

c) Equation de (Δ)

$(\Delta): y = ax + b$

$\begin{cases} 4,9 = 2a + b \\ 6,4 = 5a + b \end{cases} \leftrightarrow$ $a = 0,5$ et $b = 3,9$ et donc $\boxed{\boldsymbol{(\Delta): y = 0,5x + 3,9}}$

3) $2009 = 2001 + 8$ donc le rang de l'année 2009 est $x = 8$ et $y(8) = 7,9$

$y > 2 \times y(8) \quad \leftrightarrow \quad 0,5x + 3,9 > 15,8 \leftrightarrow \quad x > 23,8$

On peut donc prendre $x = 24$ et $2001 + 24 = 2025$

Le montant des prêts sera strictement supérieur au double de celui de 2009 à partir de 2025.

PROBLEME

PARTIE A

$g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1;\ D_g =]-\pi\,, 0[$

1)

a) Montrons que g est dérivable sur $]-\pi\,, 0[$ et que $g'(x) = -\sin x\,(2\cos x + 1)$

$x \mapsto x^2 + x - 1$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

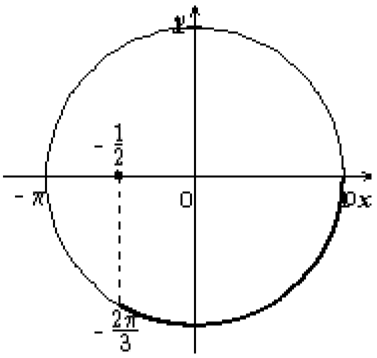
Par conséquent g est dérivable sur $]-\pi\,, 0[$ et :

$g'(x) = -2\sin x \cos x - \sin x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{g'(x) = -\sin x\,(2\cos x + 1)}}$

b) Déduction

$\forall\, x \in]-\pi\,, 0[, -\sin x > 0$; alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $2\cos x + 1$.

$2\cos x + 1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad \cos x \geq -\frac{1}{2}$



On en déduit que :

$g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\,, -\frac{2\pi}{3}\right]$ et

$g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right[$

Dressons le tableau de variation de g

Sur $\left]-\pi\,, -\frac{2\pi}{3}\right]$ g décroît et sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right[$ g croît.

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	1

2)

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]-\pi\,, 0[$

Sur $\left]-\pi\,, -\frac{2\pi}{3}\right]$, $g < 0$ car $g(x) \in \left]-\frac{5}{4}; -1\right]$

Sur $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$, g est dérivable donc continue et est strictement croissante. Alors g réalise une bijection de $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$ sur $\left[-\frac{5}{4};1\right[$. Or $0 \in \left[-\frac{5}{4};1\right[$; d'où l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\beta \in \left]-\pi\,,0\right[$ et $\beta \in \left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$.

Montrons que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[$

$$\begin{cases} g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} < 0 \\ g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \end{cases} ; g\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times g\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0 \text{ ; alors } \beta \in \left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[.$$

b) Déduisons le signe de g sur $\left]-\pi\,,0\right[$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]-\boldsymbol{\pi}\,,\boldsymbol{\beta}\right[, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < 0$ **et** $\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]\,\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{0}\right[, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) > 0$.

PARTIE B

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x}+\frac{1}{2} & si\ x \in \left]-\pi\,,0\right] \\ f(x) = 2-\frac{3}{e^{3x}+1} & si\ x > 0 \end{cases}$$

$D_f = \left]-\pi\,,+\infty\right[$

1) Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{3}{e^{3x}+1}\right) = 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)} \textbf{ ; alors } \boldsymbol{f} \textbf{ est continue en 0.}$$

2) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin(2x)}{x(1+\cos x)} = 4\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{\cos x}{1+\cos x} = 2 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\cos x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{e^{3x}+1}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3e^{3x}-3}{2x(e^{3x}+1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{2}\times\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{e^{3x}+1} = \frac{9}{4}$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{3x}-1}{3x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{3x} = 1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}} \textbf{ ; alors } \boldsymbol{f} \textbf{ n'est pas dérivable en 0.}$$

Interprétation graphique du résultat

Au point de coordonnées $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(C_f\right)$ admet deux demi-tangentes d'équations :

$(T_1): y = 2x+\frac{1}{2}$ à gauche et $(T_2): y = \frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$ à droite

Le point $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est donc un point anguleux pour $\left(C_f\right)$.

3)

a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2-\frac{3}{e^{3x}+1} = 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2}} \text{ car } \lim_{x\to +\infty} e^{3x} = +\infty$$

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[$ on a : $f(x) = \frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2}$

Pour tout $x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[$; $f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} = \frac{4\cos x \sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} + \frac{1}{2}$

Donc pour tout $x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[$ on a : $\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2}}}$

Déduisons $\lim\limits_{x\to -\pi} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi} \frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to -\pi} \frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} =$

$\lim\limits_{x\to -\pi} \frac{4\cos x(1-\cos x)}{\sin x} + \frac{1}{2} = \frac{-8}{0^-} + \frac{1}{2} = +\infty$

$\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\pi} f(x) = +\infty}}$

c) Déduisons les asymptotes de la courbe (C_f)

(C_f) admet deux asymptotes : une horizontale d'équation $y = 2$ et une verticale d'équation $x = -\pi$.

4)

a) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$

Pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$; $\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}}}$

Déduisons le sens de variation de f sur $]0\,;\ +\infty[$

Pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$; $(e^{3x}+1)^2 > 0$ et $9e^{3x} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,;\ +\infty[$.

b) Montrons que $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$ pour tout $x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[$

Pour tout $x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[$;

$$f'(x) = \frac{4\cos 2x(1+\cos x)+\sin x(2\sin 2x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{4(2\cos^2 x-1)(1+\cos x)+4(1-\cos^2 x)\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{4(\cos^3 x+2\cos^2 x-1)}{(1+\cos x)^2} = \frac{4(1+\cos x)(\cos^2 x+\cos x-1)}{(1+\cos x)^2}.$$

D'où $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$ pour tout $x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[$ car $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$

Déduisons le sens de variation le sens de variation de f sur $\left]-\pi\,;\ 0\right[$.

Pour tout $x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[$; $1+\cos x > 0$ et $4 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$.

D'après la partieA, $\forall\, x \in \left]-\pi\,,\beta\right[, f'(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\,\beta; 0[, f'(x) > 0$.

On en déduit que :

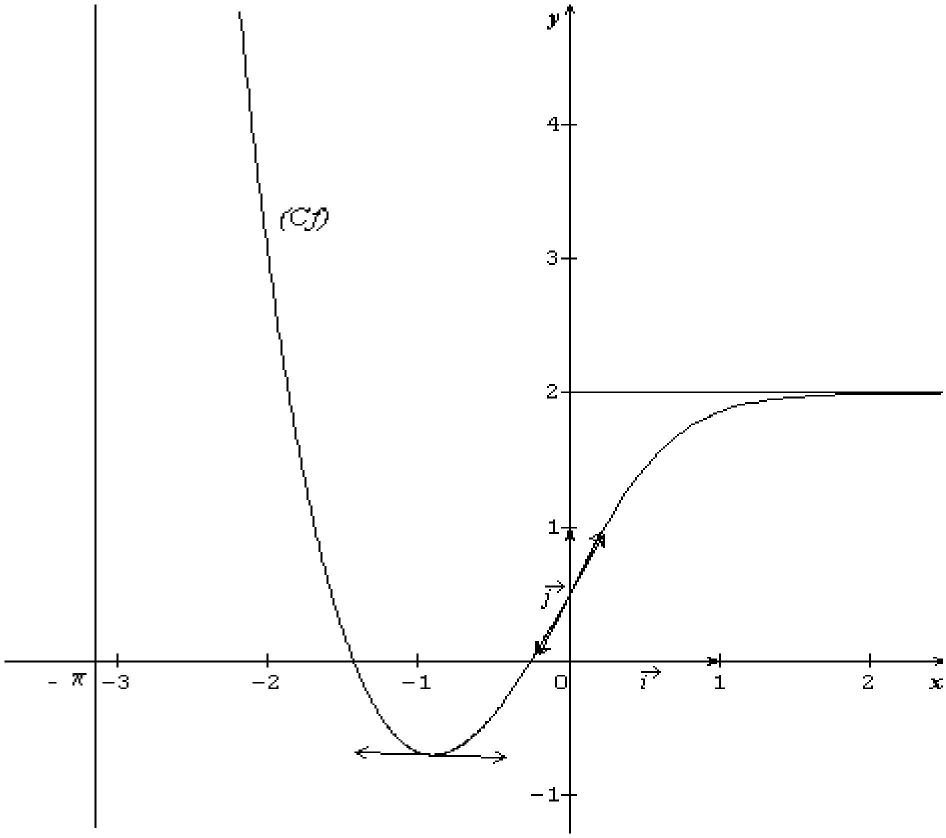
sur $\left]-\pi\,,\beta\right[$, f est strictement décroissante et

sur $]\,\beta; 0[$, f est strictement croissante.

c) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\pi$		β		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	2 || $\frac{9}{4}$	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$f(\beta)$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	2

5) Construisons (C_f) , ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0



PARTIE C

On admet que pour tout $x \in [1{,}5\,;2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (e)

1) $h(x) = f(x) - x$; $D_h = [1{,}5\,;2]$
Etudions les variations de h

Pour tout $x \in [1{,}5\,;2]$; $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

On en déduit que h est strictement décroissante sur $[1{,}5\,;2]$.

x	1,5	2
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	0,46	$-0{,}007$

Déduisons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\,;2]$.

Sur $[1{,}5\,;2]$, h est dérivable donc continue et est strictement décroissante telle que $h(1{,}5) \times h(2) < 0$; alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\,;2]$. On en déduit que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\,;2]$ car l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $f(x) = x$.

2) $U_0 = 1{,}5$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1{,}5\,;2]$ en utilisant (e).

$U_0 = 1{,}5 \in [1{,}5\,;2]$

Supposons que $U_n \in [1{,}5\,;2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et appliquons l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle de bornes $(U_n\,;2)$. On obtient :

$0 \leq f(2) - f(U_n) \leq \frac{1}{2}(2 - U_n)$

$\frac{1}{2}U_n + f(2) - 1 \quad \leq f(U_n) \leq f(2)$

$\frac{1}{2}U_n + 0{,}993 \quad \leq f(U_n) \leq 1{,}993$

$\frac{1}{2} \times 1{,}5 + 0{,}993 \leq \frac{1}{2}U_n + 0{,}993 \quad \leq f(U_n) \leq 1{,}993$ car $U_n \leq 1{,}5$.

$1{,}5 \leq 1{,}743 \leq f(U_n) \leq 1{,}993 \leq 2$.

Or $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$ d'où $1{,}5 \leq U_{n+1} \leq 2$ si $U_n \in [1{,}5\,;2]$

En conclusion pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n} \in [\mathbf{1{,}5}\,;\mathbf{2}]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

Pour tout $x \in [1{,}5\,;2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \leftrightarrow \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$

L'inégalité des accroissements finis sur $(U_{n-1}\,;\alpha)$donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$|f(U_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$. Or $f(U_{n-1}) = U_n$ et $f(\alpha) = \alpha$

Donc pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\boldsymbol{U_{n-1}} - \boldsymbol{\alpha}|$

Montrons que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Réécrivons l'inégalité précédente pour $n = 1, 2, \cdots, n$. On obtient :

$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0 - \alpha|$

$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1 - \alpha|$

$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2 - \alpha|$

$\vdots$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

Le produit membres à membres de ces n inégalités donne après simplification :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$1{,}5 \leq \alpha \leq 2 \leftrightarrow -2 \leq -\alpha \leq -1{,}5 \leftrightarrow -0{,}5 \leq U_0 - \alpha \leq 0 \leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

On a donc $|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{U_0} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n+1}}$

c) Déduisons que la suite (U_n) est convergente

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Alors la suite $(\boldsymbol{U_n})$ converge vers 0.

d) Déterminer l'entier naturel n_0

$\left|U_{n_0} - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1}$ donc on aura $\left|U_{n_0} - \alpha\right| \leq 10^{-3}$ si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1} \leq 10^{-3}$

$(n_0 + 1)\ln 2 \geq 3\ln 10 \Leftrightarrow n_0 \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1 \leftrightarrow n_0 \geq 9$ et $\boxed{\boldsymbol{n_0} = \mathbf{9}}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2008
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(*Les calculatrices ne sont pas autorisées*)

EXERCICE I **(4 points)**

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité graphique : 2cm, la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = e^{\sin t} \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad t \in IR$$

1) Montrer que les fonctions numériques x et y de la variable réelle t , sont périodiques de période 2π.

2) a) Comparer les points M(t) et M(π-t) où M est un point de (Γ).

b) Montrer que pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $(\pi\text{-}t) \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3) Etudier et dresser le tableau de variations conjoint des fonctions x et y pour tout t appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

4) Tracer la courbe (Γ).

On donne e = 2,72 ; $e^{-1} = 0{,}37$.

EXERCICE II **(4 points)**

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ ayant comme unité graphique 1cm.

On note A et B les points d'affixes respectives : i et -4 – 2i .

Soit Z un nombre complexe différent de i , on pose : $Z' = i\,\frac{Z+4+2i}{Z-i}$.

1) Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de Z'.

2) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M plan complexe (P) d'affixe Z tel que Z' est un nombre réel.

3) On pose $Z_1 = Z - i$ et $Z_1' = Z - i$.

Montrer que $Z_1 Z_1' = -3 + 4i$ .Calculer $|Z_1 Z_1'|$.

4) a) Prouver que si M appartient au cercle (C) de centre A d'affixe i et de rayon r , r > 0 , alors M' appartient à un cercle (C') de centre A .

b) Déterminer r pour que (C) = (C') .

PROBLEME **(12 points)**

On considère la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-3} & si\ x \leq 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormal $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$;
unité graphique : 2cm.

PARTIE A

1) a) Etudier la continuité de f en 2 ;

b) Etudier la dérivabilité de f en 2 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) a) Montrer que la droite (D_1) d'équation : y = x + 2 est une asymptote à (C) en $-\infty$.

Préciser la position relative de (C) et de (D_1).

b) Montrer que la droite (D_2) d'équation : $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Préciser la position relative de (C) et de (D_2).

4) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty\,; 2]$ et sur $]2\,; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

5) Tracer (D_1) ; (D_2) et (C).

6) a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,; 1]$.Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty\,; 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe (Γ) de h^{-1} dans un même repère que (C).

PARTIEB

1) Calculer en cm², l'aire A du domaine plan limité par (C) , (D_1) et les droites d'équations : x = -3 et x = 0.

2) Soit (Δ) le domaine plan défini par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Calculer en cm^3, le volume V du solide S engendrer par la rotation complète du domaine (Δ) autour de l'axe des abscisses.

(On pourra remarquer que $\frac{8x+16}{x-3} = 8 + \frac{40}{x-3}$).

PARTIE C

Soit (Γ) la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = t+3 \\ y(t) = \sqrt{t^2+3t+2} \end{cases} ,\ t > -1.$$

Montrer que (Γ) est une partie de (C).

Année 2008
1^er^ tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1°) Montrons que les fonctions numériques x et y sont périodiques.

$$(\Gamma)\ \begin{cases} x(t) = e^{\sin t} \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad t \in IR$$

Les fonctions t $\longmapsto$ sin $t$et t $\longmapsto$ cos t sont périodiques de période 2π. Par suite
x(t+2 π) = x(t) et y(t+2 π) = y(t). D'où x et y sont périodiques de période 2 π.

2°) a) Comparaison de M(t) et M(π-t)

x(π-t) = $e^{\sin(\pi-t)}$ = $e^{\sin t}$ = x(t) et y(π-t) = $\cos(\pi - t)$ = - y(t) $\Longrightarrow$ les points M(t) et M(π-t) sont symétriques par rapport à l'axe (ox)

b) Montrons que pour tout t ∈ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$], (π-t) ∈[$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$]

Pour tout t ∈ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$], on a : -$\frac{\pi}{2}$≤- t≤ $\frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow\pi$ - $\frac{\pi}{2}$≤ π-t ≤ π + $\frac{\pi}{2}$

D'où (π-t) ∈ [$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$]

Il suffit donc d'étudier la courbe sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] puis par symétrie par rapport à l'axe (ox), on obtient la courbe sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$] d'amplitude 2 π

3°) Variations et tableau de variations

$$\begin{cases} x(t) = e^{\sin t} \\ y(t) = \cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'(t) = \cos t\, e^{\sin t} \\ y'(t) = -\sin t \end{cases}$$

Pour tout réel t , $e^{\sin t} > 0$; le signe de x'(t) dépend de celui de cos t sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent :

Pour t ∈ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$], x'(t)≥ 0.On en déduit que x est croissante sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$].

On sait que sin t est négative sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ et positive sur$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent :

Pour t ∈ [-$\frac{\pi}{2}$;0], y'(t) ≥ 0

Pour t ∈ [0 ; $\frac{\pi}{2}$], y'(t) ≤ 0 .

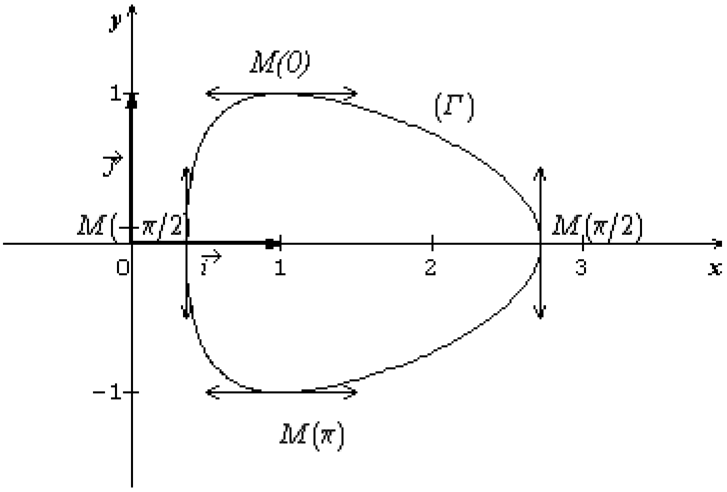
On en déduit que y est croissante sur [-$\frac{\pi}{2}$;0] et décroissante sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$].

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
x'(t)	0	+	1	+	0
x(t)	e^{-1}	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e
y'(t)	1	+	0	-	-1
y(t)	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4°) Représentation graphique

Equations des tangentes

$\boxed{\left(T_{-\frac{\pi}{2}}\right) : y = e^{-1}}$; $\boxed{(T_0) : y = 1}$; $\boxed{\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) : y = e}$



EXERCICE II

1°) Interprétation géométrique

$Z' = i\,\frac{Z+4+2i}{Z-i} = i\,\frac{Z-(-4-2i)}{Z-i} = i\,\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}$

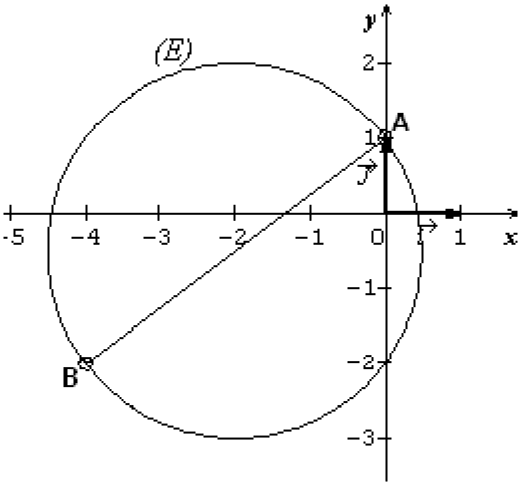
$\arg(Z') = \arg\left(i\,\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}\right) = \arg(i) + \arg\left(\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}\right) \Leftrightarrow \boxed{\arg(Z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB})}$

$|Z'| = \left|i\,\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}\right| = |i| \times \left|\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}\right| = \left|\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}\right| \Leftrightarrow \boxed{|Z'| = \frac{MB}{MA}}$

2°) Détermination de l'ensemble E

Z' réel $\Longrightarrow \arg(Z') = k\pi$ avec ($k \in \mathbb{Z}$). D'où $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

L'ensemble E est l'ensemble des points du cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.



3°) Montrons que $Z_1Z'_1 = -3 + 4i$

$Z_1Z'_1 = (Z - i)\left(\frac{iZ-2+4i}{Z-i} - i\right) = iZ - 2 + 4i - iZ + i^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow \boxed{Z_1Z'_1 = -3 + 4i}$

Calcul de $|Z_1Z'_1|$

$|Z_1Z'_1| = |-3+4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$; donc $\boxed{|Z_1Z'_1| = 5}$.

4°) a) Montrons que si M ∈ (C) alors M' ∈ (C')

M ∈ (C) ⇔ AM = r

Or $|Z_1Z'_1| = 5 \Leftrightarrow |Z - i| \times |Z' - i| = 5 \Leftrightarrow$ $AM \times AM' = 5$ d'où

$r \times AM' = 5 \Leftrightarrow$ $\boxed{\textbf{AM'} = \frac{5}{r} = r', \textbf{ donc M'} \in \textbf{(C')}}$

b) Détermination de r pour que (C) = (C')

$\boxed{\textbf{(C) = (C')} \Leftrightarrow r = r' \Leftrightarrow r = \frac{5}{r} \Leftrightarrow r^2 = 5 \Leftrightarrow r = r' = \sqrt{5}, \textbf{ car } r > 0}$

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x + 2 + \frac{4}{x-3} \text{ si } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 3x + 2} \text{ si } x > 2 \end{cases}$

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$, unité : 2cm

I- 1°) a) Etude de la continuité de f en 2

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x + 2 + \frac{4}{x-3}) = 0$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$;

$f(2) = 2 + 2 + \frac{4}{2-3} = 0$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)}$**. f est donc continue en 2**

b) Etude de la dérivabilité de f en 2

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+2+\frac{4}{x-3}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x-3)} = \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-3} = -3 = f_g'(2)}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = +\infty$. (car x-2>0)

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 2

(C) admet à gauche du point d'abscisse 2 une demi-tangente de coefficient directeur -3 et à droite une demi-tangente verticale ; le point (2 ; 0) est un point anguleux de (C) .

2°) Calcul des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (x + 2 + \frac{4}{x-3}) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to -\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4}{x-3} = 0$)

$\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-3x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$)

$\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}}$

3°) a) Montrons que (D_1) : y = x + 2 est asymptote à (C) en $-\infty$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4}{x-3} = 0}$**. D'où le résultat.**

<u>Position de (C) par rapport à (D_1)</u> :

Si $x \leq 2$, $x-3 < 0$ et $\frac{4}{x-3} < 0$. (C) est en dessous de (D_1) .

b) Montrons que (D_2) : y = x - $\frac{3}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)-(x - \frac{3}{2})] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x^2-3x+2)-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2-3x+2} + x - \frac{3}{2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-1}{4\sqrt{x^2-3x+2} + 4x-6} = 0$

(D_2) est donc asymptote à(C) en $+\infty$.

<u>Position de (C) par rapport à (D_2)</u> :

Si x > 2, 4x - 6>0 donc $\frac{-1}{4\sqrt{x^2-3x+2}+4x-6} < 0$. (C) est en dessous de (D_2)

4°) a) Etude des variations de f sur $]-\infty ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$

Si $x \leq 2$, $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2 - 4}{(x-3)^2} = \frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$. f '(x) a le signe de $(x-5)(x-1)$ car $(x-3)^2 > 0$. par conséquent sur $]-\infty; 2]$ on a :

Pour $x \in]-\infty ; 1[$, f '(x)>0

Pour $x \in]1 ; 2]$, $f'(x)<0$ et $f'(1) = 0$

On en déduit que : **f est croissante sur]-∞ ; 1[, décroissante sur]1 ; 2] et passe par un maximum en 1**

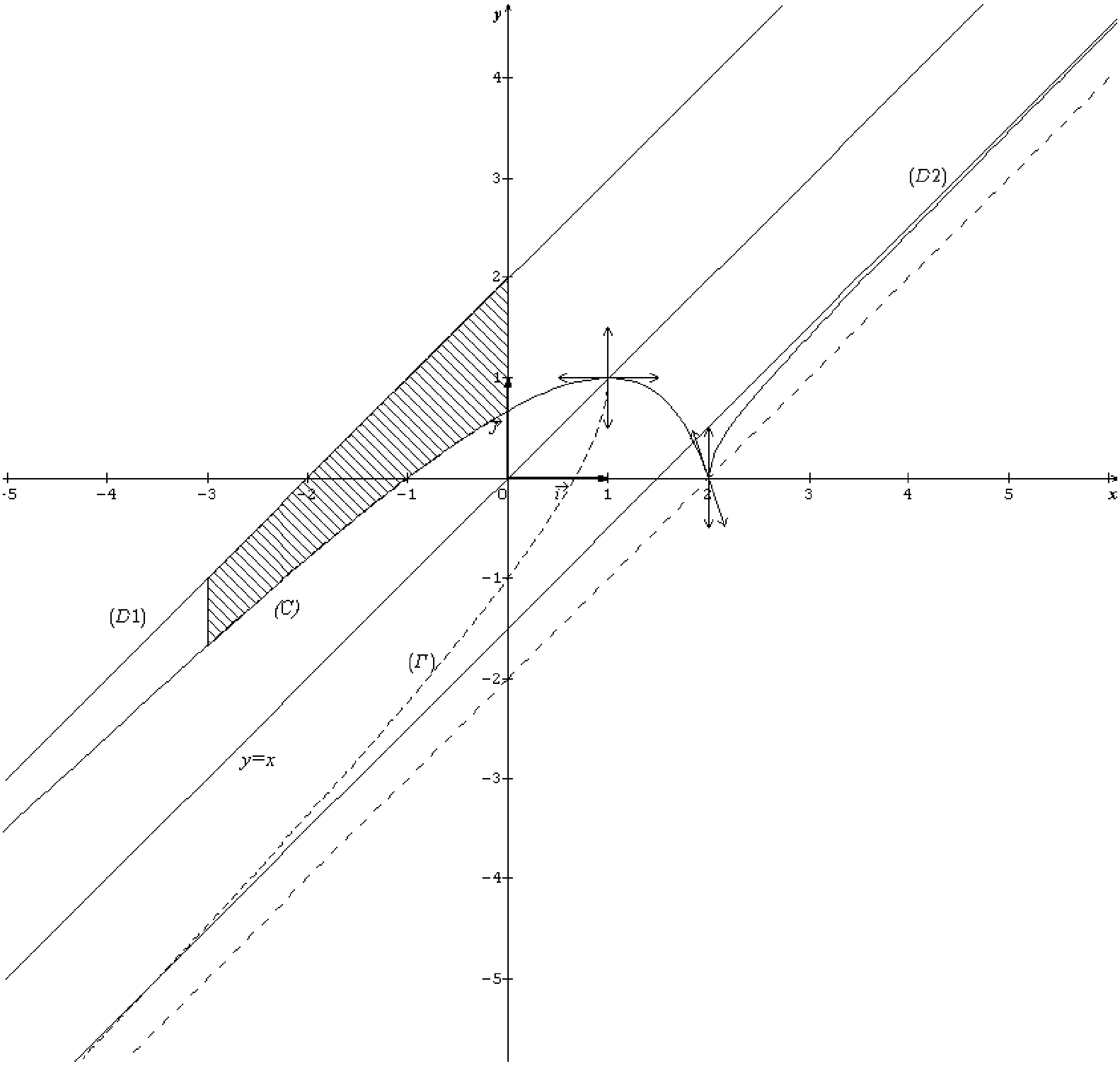
Si $x > 2$, $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$. **f '(x) est du même signe que 2x – 3. Par conséquent :**

Pour tout x de]2 ; +∞[; f '(x) > 0. On en déduit que f est croissante sur]2 ; +∞[.

b) Tableau de variation de f

x	-∞		1		2		+∞
f '(x)		+	0		-3 ‖ +∞	+	
f(x)	-∞	↗	1	↘	0	↗	+∞

5°) Traçons (D_1), (D_2) et (C)



6°) a) h est la restriction de f à]-∞ ; 1]. Montrons que h réalise une bijection de

]-∞ ; 1]sur un intervalle J que l'on précisera.

h est continue, strictement croissante de]-∞ ; 1] sur]-∞ ; 1]. h réalise donc une bijection de]-∞ ; 1] sur J =]-∞ ; 1]

b) Explication de la construction de (Γ)

(Γ) est le symétrique de la branche de (C) correspondant à x ∈]-∞ ; 1] par rapport à la droite (D) : y = x.

II) 1°) Calcul en cm^2 de l'aire A du domaine plan limité par (C), (D_1) et les droites d'équations x = -3 et x = 0

Si x ∈]-∞ ; 0], (D_1) est au dessus de (C) : $A = \int_{-3}^{0}[(x+2)-f(x)]dx.\,UA$;

UA = $4cm^2$

$\int_{-3}^{0}(x+2-f(x))dx = \int_{-3}^{0} -\frac{4}{x-3}\,dx = [-4\ln|x-3|]_{-3}^{0}$

= -4ln3 + 4ln6 = -4ln3 + 4ln(3× 2)=4ln3 + 4ln3 + 4ln2 = 4ln2

Donc $\boxed{A = (16\ln 2)\ cm^2}$

2°) (Δ) : $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

Calculons-en cm^3 le volume du solide engendré par la rotation complète de (Δ) autour de l'axe des abscisses

$V = \pi\int_{-1}^{2}[f(x)]^2dx.\,UV$ $[f(x)]^2 = (x+2)^2 + \frac{8(x+2)}{x-3} + \frac{16}{(x-3)^2}$. Alors

$[f(x)]^2 = x^2 + 4x + 4 + 8 + \frac{40}{x-3} + \frac{16}{(x-3)^2} = x^2 + 4x + 12 + \frac{40}{x-3} + \frac{16}{(x-3)^2}$

$\int_{-1}^{2}[f(x)]^2dx = [\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 12x + 40\ln|x-3| - \frac{16}{x-3}]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 48 - (-\frac{1}{3} - 6 + 80\ln 2) = 57 - 80\ln 2$

UV = $8cm^3$ on a donc $\boxed{V = 8\pi(57 - 80\ln 2)\ cm^3}$

III)

Soit (Γ): $\begin{cases} x(t) = t+3 \\ y(t) = \sqrt{t^2-3t+2} \end{cases}$, t > -1

Montrons que (Γ) est une partie de (C)

t+3 = x ⇔ t = x-3. Alors $t^2 - 3t + 2 = (x-3)^2 - 3(x-3) + 2 = x^2-6x+9+3x-9+2$

$t^2 - 3t + 2 = x^2 - 3x + 2$. De plus t > -1 ⇔ t+3 > 2

On a donc : $\boxed{(\Gamma) : y = \sqrt{x^2-3x+2},\ x > 2}$

(Γ) est la partie de (C) correspondant à x > 2.

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2008
Session Normale
Epreuve du 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I **(4 points)**

Un sac contient six boules numérotées de 0 à 5. On extrait simultanément deux boules , qui portent respectivement les numéros x et y. A chaque tirage, on associe la variable aléatoire X définie de la façon suivante :

- si x et y sont pairs, X prend la valeur $\frac{x+y}{2}$.
- si x et y sont impairs, X prend la valeur $\frac{|x-y|}{2}$.
- si x et y sont de parité différentes on attribue à X la valeur 0 (zéro). (On rappelle que 0 est pair).

1)
   a) Déterminer les valeurs prises par X.
   b) Etablir la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique de X.
3) On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement sept fois x et y de mùeme parité. (On exprimera le résultat sous forme de puissances de 2, 3 et 5).

EXERCICE II **(4 points)**

Un bloc de métal est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°.
La température θ est une fonction du temps t (en heures) qui vérifie l'équation différentielle (E): $\theta'(t) = k\big(1000 - \theta(t)\big)$, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.
   Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y.
2) Résoudre (F) , puis (E).
3) Le bloc initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de 160°C au bout d'une heure.
   En déduire l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
4)
   a) Calculer la température du bloc au temp $t = 3$.
   b) Déterminer le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.

On donne $\left(\frac{7}{8}\right)^3 \simeq 0{,}7$; $\ln\frac{7}{8} \simeq -0{,}13$; $\ln\frac{25}{48} \simeq -0{,}65$.

PROBLEME **(12 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} & si \ \ x \leq 0 \\ f(x) = x - x\ln x & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) ; unité 2cm.

PARTIE A

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0. (On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$) et interpéter graphiquement le résultat.
3)
a) Etudier les variations de f.
b) Dresser le tableau de variations de f.
4) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ · interpréter graphiquement les résultats obtenus et tracer (C).
5)
a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$. Montrer que h réalise une bijection de $[1\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Construire la courbe (Γ) de h^{-1} dans le même repère que (C).

PARTIE B

Soit α un réel tel que $0 \leq \alpha \leq e$. On pose : $I(\alpha) = \int_\alpha^e f(x)\,dx$.

1)
a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_\alpha^e x \ln x \, dx$.
b) En déduire $I(\alpha)$.
2)
a) Donner une interprétation graphique de $I(\alpha)$.
b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.
3) En déduire en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), les axes du repère et la droite d'équation : $x = e$.
4) Soit (E) l'ensemble des points $M(x\,,y)$ tels que : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

   Calculer en cm³ le volume du solide engendré par la rotation complète de (E) autour de l'axe des abscisses.

PARTIE C

Dans le plan rapporté à un plan orthonormal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) , on considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2 t - 1}{\cos t} \end{cases} \quad \text{avec } t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

1) Montrer que (Γ)est une partie de (C).
2) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$.

Année 2008
2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

On extrait simultanément deux boules.

Les résultats possibles sont :

	0	1	2	3	4	5
0						
1	$(1,0)_0$					
2	$(2,0)_1$	$(2,1)_0$				
3	$(3,0)_0$	$(3,1)_1$	$(3,2)_0$			
4	$(4,0)_2$	$(4,1)_0$	$(4,2)_3$	$(4,3)_0$		
5	$(5,0)_0$	$(5,1)_2$	$(5,2)_0$	$(5,3)_1$	$(5,4)_0$	

1)

a) Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3.

b) La loi de probabilité de X

$X = x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2) Espérance mathématique de X

$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{2}{3}}}$

3) Lorsqu'on extrait simultané deux boules, la probabilité d'obtenir x et y de même parité est $p = 1 - P(X = 0) = \frac{2}{5}\cdot$

En répétant dix fois de suite cette épreuve avec remise, la probabilité d'obtenir exactement sept fois x et y de même parité est :

$p(7) = C_{10}^{7}\left(\frac{2}{5}\right)^7\left(\frac{3}{5}\right)^3 = 120 \times \frac{2^7 \times 3^3}{5^{10}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{p(7) = \frac{2^{10} \times 3^4}{5^9}}}$

EXERCICE II

$(E): \theta'(t) = k\big(1000 - \theta(t)\big), k \in \mathbb{R}_+^*$

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$. Ecrivons une équation différentielle (F) satisfaite par y

$\theta(t) = 1000 + y(t) \leftrightarrow \quad \theta'(t) = y'(t)$

$\theta'(t) = k\big(1000 - \theta(t)\big) \leftrightarrow \quad y'(t) = k\big(1000 - 1000 - y(t)\big)$

$\boxed{\boldsymbol{(F): y'(t) = -ky(t)}}$

2) Résolvons (F) puis (E)

$(F): y'(t) = -ky(t)$

$y(t) = C.e^{-kt}, C \in \mathbb{R}$

Or $\theta(t) = 1000 + y(t)$, donc $\boxed{\boldsymbol{\theta(t) = 1000 + C.e^{-kt}, C \in \mathbb{R}}}$

3) $\theta(0) = 40$ et $\theta(1) = 160$. Déduisons l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.

$\theta(0) = 40 \quad \leftrightarrow 1000 + C = 40$. Donc $C = -960$ et $\theta(t) = 1000 - 960e^{-kt}$

$\theta(1) = 160 \leftrightarrow \ 1000 - 960e^{-k} = 160$

$e^{-k} = \frac{7}{8}$ · Donc $k = -\ln\frac{7}{8}$ et $\theta(t) = 1000 - 960e^{t\ln\frac{7}{8}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\theta(t) = 1000 - 960 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{t}}}$

4)

a) Calculons la température du bloc au temps $t = 3$.

$\theta(3) = 1000 - 960 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{3}$

$\theta(3) = 328$

La température du bloc au temps $\boldsymbol{t = 3}$ heures est 328°C

b) Déterminons le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C

$\theta(T) \geq 500 \leftrightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^{T} \leq \frac{25}{48} \leftrightarrow T\ln\frac{7}{8} \leq \ln\frac{25}{48} \leftrightarrow T \geq \frac{\ln\frac{25}{48}}{\ln\frac{7}{8}} = 5$

Le temps à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C est $\boldsymbol{T = 5}$ h.

<u>PROBLEME</u>

$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{x}} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x - x\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$; $D_f = \mathbb{R}$

<u>PARTIE A</u>

1) Etudions la continuité de f en 0

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{e^{x}} = 0 = f(0)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - x\ln x = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$ **, alors $\boldsymbol{f}$ est continue en 0.**

2) Etudions la dérivabilité en 0

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{xe^{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{2}{e^{x}} = 2$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 1 - \ln x = +\infty$ car $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

<u>Interprétation graphique du résultat</u>

(C) admet au point de coordonnées (0;0) deux demi-tangentes : une demi-tangente à gauche d'équation $y = 2x$ et une demi-tangente verticale à droite. Le point (0;0) est donc un point anguleux pour (C).

3)

a) Etudions les variations de f

$\begin{cases} f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{x}} & si\ x < 0 \\ f'(x) = -\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

$\forall\, x < 0$, $e^{x} > 0$ et $e^{2x} + 1 > 0$. D'où $f'(x) > 0, \forall\, x < 0$.

$\forall\, x > 0, -\ln x > 0 \leftrightarrow x < 1$. D'où $\forall\, x \in]0;1[, f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in]1;+\infty[, f'(x) < 0$.

On en déduit que :

sur $]-\infty;\boldsymbol{1}[$, $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante et sur $]\boldsymbol{1};+\infty[$, $\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante.

$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty}}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

b) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$2 \| \| +\infty$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) Calculons $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

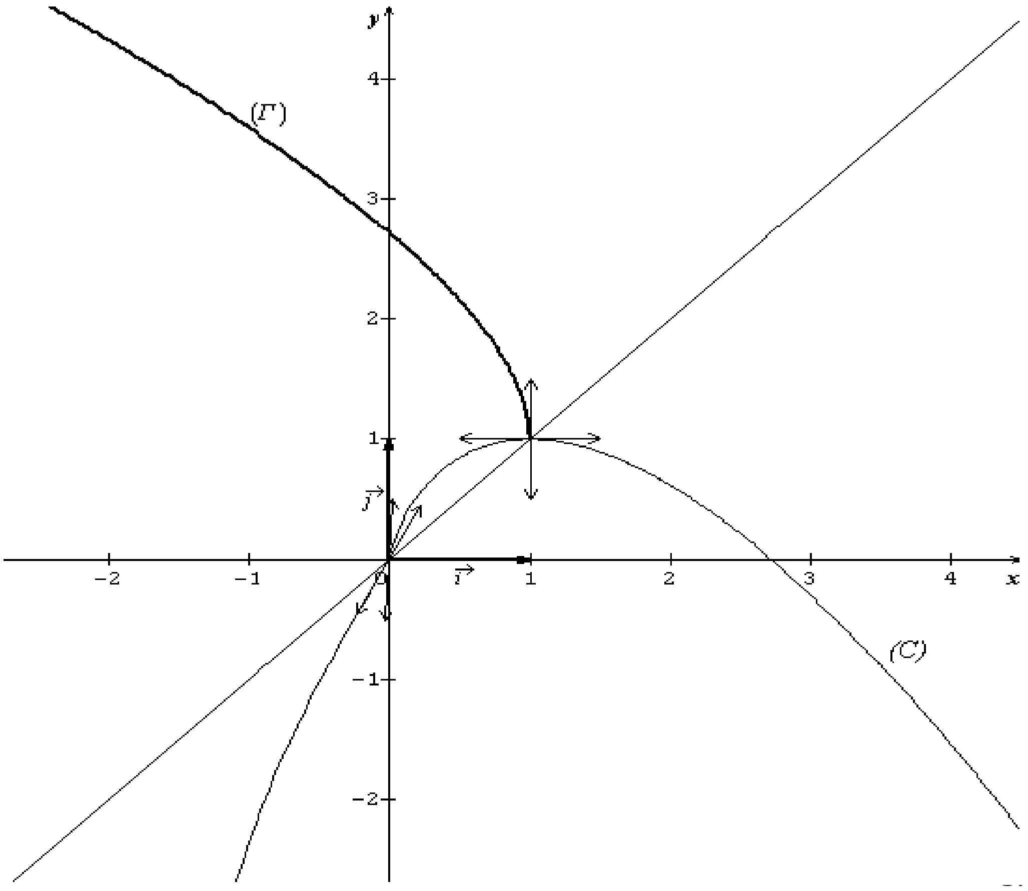
$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{xe^x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^- \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

<u>Interprétation graphique du résultat</u>

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

Tracer de (C):



a) $h(x) = f(x)$; $D_h = [1; +\infty[$

Sur $[1; +\infty[$, h est dérivable donc continue et est strictement décroissante.

h réalise donc une bijection de $[1;\ +\infty[$ sur $J =]-\infty; 1]$.

b) Sur $[1;\ +\infty[$, (Γ) et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. (voir le graphique.)

PARTIE B

Soit α un réel tel $0 < \alpha \leq e$. $I(\alpha) = \int_\alpha^e f(x)dx$

1)

a) Calculer $\int_\alpha^e x \ln x\, dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v(x) = x \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$\int_\alpha^e x \ln x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_\alpha^e - \int_\alpha^e \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_\alpha^e$

$\boxed{\int_\alpha^e x \ln x\, dx = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha + \frac{1}{4}\alpha^2}$

b) Déduisons $I(\alpha)$

$I(\alpha) = \int_\alpha^e f(x)dx = \int_\alpha^e (x - x \ln x)dx = \int_\alpha^e x dx - \int_\alpha^e x \ln x\, dx$

$\boxed{I(\alpha) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha - \frac{3}{4}\alpha^2}$

2)

a) Interprétons graphiquement $I(\alpha)$

$I(\alpha)$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$.

b) $\boxed{\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = \frac{1}{4}e^2}$ car $\lim_{\alpha \to 0} \alpha^2 \ln \alpha = 0$.

3) Déduisons l'aire en cm²

$A = 4cm^2 \times \lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{A = e^2 cm^2}$

4) Calcul en cm³ du volume

$V = uv \times \pi \int_{-1}^{0} f^2(x)dx = 8\pi \int_{-1}^{0} (e^x - e^{-x})^2 dx = 8\pi \int_{-1}^{0} (e^{2x} - 2 + e^{-2x})^2 dx$

$V = 8\pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{0} \Leftrightarrow \boxed{V = 4\pi(e^2 - e^{-2} - 4)cm^3}$

PARTIE C

(Γ) $\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} \end{cases}$ $avec\ t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

1) Montrons que (Γ) est une partie de (C)

$x = \ln(\cos t) \leftrightarrow \cos t = e^x$ et $y = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$

$t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\leftrightarrow 0 < \cos t < 1 \leftrightarrow \ln(\cos t) < 0 \leftrightarrow x < 0$

$\boxed{(\Gamma): y = f(x)\ avec\ x < 0}$

On en déduit que (Γ) est la partie de (C) correspondant à $x < 0$.

2) Déterminons les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} x'(t) = -\tan t \\ y'(t) = \frac{-\sin t(1 + \cos^2 t)}{\cos^2 t} \end{cases}$ $avec\ t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\leftrightarrow \begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2007
Session Normale
Epreuve du 1^{er} tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par :

$P(z) = z^3 - 5(1 - i)z^2 - 2(1 - 9i)z + 16 - 8i$

1°) Montrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z) = 0. On désignera par z_1 et z_2 les deux autres solutions telles que $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$, ou Im(z) désigne la partie imaginaire de z.

3°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$. Unité : 1cm.

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1 ; z_0 et $\overline{z_2}$ ou $\overline{z_2}$ désigne le conjugué de z_2.

b) Calculer $\frac{\overline{z_2} - z_1}{z_0 - z_1}$

c) En déduire la nature du triangle ABC.

4°) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. M et M' sont les points d'affixes respectives z et z' tels que M' soit l'image de M par la translation t.

a) Exprimer z' en fonction de z.

b) Calculer l'affixe du point D image du point C par t.

c) Donner la nature exacte du quadrilatère ABDC. Justifier

EXERCICE II (4 points)

Soit (V_n) la suite numérique définie sur IN* par $V_1 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$.

1°) Calculer V_2, V_3 et V_4

2°) a) Démontrer que pour tout entier n > 0, on a $V_n > 0$

b) Démontrer que la suite (V_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (V_n) est convergente.

3°) Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_n = \frac{V_n}{n}$, $\forall\, n > 0$

a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie sur]0 ; +∞ [par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2°) Etudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g.

3°) En déduire que pour tout $x > 0$ on a $g(x) > 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$. On considère par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité : 2cm)

1°) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

En déduire que (C) admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

2°) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3°) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D)

b) Déterminer les coordonnées du point B de (C) en lequel la tangente est parallèle à (D).

4°) Soit (T) la tangente à (C) au point A d'abscisse 1.

Déterminer une équation de (T).

5°) a) Démontrer que f est une bijection définie de $]0 ; +\infty[$ sur IR.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{1}{2} ; 1[$.

c) Construire (C). (On placera les points A et B et les tangentes à (C) en A et en B).

6°) Construire dans le même repère, la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f.

7°) Calculer l'aire S en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x$; $x = 1$ et $x = e$.

PARTIE C

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x(t) ; y(t))$ tels que :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t + 2te^{-t} \end{cases}, \ t \geq 0.$$

1°) Montrer que (Γ) est une partie de (C) que l'on précisera.

2°) Tracer en pointillé (Γ) sur le même graphique que (C).

Année 2007
1^{er} tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

Soit P le polynôme, de variable complexe z défini par :

$P(z) = z^3 - 5(1-i)z^2 - 2(1-9i) + 16 - 8i$

1°) Montrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure z_0

Posons $z_0 = ib$. On a $P(z_0) = P(ib) = 0$

$P(ib) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 - 5(1-i)(ib)^2 - 2(1-9i)(ib) + 16 - 8i = 0$

$\Leftrightarrow (5b^2 - 18b + 16) + i(-b^3 + 5b^2 - 2b - 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 5b^2 - 18b + 16 = 0 \ (1) \\ -b^3 + 5b^2 - 2b - 8 = 0 \ (2) \end{cases}$

Résolvons l'équation (1)

$5b^2 - 18b + 16 = 0$; $\Delta = 1$; $b = \frac{8}{5}$ ou $b = 2$

Vérifions l'équation (2) pour chaque valeur de b.

Si $b = \frac{8}{5}$ on a : $-(\frac{8}{5})^3 + 5(\frac{8}{5})^2 - 2(\frac{8}{5}) - 8 = \frac{-512}{125} + \frac{320}{25} - \frac{16}{5} - 8 = \frac{-312}{125} \neq 0$

Si b = 2, on a : $-(2)^3 + 5(2)^2 - 2(2) - 8 = -8 + 20 - 4 - 8 = 20 - 20 = 0$

b = 2 vérifie les équations (1) et (2), on en déduit que $\boxed{z_0 = 2i}$

2°) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation P(z) = 0.

$P(2i) = 0 \Leftrightarrow P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$, avec a, b et c des nombres complexes à déterminer.

Méthode d'identification

$P(z) = z^3 - 5(1-i)z^2 - 2(1-9i)z + 16 - 8i$

$P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - i2az^2 - i2bz - i2c$

$P(z) = az^2 + (b - i2a)z^2 + (c - i2b)z - i2c$

Par identification on a:

$\begin{cases} a = 1 \\ b - i2a = -5 - 5i \\ c - i2b = -2 + 18i \\ -i2c = 16 - 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 - 3i \\ c = 4 + 8i \end{cases}$ et $P(z) = (z-2i)(z^2 + (-5-3i)z + 4 + 8i)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + (-5-3i)z + 4 + 8i$

$z^2 + (-5-3i)z + 4 + 8i = 0$; $\Delta = -2i$

Soit $\delta \in \mathbb{C} / \delta = x + iy$ et $\delta^2 = \Delta = -2i$ on a :

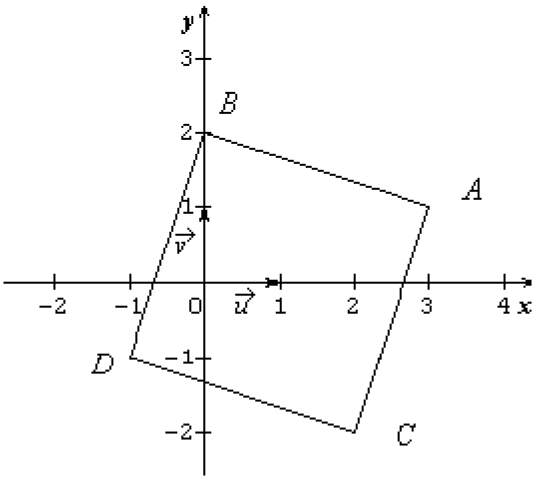
$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = 2 \\ 2xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ xy < 0 \end{cases}$

$x = \pm 1$ et $y = \pm 1$, avec $xy < 0$ donc $\delta = 1 - i$ ou $\delta = -1 + i$

z = 3 + i ou z = 2 + 2i

$\boxed{\mathbf{S_{\mathbb{C}} = \{2i ; 3 + i ; 2 + 2i\}}}$ avec $z_0 = 2i$; $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = 2 + 2i$

3°) a) $A(z_1)$; $B(z_0)$; $C(\overline{z_2})$. Plaçons les points A ; B et C



b) Calcul de $\frac{\overline{z_2}-z_1}{z_0-z_1}$

$\frac{\overline{z_2}-z_1}{z_0-z_1} = \frac{2-2i-3-i}{2i-3-i} = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{10}$

$\frac{\overline{z_2}-z_1}{z_0-z_1} = \frac{10i}{10} = i \Leftrightarrow \boxed{\frac{\overline{z_2}-z_1}{z_0-z_1} = i}$

c) Nature du triangle ABC

$\left|\frac{\overline{z_2}-z_1}{z_0-z_1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AC = AB$

$\arg(\frac{\overline{z_2}-z_1}{z_0-z_1}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

AB = AC et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, alors ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4°) a) Exprimons z' en fonction de z.

$z' = z + z_{\overrightarrow{AB}}$ or $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = z_0 - z_1 = 2i - 3 - i = -3 + i$

$\boxed{z' = z - 3 + i}$

b) Calculons l'affixe du point D image de C par t.

$z_D = z_C - 3 + i \Leftrightarrow z_D = \overline{z_2} - 3 + i = 2 - 2i - 3 + i \Leftrightarrow \boxed{z_D = -1 - i}$

c) Nature exacte du quadrilatère ABDC.

D'après 3°) c) il suffit de montrer que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Or $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ donc ABDC est un parallélogramme

Par ailleurs AB = AC et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ donc le quadrilatère ABDC a 4 cotés égaux et 4 angles droits.

Conclusion : **Le quadrilatère ABDC est un carré**

EXERCICE II

On considère la suite (V_n) définie sur IN*, par : $V_1 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$, pour tout $n \in$ IN*

1°) Calcul de V_2, V_3 et V_4

$V_2 = \frac{1+1}{2} V_1 = V_1 \Leftrightarrow \boxed{V_2 = \frac{1}{2}}$

$V_3 = \frac{2+1}{2x2} V_2 = \frac{3}{4} V_2 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = \frac{3}{8}}$

$V_4 = \frac{3+1}{2x3} V_3 = \frac{2}{3} V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_4 = \frac{1}{4}}$

1°) a) Démontrons que pour tout entier $n > 0$, $V_n > 0$

Démonstration par récurrence

Pour tout entier $n > 0$, posons P(n) la propriété : $V_n > 0$

i) Vérifions P(n) pour n = 1

Pour n = 1, $V_1 = \frac{1}{2} > 0$, alors **pour n = 1, P(n) est vraie**

ii) Pour tout entier $n > 0$, montrons que si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie également.

Supposons que pour tout entier $n > 0$, $V_n > 0$

$V_n > 0 \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n}V_n > 0$; (car $\forall$ n > 0, $\frac{n+1}{2n} > 0$)

$V_n > 0 \Leftrightarrow V_{n+1} > 0$; alors **pour tout entier n > 0, si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie**.

Conclusion

i) et ii) montrent que pour tout entier n > 0, P(n) est vraie c'est-à-dire :

pour tout entier n > 0, $V_n > 0$.

b) Démontrons que (V_n) est décroissante.

Pour tout entier n > 0, calculons ($V_{n+1} - V_n$)

$V_{n+1} - V_n = \frac{n+1}{2n}V_n - V_n = \frac{1-n}{2n}V_n$

$\forall$ n > 0, $\frac{1-n}{2n} \leq 0$ et $V_n > 0$, alors $V_{n+1} - V_n \leq 0$. On en déduit que (V_n) est décroissante.

c) Déduisons que (V_n) est convergente.

Pour tout entier n > 0, $V_n > 0$ alors (V_n) est minorée par 0.

(V_n) étant décroissante et minorée, elle converge.

3°) On pose $U_n = \frac{V_n}{n}$, $\forall$ n > 0

a) Montrons que (U_n) est une suite géométrique.

$V_{n+1} = \frac{n+1}{2n}V_n$

$U_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{n+1} = = \frac{n+1}{2n}V_n \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{V_n}{n}$, or $\frac{V_n}{n} = U_n$ alors $\boxed{\mathbf{U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n}}$

(U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_1 = V_1 = \frac{1}{2}$

b) Exprimons U_n puis V_n en fonction de n

$U_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} \Leftrightarrow U_n = (\frac{1}{2})^n$

$\boxed{\mathbf{U_n = \frac{1}{2^n}}}$

$V_n = n \times U_n \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{V_n = \frac{n}{2^n}}}$

c) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}} = 0$ (car $0 < \frac{1}{2} < 1$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ donc $\boxed{\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0}}$

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie sur]0 ; +∞ [par :

$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1°) Déterminons $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\boxed{\mathbf{\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty}}$ (car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 (1+\frac{2}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2})$

$\boxed{\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}}$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

2°) Sens de variation et tableau de variation

$\forall$ x ∈] 0 ; +∞ [, $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$

$\forall$ x $\in$] 0 ; +∞ [, $\boxed{\mathbf{g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}}}$

Signe de g'(x) et sens de variation

$\forall$ x $\in$] 0 ; +∞ [, x > 0 et x + 1> 0, alors le signe de g'(x) dépend de celui de (x-1)

Par conséquent :

Pour x $\in$] 0 ; 1 [, g'(x) < 0,

Pour x $\in$] 1 ; +∞ [, g'(x) > 0.

g est strictement décroissante sur] 0 ; 1 [et strictement croissante sur] 1 ; +∞ [.

Tableau de variation

x	0		1		+∞
g'(x)		-	0	+	
g(x)	+∞	↘	3	↗	+∞

3°) Déduisons que pour tout x > 0, g(x) > 0

D'après le tableau de variation,

Pour tout x > 0, g(x) ≥ 3 or 3 > 0, alors pour tout x > 0, g(x) > 0.

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie sur]0 ; +∞ [par : f(x) = x + $\frac{2\ln x}{x}$.

1°) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x + \frac{2}{x} \times \ln x)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{f(x) = -\infty}}$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$)

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{f(x) = +\infty}}$ (car $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$)

Déduisons que (C) admet une asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, alors (C) admet une asymptote verticale d'équation x = 0

2°) a) Calculons f '(x)

Pour tout x > 0, f '(x) = $1 + \frac{2-2\ln x}{x^2} = \frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}$

$\boxed{\mathbf{f'(x) = \frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}, x > 0}}$

Montrons que f '(x) a le même signe que g(x).

$\forall$ x > 0, f '(x) = $\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ car g(x) = x^2 + 2 - 2lnx

Pour tout x > 0, x^2 > 0 d'où f '(x) et g(x) ont le même signe

b) Déduisons le sens de variation de f

D'après PARTIE A 3°) Pour tout x > 0, g(x) > 0 ; par suite f '(x) > 0 pour tout x > 0. On en déduit que f est strictement croissante sur]0 ; +∞ [

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

3°) a) Montrons que la droite (D) : y = x est asymptote à (C)

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} = 0$, alors (D) : y = x est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

Position de (C) par rapport à (D)

Etudions le signe de (f(x) – y)

$f(x) - y = \frac{2\ln x}{x}$

∀ x > 0, (f(x) – y) a le même signe que ln x. Par conséquent

Pour x ∈] 0 ; 1 [, f(x) – y < 0,

Pour x ∈] 1 ; +∞ [, f(x) – y > 0. On en déduit que :

Sur] 0 ; 1 [, (C) est en dessous de (D) et sur] 1 ; +∞ [, (C) est au dessus de (D).

4°) Déterminons les coordonnées de B

$(T_B) : y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$

$(T_B) \parallel (D) \Leftrightarrow f'(x_B) = 1 \Leftrightarrow \frac{x_B{}^2 + 2 - 2\ln x_B}{x_B{}^2} = 1 \Leftrightarrow 2 - 2\ln x_B = 0 \Leftrightarrow \ln x_B = 1 \Leftrightarrow x_B = e$

$y_B = f(x_B) = f(e) = \frac{e^2+2}{e} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{B(e\ ;\ \frac{e^2+2}{e})}}$

4°) Equation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 1.

(T) : y = f '(1)(x – 1) + f(1) ; f '(1) = 3 ; f(1) = 1 alors $\boxed{\mathbf{(T) : y = 3x - 2}}$

5°) a) Démontrons que f est une bijection de]0 ; +∞ [sur IR.

D'après le tableau de variation, f est continue et strictement croissante sur]0 ; +∞ [. Elle réalise donc une bijection de]0 ; +∞ [sur f( ]0 ; +∞ [ ) =]-∞ ; +∞ [= IR.

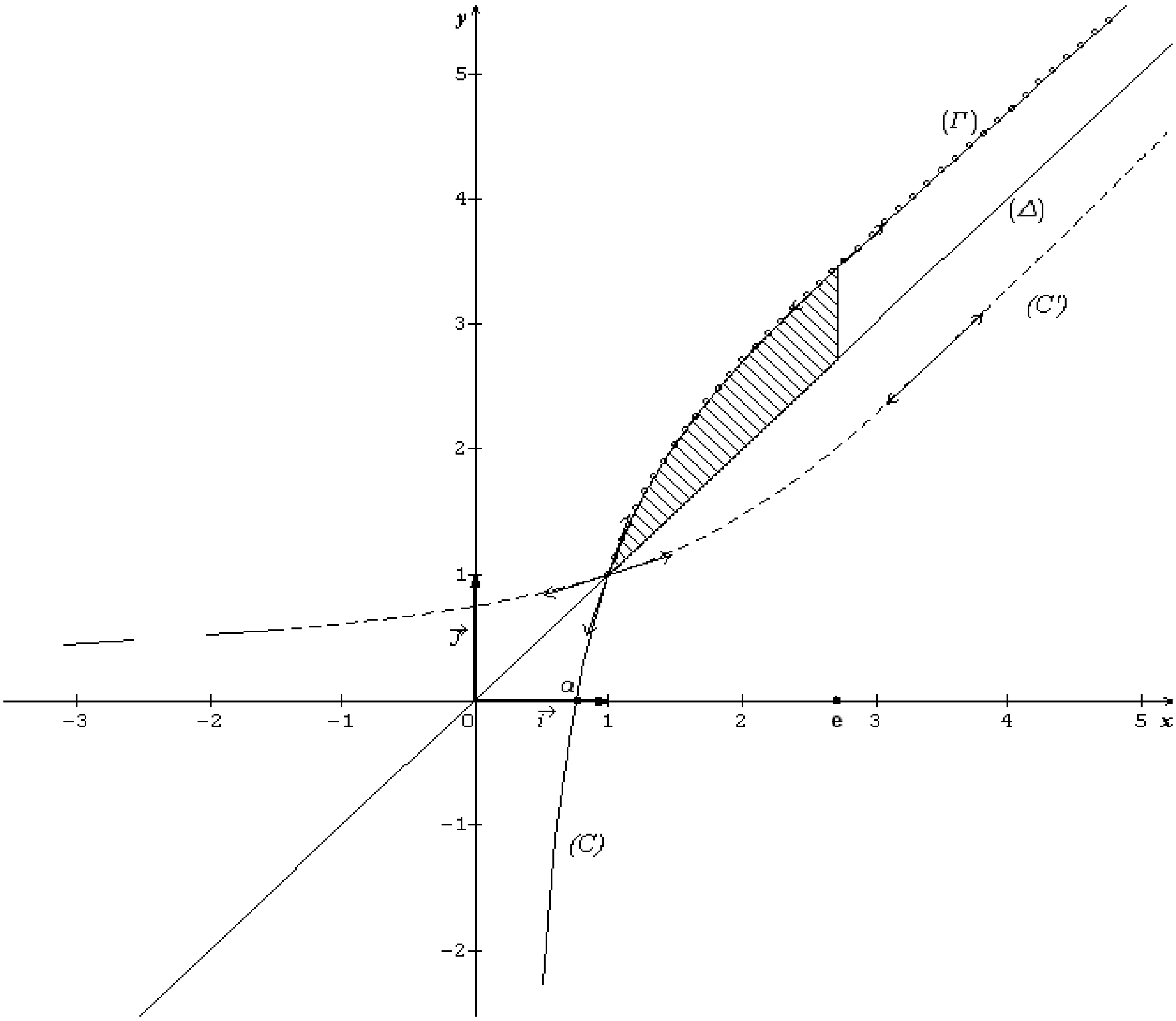
b) Montrons que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α et que α ∈]$\frac{1}{2}$; 1[

f réalise une bijection de]0 ; +∞ [sur IR qui contient 0, alors l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans]0 ; +∞ [

Montrons que α ∈]$\frac{1}{2}$; 1[

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 4\ln 2 < 0$ et f(1) = 1 > 0 alors $\boxed{\mathbf{f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0,\ alors\ \alpha \in]\frac{1}{2}\ ;\ 1[}}$

c) Construction de (C)



7°) Calcul de S

$S = \int_1^e (f(x) - y)dx.\ UA = \int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx.\ UA = \int_1^e \frac{2}{x} \times \ln x dx.\ UA = \int_1^e [(\ln x)^2]'dx.\ UA$

$S = [(\ln x)^2]_1^e \Leftrightarrow S = 4(\ln e)^2 cm^2 = 4cm^2 \Leftrightarrow \boxed{S = 4cm^2}$

PARTIE C

Soit (Γ), de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t + 2te^{-t} \end{cases}, t \geq 0$

1°) Montrons que (Γ) est une partie de (C)

Posons $x = x(t) = e^t$, $\forall\ t \geq 0$, $e^t \geq 1$ donc $x \geq 1$

$y = y(t) = e^t + 2te^{-t}$

$x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$

$y = x + 2\ln x\, e^{-\ln x} = x + 2\ln x \times \frac{1}{e^{\ln x}} = x + \frac{2\ln x}{x}$

$\boxed{\mathbf{(\Gamma) : y = x + \frac{2\ln x}{x}\ ;\ x \geq 1}}$

(Γ) est la partie de (C) correspondant à x ≥ 1

2°) Voir graphique

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2007
Session Normale
Epreuve du 2^{nd} tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

<u>EXERCICE I</u> (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1, 0, 0) ; B(0, 2, 0) et C(0, 0, 3).

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Soit I le point de coordonnées (1, 2, 3).
2) Calculer la distance de I au plan (ABC). Les points A, B, C et I sont –ils coplanaires ?
3)
a) Calculer A_1 l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
b) Déterminer le volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.
4) Soit D le point de coodonnées (1, -2, 3).
a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
b) Calculer l'aire A_2 du quadrilatère ABCD .

<u>EXECICE II</u> (4 points)

La constitution d'un groupe de trois élèves devant représenter leurs camarades à un exposé sur l'environnement est soumise à une expérience aléatoire.

On lance trois fois une pièce de monnaie. Un garçon est désigné à chaque apparition de pile et une fille à chaque apparition de face. Un groupe constitué de filles et de garçons est appelé « groupe mixte» et un groupe constitué uniquement de filles ou uniquement de garçons un «groupe non mixte ».

On désigne par M l'évènement «le groupe est mixte » et par $\overline{M}$ l'évènement contraire de M

1) Calculer les probabilités des évènements M et $\overline{M}$.
2) A l'intérieur de la salle ou se tient l'exposé, le groupe de trois élèves reçoit en cadeau trois tee-shirts par filles présente au sein du groupe. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tee-shirts reçus.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Déterminer la fonction de répatition F de X.
d) Construis la représentation graphique de F.
e) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
3) Les tee-shirts reçus sont répaties de manière équitable à tous les membres du groupe. Quelle est la probabilité que chaque membre du groupe reparte avec au moins deux tee-shirts.

<u>PROBLEME</u> (12 points)

<u>PARTIE A</u>

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = x - 1$

1) Trouver deux réels a et b tels que $U(x) = ax + b$ soit une solution de (E).
2) Démontrer que la fonction V est solution de (E) si et seulement si $(V - U)$est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
3) Résoudre (E') .
4) En déduire les solutions de (E) ;
5) Déterminer la solution h de(E) vérifiant h(0)=1

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; (unité graphique : 1cm).
On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} + x - 2$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.
3) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 2$:
a) Montrer que (D) est asymptote à $\left(C_f\right)$ en $+\infty$.
b) Préciser la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à (D).
4) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $-1{,}2 \leq \alpha \leq -1{,}1$ et $1{,}8 \leq \beta \leq 1{,}9$.
6) Construis $\left(C_f\right)$.
7) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation : $me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0$ où m est un paramètre réel .

PARTIE C

Soit Δ la partie du plan limitée par $\left(C_f\right)$, la droite (D) et le sdroites d'équations $x = 2$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement supérieur à 2 .

1)
a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ en cm² de Δ en fonction de λ.
b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} A(\lambda)$.
2) Désignons par V le volume en cm^3 du solide obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_2^4 (x - 2)e^{-x}dx$
b) Calculer V

On donne $e^{1{,}2} = 3{,}32$; $e^{1{,}1} = 3{,}00$; $e^{-1{,}8} = 0{,}15$; $e^{-2} = 0{,}14$; $e^2 = 7{,}39$.

Année 2007
2^{nd} tour

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1) Calculons les coordonnées Du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}}$

2) I(1 ; 2 ;3). Calculons la distance de I au plan (ABC).

$d(I;(ABC)) = \frac{|\overrightarrow{IA}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$

$\overrightarrow{IA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = -12$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{36+9+4} = 7$ donc $\boxed{\boldsymbol{d(I;(ABC)) = \frac{12}{7}}}$

On en déduit que les points A, B, C et I ne sont pas coplanaires puisque $\boldsymbol{d(I;(ABC)) \neq 0}$.

3)

a) Calculons l'aire A_1 du triangle ABC

$A_1 = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}$; $\boxed{\boldsymbol{A_1 = \frac{7}{2}ua}}$

b) Calculons le volume V de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.

$V = \frac{1}{3}\times A_1 \times d(I;(ABC))$; $\boxed{\boldsymbol{V = 2uv}}$

4) D (1 ; -2 ; 3)

a) Nature du quadrilatère ABCD

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$ **, alors ABCD est un parallélogramme**

b) Calculons l'aire A_2 du quadrilatère ABCD

$A_2 = 2A_1$; $\boxed{\boldsymbol{A_2 = 7ua}}$

EXERCICE II

1) Calculons les probabilités des évènements M et $\overline{M}$

$\overline{M} = \{(P,P,P);\ (F,F,F)\}$; $P(\overline{M}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\boxed{\boldsymbol{P(\overline{M}) = \frac{1}{4}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{P(M) = \frac{3}{4}}}$

2) X = nombre de tee-shirts reçus

a) Les valeurs prises par X sont : 0, 3, 6, 9.

b) La loi de probabilité de X

$X = x$	0	3	6	9
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P(X=0) = C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $P(X=3) = C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

$P(X=6) = C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$; $P(X=9) = C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0$

c) Déterminons la fonction de répartition F de X

$si\ x < 0,\ F(x) = 0$

$si\ 0 \leq x < 3,\ F(x) = \frac{1}{8}$

$si\ 3 \leq x < 6,\ F(x) = \frac{4}{8}$

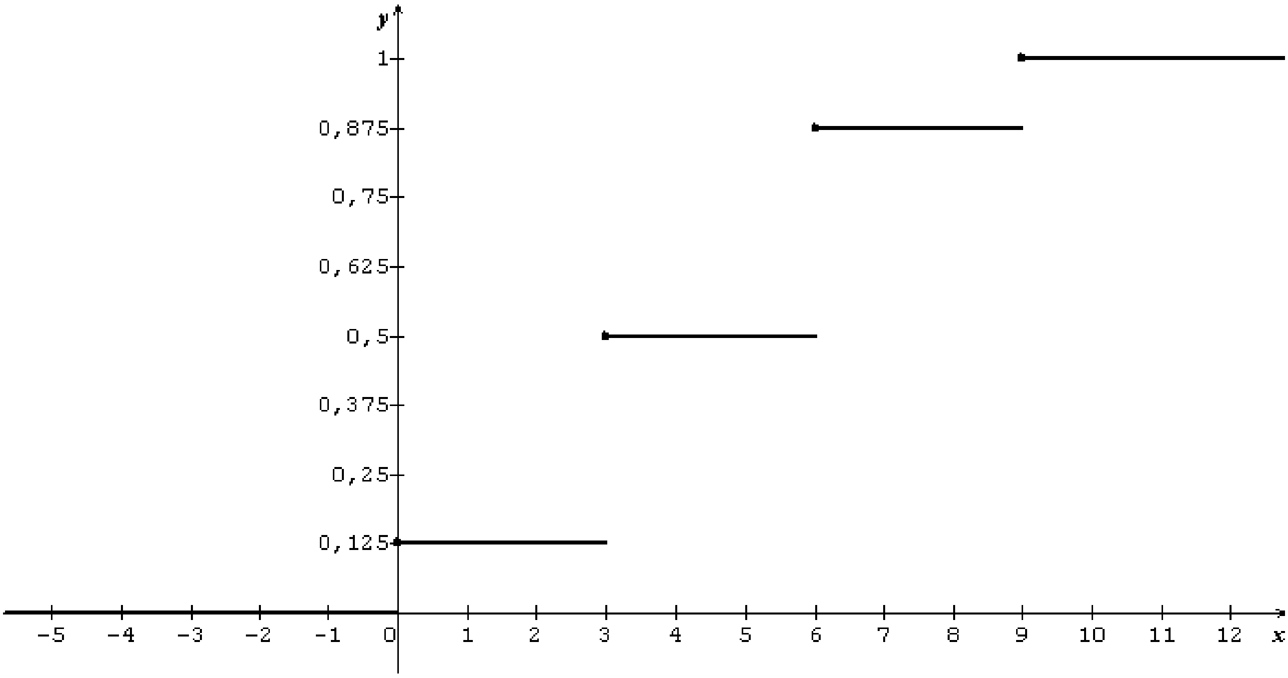
$si\ 6 \leq x < 9,\ F(x) = \frac{7}{8}$

$si\ x \geq 9,\ F(x) = 1$

d) Construction de la représentation graphique de F

1 cm pour une unité sur l'axe des abscisses

1cm pour $\frac{1}{8}$ sur l'axe des ordonnées



e) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X

$E(X) = \frac{9+18+9}{8}$; $\boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{9}{2}}}$

3) Soit A l'évènement : « Chaque membre du groupe repart avec au moins deux tee-shirts.»

calculons $P(A)$.

$A = \{(X = 6);\ (X = 9)\}$

$P(A) = \frac{3+1}{8}$; $\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{2}}}$

PROBLEME

PARTIE A

$(E): y' + y = x - 1$

1) Trouvons les réels a et b

$U(x) = ax + b$; $U'(x) = a$

$U'(x) + U(x) = x - 1 \quad \leftrightarrow ax + a + b = x - 1$

Par identification

$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$; **On trouve $a = 1$ et $b = -2$** et $\boxed{U(x) = x - 2}$

2) Montrons que la fonction V est solution de (E) si et seulement si (V-U) est solution de (E'): $y' + y = 0$.

Si V est solution de (E) on a:

$\begin{cases} V'(x) + V(x) = x - 1 \\ U'(x) + U(x) = x - 1 \end{cases}$ car U est solution de (E).

$(V - U)'(x) + (V - U)(x) = 0$. Alors $(V - U)$ est solution de (E').

Réciproquement:

Si $(V - U)$ est solution de (E'), on a:

$(V - U)'(x) + (V - U)(x) = 0$

$V'(x) - U'(x) + V(x) - U(x) = 0$

$V'(x) + V(x) = U'(x) + U(x)$

$V'(x) + V(x) = x - 1$; car $U'(x) + U(x) = x - 1$. Alors V est solution de (E).

En conclusion V est solution de (E) si et seulement si $(V - U)$ est solution de (E').

3) Résolvons (E'): $y' + y = 0$.

$y' = -y$

$\boxed{y_k = ke^{-x} ; k \in \mathbb{R}}$

4) Déduisons les solutions de (E).

Soit V une solution de (E)

$V(x) - U(x) = ke^{-x}$

$V(x) = U(x) + ke^{-x}$

$\boxed{V(x) = ke^{-x} + x - 2 ;\ k \in \mathbb{R}}$

5) Déterminons la solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$.

$h(x) = ke^{-x} + x - 2$

$h(0) = 1 \leftrightarrow k = 2$ et $\boxed{h(x) = 2e^{-x} + x - 2}$

PARTIE B

$f(x) = e^{-x} + x - 2$

1) Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(1 + xe^{x} - 2e^{x}) = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} + x - 2 = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty \end{cases}$

2) Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variations
Dérivée
$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = -e^{-x} + 1}}$
Signe de $f'(x)$
$-e^{-x} + 1 > 0 \leftrightarrow e^{-x} < 1 \leftrightarrow -x < 0 \leftrightarrow x > 0$
$\forall\, x \in]-\infty; 0[,\ f'(x) < 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$
On en déduit que :
sur $]-\infty; 0[$, f est strictement décroissante
sur $]0; +\infty[$, f est strictement croissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3) $(D): y = x - 2$
a) Montrons que (D) est une asymptote à (C_f) en $+\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0.$
Alors (D) est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$
b) Position relative de (C_f) par rapport à (D)
$f(x) - y = e^{-x} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Alors sur $\mathbb{R}$, (C_f) est au dessus de (D).

4) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^{x}} + 1 - \frac{2}{x}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0^- \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{cases}$

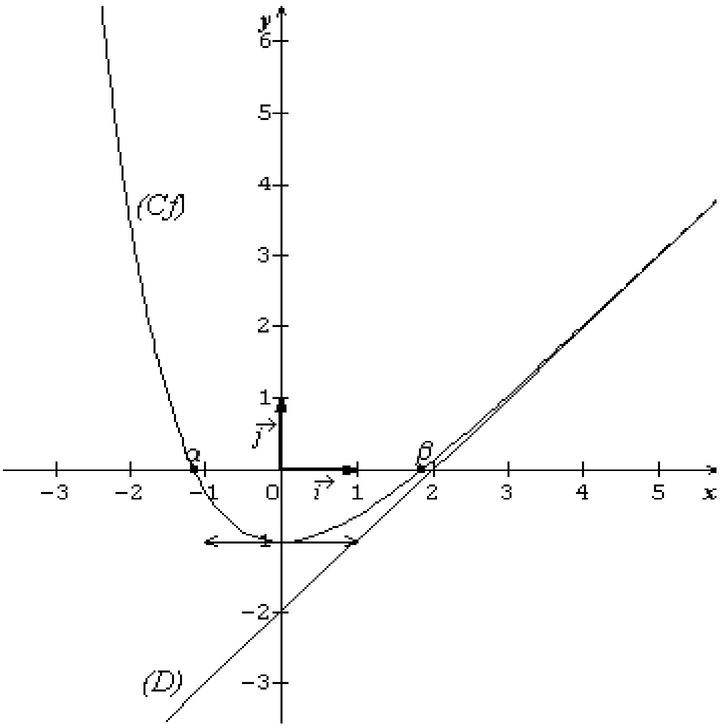
Interprétation graphique
La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

5) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β.
Sur $]-\infty; 0[$, f est dérivable donc continue et est strictement décroissante. Alors f réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $]-1; +\infty[$ ⋅
Or $0 \in]-1; +\infty[$, d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty; 0[$ ⋅
Montrons que $-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$
$\begin{cases} f(-1{,}2) = 0{,}12 > 0 \\ f(-1{,}1) = -0{,}1 < 0 \end{cases} \leftrightarrow$ **$f(-1{,}2) \times f(-1{,}1) < 0$ ⋅ Alors $-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$.**
Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable donc continue et est strictement croissante. Alors f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-1; +\infty[$ ⋅
Or $0 \in]-1; +\infty[$, d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]0; +\infty[$ ⋅

Montrons que $1{,}8 < \beta < 1{,}9$

$\begin{cases} f(1{,}8) = -0{,}03 < 0 \\ f(1{,}9) = 0{,}05 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \boldsymbol{f(1,8) \times f(1,9)} < 0 \cdot$ **Alors** $\mathbf{1,8} < \beta < 1{,}9$.

6) Construisons (C_f)



7. Discutons graphiquement suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0$

$$me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0$$

$\leftrightarrow m = e^{-x} + x - 2 \quad \leftrightarrow f(x) = m$

On en déduit que :

si $\boldsymbol{m} \in]-\infty; \mathbf{-1}[$**, l'équation n'admet pas de solutions**

si $\boldsymbol{m} = \mathbf{-1}$**, l'équation admet une solution** $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

si $\boldsymbol{m} \in]\mathbf{-1}; +\infty[$**, l'équation admet deux solutions.**

PARTIE C

1)

a) Calculons $A(\lambda)$ en cm²

$A(\lambda) = ua \times \int_2^{\lambda} [f(x) - y]dx = ua \times \int_2^{\lambda} e^{-x}dx = ua \times [-e^{-x}]_2^{\lambda}$

$\boxed{\boldsymbol{A(\lambda) = (e^{-2} - e^{-\lambda})\ \mathrm{cm}^2}}$

b) Calculons $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

$\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = e^{-2}}}$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$

2)

a) Calculons I à l'aide d'une intégration par parties

$I = \int_2^4 (x-2)\, e^{-x}dx$; Posons $\begin{cases} u(x) = x - 2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I = [-(x-2)e^{-x}]_2^4 + \int_2^4 e^{-x}dx = [-(x-1)e^{-x}]_2^4$

$\boxed{\boldsymbol{I = e^{-2} - 3e^{-4}}}$

b) Calculons V en cm^3

$V = uv \times \pi \times \int_2^4 f^2(x)dx = \pi \times \int_2^4 (e^{-2x} + 2(x-2)e^{-x} + (x-2)^2)dx$

$V = uv \times \pi \times \left(\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^4 + 2I\right) = \pi\left[\frac{8}{3} - \frac{e^{-4}}{2}(e^{-4} - 4e^2 + 11)\right] cm^3$

$\boxed{\boldsymbol{V = 8,94cm^3}}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2006
Session Normale
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Cette épreuve comporte deux (2)pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère R = (O ; $\vec{u}$;$\vec{v}$) ; unité graphique 2cm

1°) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système : $\begin{cases} iz + \overline{z}' = -2\sqrt{3} \\ \overline{z} - iz' = -2 \end{cases}$

2°) Soient les points A ; B d'affixes respectives $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -\sqrt{3} - i$

a) Ecrire Z_A ; Z_B et $Z_A . Z_B$ sous forme trigonométrique.

b) Montrer que ${Z_A}^3$ est réel et ${Z_B}^3$ est imaginaire pur

3°) Soit r la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{-\pi}{2}$

a) On pose r(A) = C. Calculer Z_C de C

b) On pose r(C) = D. Calculer Z_D de D

c) Placer les points A ; B ; C ; D

4°)

a) Montrer que O est le milieu de $[AD]$ et [BC]

b) Calculer le module et l'argument de $\frac{Z_A}{Z_B}$

c) En déduire la nature du quadrilatère ABDC

EXERCICE II (4 points)

Le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P ; x représente le prix de vente unitaire du produit exprimé en FCFA ; y représente la quantité du produit disponible sur le marché, exprimée en milliers

Xi en FCFA	30	35	45	60	80	100
Yi en milliers	12,5	13	13	15	15,5	16

1°) On considère l'ensemble des points Mi de coordonnées (xi ; yi) ou $1 \leq i \leq 6$

a) Construire le nuage de point Mi (1,5cm représente 10FCFA en abscisse et 1cm représente 1000 en ordonnées)

b) Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse.

2°)

a) Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de MAYER. On prendra pour premier sous-nuage les trois premiers points et pour le deuxième les trois derniers points.

b) Déterminer l'équation de (Δ) sous la forme y = ax + b, a et b étant des réels à préciser.

3°) En utilisant l'équation de la droite (Δ), estimer

a) La quantité du produit P disponible sur le marché pour un prix de vente de 150F

b) Le prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est de 20 000F

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction définie sur [0 ; +∞[par f(x) = e^{-x}sin(x) et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé R = (O ; $\vec{i}$;$\vec{j}$) ; unité graphique : 2cm en abscisse et 10cm en ordonnées.

PARTIE A ; Etude de f

1°) Montrer que pour tout x ≥0, -$e^{-x} \leq$ f(x) ≤ e^{-x}. En déduire l'existence d'une asymptote à Cf en +∞

2°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.

3°) On se propose d'étudier f sur [0 ; π].

a) Etablir l'égalité : $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$ pour tout réel x

b) Calculer f'(x) et étudier son signe sur [0 ; π].

c) Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; π].

4°) On appelle (C1) la portion de (Cf) déterminer par les points dont les abscisses dans l'intervalle [0 ; π] . Tracer (C1). On prendra les abscisses respectives : 0 ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$ et π

PARTIE B : Calcul d'aire et de volume

1°) a) Vérifier égalité : f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0

b) En déduire une primitive F de f sur [0 ; +∞[

2°) On désigne par D le domaine du plan délimité par (C1) ; (ox) et les droites d'équations x=0 et x=π. Calculer en cm^2, la valeur de l'aire du domaine D.

3°) Soit φ la fonction définie sur [0 ; π] par φ(x) = e^{-2x}cos(2x)

a) Vérifier l'égalité : φ''(x) + 4φ'(x) + 8 φ(x) = 0

b) En déduire une primitive Φ de φ sur [0 ; π].

c) Calculer, en cm^3le volume V du solide engendré par la rotation complète du domaine D autour de l'axe (ox)

PARTIE C : Etude d'une suite

On considère la suite (U_n) définie sur ℕ par : $U_n = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx$

1°) a) A l'aide de deux intégrations par parties successives, monter que :

$U_n = \frac{n}{1+n^2}(1 - e^{-\pi}\cos(nx))$

b) En déduire que, pour tout n $|U_n| \leq \frac{2n}{1+n^2}$

2°) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (U_n)$

On donne $e^{-\frac{\pi}{4}} = 0{,}46$; $e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}21$: $e^{-\frac{3\pi}{4}} = 0{,}09$

Année 2006

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1°) Résolution dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$\begin{cases} iz + \overline{z'} = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz + \overline{z'} = -2\sqrt{3} \\ \overline{\bar{z} - iz'} = \overline{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz + \overline{z'} = -2\sqrt{3} \\ z + i\overline{z'} = -2 \end{cases}$

Méthode des déterminants

D = $\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = -2$, $D_Z = \begin{vmatrix} -2\sqrt{3} & 1 \\ -2 & i \end{vmatrix}$ = -2i$\sqrt{3}$ + 2

$D_{\overline{z'}} = \begin{vmatrix} i & -2\sqrt{3} \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ = -2i + 2$\sqrt{3}$

z = $\frac{D_Z}{D} = \frac{-2\sqrt{3}i+2}{-2}$ = -1 + i$\sqrt{3}$

$\overline{z'} = \frac{D_{\overline{z'}}}{D} = \frac{2\sqrt{3}-2i}{-2}$ = - $\sqrt{3}$ + i $\Leftrightarrow$ z' = - $\sqrt{3}$ - i

$\boxed{S_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} = \{(-1 + i\sqrt{3} \,;\, -\sqrt{3} - i)\}}$

2°) Z_A = -1 + i$\sqrt{3}$; Z_B= - $\sqrt{3}$ - i

a- Forme trigonométrique de Z_A ; Z_B; $Z_A.Z_B$

$|Z_A|$ = 2 ; arg $(Z_A) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (k ∈ ℤ) $\Leftrightarrow$ $\boxed{Z_A = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))}$

$|Z_B|$ = 2 ; arg $(Z_B) = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$ (k ∈ ℤ) $\Leftrightarrow$ $\boxed{Z_B = 2(\cos(\frac{-5\pi}{6}) + i\sin(\frac{-5\pi}{6}))}$

$|Z_A.Z_B| = |Z_A| \times |Z_B|$ = 4

arg$(Z_A.Z_B)$ = arg (Z_A) + arg $(Z_B) = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ (k ∈ ℤ) $\Leftrightarrow$ $\boxed{Z_A.Z_B = 4(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6}))}$

b- Montrons que $Z_A{}^3$ est réel et $Z_B{}^3$ est imaginaire pur

Arg $(Z_A{}^3)$ = 3 × arg (Z_A) = 3 × $\frac{2\pi}{3}$ = , alors $Z_A{}^3$ est réel

Arg $(Z_B{}^3)$ = 3 × arg (Z_B) = 3 × $(\frac{-5\pi}{6}) = \frac{-5\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$, alors $Z_B{}^3$ est imaginaire pur.

3°) r est la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

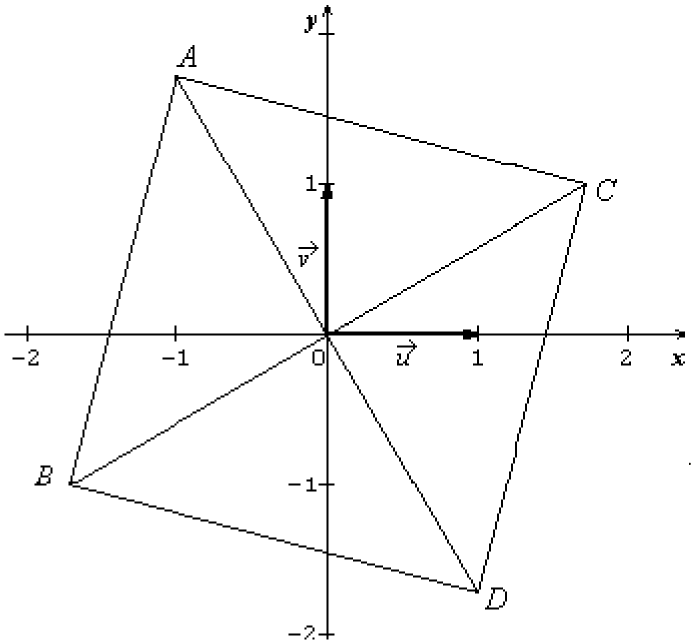
a- Calculons l'affixe Z_C de C

r(A) = C $\Leftrightarrow Z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}} Z_A \Leftrightarrow Z_C = -i(-1 + i\sqrt{3}) \Leftrightarrow$ $\boxed{Z_C = \sqrt{3} + i}$

b- Calculons l'affixe Z_D de D

r(C) = D $\Leftrightarrow Z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} Z_C \Leftrightarrow Z_D = -i(\sqrt{3} + i) \Leftrightarrow$ $\boxed{Z_D = 1 - i\sqrt{3}}$

c- Construction des points A ; B ; C ; D.



4°) a- Montrons que O est le milieu de $[AD]$ et [BC]

O est milieu de$[AD]$ et [BC] si et seulement si

$\frac{Z_A+Z_D}{2} = Z_O$ et $\frac{Z_B+Z_C}{2} = Z_O$

$\frac{Z_A+Z_D}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{2} = 0 = Z_O$

$\frac{Z_B+Z_C}{2} = \frac{-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+i}{2} = 0 = Z_O$ **, alors O est le milieu de** $[AD]$ **et [BC]**

Calcul du module et l'argument de $\frac{Z_A}{Z_B}$

$\left|\frac{Z_A}{Z_B}\right| = \frac{|Z_A|}{|Z_B|} = \frac{2}{2} = 1$ et

arg $(\frac{Z_A}{Z_B})$ = arg (Z_B) - arg (Z_A)

$\boxed{\arg(\frac{Z_A}{Z_B}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$ Donc $\boxed{\left|\frac{Z_A}{Z_B}\right| = 1 \text{ et } \arg(\frac{Z_A}{Z_B}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

c- Nature du quadrilatère ABDC

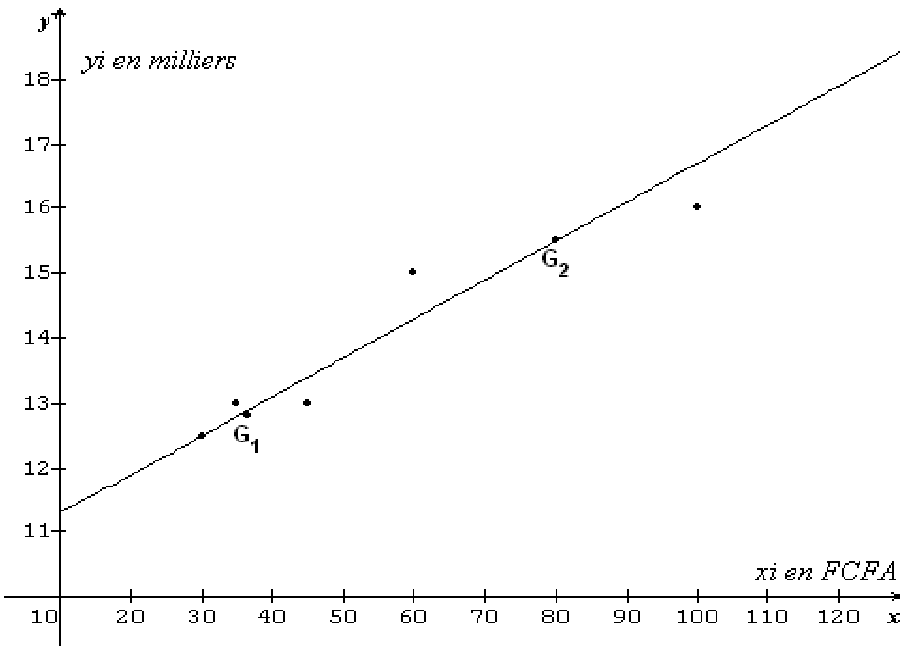
D'après a-) les diagonales $[AD]$ et [BC] se coupent en leur milieu O donc ABDC est un parallélogramme.

Par ailleurs d'après b-) OA = OB et $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA}) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ c'est-à-dire OA = OB et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ par conséquent les diagonales $[AD]$ et [BC] ont même longueur et sont perpendiculaires .

<u>Conclusion</u> : **ABDC est carré.**

<u>EXERCICE II</u>

1°) a- Construction du nuage de points



b- Un ajustement affine est raisonnable car le nuage de points a un aspect rectiligne.

2°) Méthode de MAYER

a- Soit G_1 et G_2 les points moyens respectifs des deux sous nuages

$x_{G_1} = \frac{30+35+45}{3} = 36,7$; $y_{G_1} = \frac{12,5+13+13}{3} = 12,8$

$\boxed{G_1(36,7\ ;\ 12,8)}$

$x_{G_2} = \frac{60+80+100}{3} = 80$; $y_{G_2} = \frac{15+15,5+16}{3} = 15,5$

$\boxed{G_2(80\ ;\ 15,5)}$

La droite de Mayer est la droite (G_1G_2)

b- Equation de (Δ) sous la forme y = ax + b

$(\Delta) = (G_1G_2) \Leftrightarrow a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = 0,06$

(Δ) Passe par $G_2 \Leftrightarrow y_{G_2} = 0.06x_{G_2} + b$

$\Leftrightarrow 15,5 = 0.06 \times 80 + b$

$\Leftrightarrow b = 15,5 - 0.06\times 80 \Leftrightarrow b = 10,7$

$\boxed{(\Delta) : y = 0.06x + 10,7}$

3°) a-) (Δ) : y = 0.06x + 10,7

y(150) = 0 ,06×150 + 10,7 = 19,7

la quantité du produit P disponible sur le marché pour un prix de vente de 150 FCFA est 19700.

c- Résolvons l'équation : 0.06x +10,7 = 20

On a $x = \frac{20-10,7}{0.06} = 155$

Le prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est de 20.000 est 155 FCFA

PROBLEME

On considère la fonction définie sur [0 ; +∞[par f(x) = e^{-x}sin(x)

PARTIE A : Etude de la fonction f

1°) Montrons que pour tout x ϵ [0 ; +∞[, $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

On sait que pour tout x ϵ [0 ; +∞[; -1 ≤ sin(x) ≤ 1.

$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -e^{-x} \leq e^{-x}\sin(x) \leq e^{-x}$ (car $e^{-x} > 0$)

$\Leftrightarrow -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

d'où $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\ ;+\infty[\ ,\ -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}}$

Déduisons que ($\mathscr{C}$f) admet une asymptote en +∞

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}) = 0, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors ($\mathscr{C}$f) admet en +∞ une asymptote horizontale d'équation y = 0

2 °) Déterminons les abscisses des points d'intersection de ($\mathscr{C}$f) avec l'axe des abscisses

f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ e^{-x}sin(x) = 0 $\Leftrightarrow$ sin(x) = 0 car $e^{-x}>0 \Leftrightarrow$ x = $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Les points d'abscisses x = $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sont les points d'intersection de ($\mathscr{C}$f) avec l'axe des abscisses

3°) On se propose d'étudier f sur [0 ; π]

a- Etablissons l'égalité : $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$

$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)) = \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)) \Leftrightarrow \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\,(\sin\frac{\pi}{4}\cos(x) - \cos\frac{\pi}{4}\sin(x))$

Donc pour tout x $\in$ [0 ; +∞[$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$

b- $f(x) = e^{-x}\sin(x)$, calculons la dérivée f' de f

$f'(x) = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)) = \sqrt{2}e^{-x}(\sin(\frac{\pi}{4} - x))$

$$\boxed{f'(x) = \sqrt{2}e^{-x}(\sin(\frac{\pi}{4} - x))}$$

c- Tableau de variation de f sur [0 ; π]

Pour $x \in [0 ; \pi]$, $\sqrt{2}e^{-x}>0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\sin(\frac{\pi}{4} - x)$

pour x $\in$ $[0;\pi]$; $(\frac{\pi}{4} - x) \in [-\frac{3\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$

- $\sin(\frac{\pi}{4} - x) \geq 0 \Leftrightarrow (\frac{\pi}{4} - x) \in [0 ; \frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow x \in [0 ; \frac{\pi}{4}]$

-$\sin(\frac{\pi}{4} - x) \leq 0 \Leftrightarrow (\frac{\pi}{4} - x) \in [-\frac{3\pi}{4} ;0] \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{4} ; \pi]$

Par conséquent :

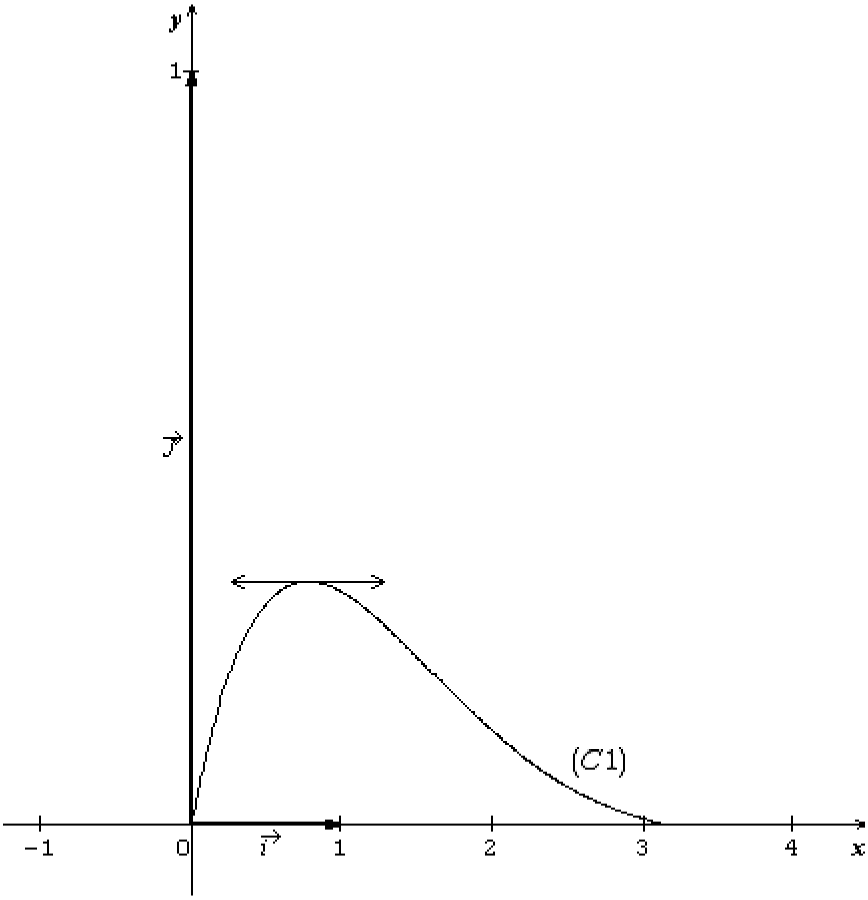
Pour x $\in [0 ; \frac{\pi}{4}]$, $f'(x) \geq 0$, et Pour x $\in [\frac{\pi}{4} ; \pi]$ $f'(x) \leq 0$.

f est croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ et f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \pi\right]$.

<u>Tableau de variation</u>

x	0		π/4		π
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	0,32	↘	0

4 °) Construction de ($\mathscr{C}$f)



PARTIE B : Calcul d'aire et de volume

1°) a- Vérifions l'égalité : f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0

f(x) = e^{-x}sin(x) ; f'(x) = e^{-x}(cos(x) – sin(x)) ; f''(x) = -2e^{-x} cos(x)

f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = e^{-x}(-2 cos(x) + 2 cos(x) -2 sin(x) +2 sin(x)) = 0 par suite

$\boxed{\textbf{f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0}}$ (CQFD)

b- Déduisons une primitive F de f sur [0 ; +∞[

f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0 ⇔ f(x) = $\frac{-f''(x)-2f'(x)}{2}$ ⇔ f(x) = [$\frac{-f'(x)-2f(x)}{2}$]'

On en déduit que

F(x) = $\frac{-f'(x)-2f(x)}{2}$ est une primitive de f sur [0 ;+∞[le calcul donne

$\boxed{\mathbf{F(x) = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos(x) + \sin(x))}}$

2°) Calcul de l'aire A

A = $\int_0^{\pi}$ f(x)dx $\times$ U.A = $[F(x)]_0^{\pi}$ $\times$ U.A = (F(π) –F(o)) $\times$ U.A

On trouve A = $\frac{1+e^{-\pi}}{2}$ $\times$ U.A   U.A = 2cm $\times$ 10cm =20cm^2 et Donc

$\boxed{A = 10(1 + e^{-\pi}) \, cm^2}$

3°) On donne ϕ(x) = e^{-2x}cos(2x)

a- Vérifions l'égalité : ϕ''(x) + 4ϕ'(x) + 8 ϕ(x) = 0

ϕ(x) = e^{-2x}cos(x) ; ϕ'(x) = -2e^{-2x}(cos(2x) + sin(2x)) ;

ϕ''(x) = 8e^{-2x} sin(2x)

ϕ''(x) + 4ϕ'(x) + 8 ϕ(x) = e^{-2x}(8 sin(2x) - 8 sin(2x) - 8 cos(2x) +8 cos(2x)) = 0

Par conséquent : $\boxed{\phi''(x) + 4\phi'(x) + 8\,\phi(x) = 0}$

b- Déduisons une primitive Φ de ϕ sur [0 ; π]

ϕ''(x) + 4ϕ'(x) + 8 ϕ(x) = 0

ϕ(x)= $\frac{-\varphi''(x)-4\varphi'(x)}{8}$ et ϕ(x) = $[\frac{-\varphi'(x)-4\varphi(x)}{8}]'$

On en déduit que

Φ(x) = $\frac{-\varphi'(x)-4\varphi(x)}{8}$ est une primitive de ϕ sur [0 ; π] le calcul donne

$$\boxed{\Phi(x) = -\frac{e^{-2x}}{4}(\cos(2x) - \sin(2x))}$$

c- Calcul du volume V

V = $\pi\int_0^{\pi} f^2(x)dx \,.UV$ = $\pi\int_0^{\pi} e^{-2x}sin^2$(x)dx. UV = $\pi\int_0^{\pi} e^{-2x}(\frac{1-\cos(2x)}{2})dx.UV$

V = $\pi\int_0^{\pi}(\frac{e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}\cos(2x)}{2}dx).UV = \pi\left[-\frac{e^{-2x}}{4} - \frac{\Phi(x)}{2}\right]_0^{\pi}\times$ UV

V = $\frac{\pi}{8}$(3-$e^{-2\pi}$).UV

Supposons que l'espace soit muni d'un repère orthogonal (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) tels que $\|\vec{\imath}\|$ = 2cm ; $\|\vec{\jmath}\| = 10cm$; $\|\vec{k}\|$ = 1cm alors UV = 2cm×10cm×1cm = 20 cm^3

$$\boxed{V = \frac{5\pi}{2}(3-e^{-2\pi})\ cm^3}$$

PARTIE C

On pose U_n=$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx$

1°) Montrons que : U_n= $\frac{n}{1+n^2}$(1- $e^{-\pi}\cos(nx)$)

$$U_n=\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx$$

Première intégration par parties

Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = \sin(nx)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = ncos(nx)\end{cases}$

U_n= $[-e^{-x}\sin(nx)]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} e^{-x}cos(nx)dx = n\int_0^{\pi} e^{-x}cos(nx)dx$

Deuxième intégration par parties

Posons $\begin{cases} p'(x) = e^{-x} \\ q(x) = cos(nx)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = -e^{-x} \\ q'^{(x)} = -nsin(nx)\end{cases}$

U_n= n $[-e^{-x}cos(nx)]_0^{\pi}$ - $n^2\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx$

= n(1- $e^{-\pi}\cos(n\pi)$) - n^2U_n

(1+n^2) U_n = n(1- $e^{-\pi}\cos(n\pi)$) ⇔ $\boxed{U_n= \frac{n}{1+n^2}(1- e^{-\pi}\cos(n\pi))}$

b- Déduisons que : pour tout n ∈ ℕ; $|U_n| \leq \frac{2n}{1+n^2}$

pour tout n ∈ ℕ; , -1$\leq \cos(nx) \leq 1 \Leftrightarrow$ 1-$e^{-\pi} \leq 1 - e^{-\pi}\cos(nx) \leq 1 + e^{-\pi}$

On a donc pour tout n ∈ ℕ , $0 < \ 1 - e^{-\pi}\cos(nx) < 2$ par conséquent si $n \neq 0$, alors on a :

$0 < \frac{n}{1+n^2}(\ 1 - e^{-\pi}\cos(nx)) < \frac{2n}{1+n^2} \ \Leftrightarrow \ 0 < \ U_n \ < \frac{2n}{1+n^2}$ l'égalité a lieu pour n=o.

On conclut donc pour tout n ∈ ℕ, 0 ≤ $U_n \ \leq \frac{2n}{1+n^2}$ c'est-à- dire :

$\boxed{\textbf{pour tout n} \in \mathbb{N} \textbf{ ; } |U_n| \leq \frac{2n}{1+n^2}}$

2°) Déduisons que la suite (U_n) est convergente

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0$

Alors la suite (U_n) est convergente et $\lim_{x\to+\infty} (U_n)$ = 0 (Théorème de Comparaison

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2005
Session Normale
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

1°) Calculer $(2 + 4i)^2$

2°) On considère dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

(E) : $z^3 + (3 - 8i)z^2 - (13 + 12i)z + 9 + 20i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution réel que l'on déterminera

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3°) On donne dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = -3 + 2i$; $Z_B = 1$ $Z_C = -1 + 6i$

a) Calculer $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.

b) Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe, $2 + 4i$ Calculer l'affixe Z_D du point D

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD

EXERCICE II (4 points)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(o\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$ ($\|\vec{i}\,\| = 1$cm et $\|\vec{j}\,\| = 3$cm). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = t - 2\sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

A tout instant t, M(t) est le point de (C) de coordonnées (x(t) ; y(t)).

1°) Montrer que le point $M(t + 2\pi)$ est l'image du point M(t) par une translation dont on précisera le vecteur de translation.

2°) Montrer que M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe de ordonnées.

3°) Calculer x'(t) et montrer que :

$$\begin{cases} x'(t) \leq 0 \text{ pour } t \in \ [0;\frac{\pi}{3}] \\ x'(t) > 0 \ pour\ t \in]\frac{\pi}{3};\pi] \end{cases}$$

4°) Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun, pour $t \in [0;\pi]$

5°) Tracer la partie (C1) de (C) correspondant à $t \in [-\pi;\pi]$

6°) Dire comment à partir de (C1), on peut obtenir la courbe (C2) de (C) correspondant à $t \in [-\pi;3\pi]$. On donne $\frac{\pi}{2} - 2 \approx -0{,}4$; et $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}68$

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. On note (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$ d'unité graphique 2cm.

PARTIE A

Etude de f et construction de (Cf)

1°) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2°) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe (Cf) en $-\infty$ et préciser la position de (Cf) par rapport à (Δ).

3°) a) Calculer la dérivée première f ' et la dérivée seconde f '' de f.

b) Etudier les variations de f ' et dresser son tableau de variations.

c) Calculer f '(1) et en déduire le signe de f '(x) pour tout réel x.

d) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $1{,}9 \leq \alpha \leq 2$ et $-0{,}6 \leq \beta \leq -0{,}5$.

5°) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \longrightarrow +\infty$ puis tracer (Δ) et (Cf)

PARTIE B (Recherche d'une approximation de α)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle$]0 ; +\infty[$par

$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$ sur$]0 ; +\infty[$

2°) Etudier les variations de g

3°) Soit $I = [1{,}9 ; 2]$.

a) Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$

b) Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

4°) Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout n de ℕ.

a) Montrer que pour tout n de ℕ ; $U_n \in I$.

b) Démontrer que pour tout n de ℕ ; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$, puis, que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$

c) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

PARTIE C (Calcul d'aire)

1°) En intégrant par parties, Calculer $J = \int_1^{\alpha} xe^{x-1}\,dx$

2°) a) Calculer en unité d'aire (ua), l'aire A de la portion du plan limitée par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$

b) Montrer que $A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$

On donne $e \approx 2{,}72$; $e^{0,9} \approx 2{,}46$; $e^{-1,5} \approx 0{,}22$; $e^{-1,6} \approx 0{,}20$; $\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0{,}92$ et $\ln\left(\frac{48}{19}\right) \approx 0{,}93$.

Année 2005

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1) Calculons $(2+4i)^2$

$(2+4i)^2$= 4 + 16i -16 = -12 + 16i ⇔ $(2+4i)^2$ = -12 + 16i

2) (E) : z^3 + (3-8i) z^2 - (13 + 12i)z + 9 + 20i = 0

a- Montrons que (E) admet une solution réelle.

Soit z_0 une solution réelle de (E) ; posons z_0 = a ; a ∈ IR

On a: a^3 + (3-8i) a^2 - (13 + 12i) a + 9 + 20i = 0

⇔ (a^3 + 3a^2 - 13a + 9) + i(-8a^2 - 12a + 20) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3a^2 - 13a + 9 = 0 \\ -8a^2 - 12a + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3a^2 - 13a + 9 = 0 \ (1) \\ 2a^2 + 3a - 5 = 0 \ (2) \end{cases}$$

Résolution de l'équation (2)

$2a^2 + 3a - 5 = 0$

Δ = 49 ⇔ $\sqrt{\Delta}$ = 7

a = 1 ou a = $-\frac{5}{2}$

Vérification de l'équation (1)

Pour a = 1, on a : $(1)^3 + 3(1)^2 - 13(1) + 9$ = 13 – 13 = 0 ⇔ pour a = 1 ; (1) est vrai

Pour a = $-\frac{5}{2}$, on a : $(-\frac{5}{2})^3 + 3(-\frac{5}{2})^2 - 13(-\frac{5}{2}) + 9 = \frac{357}{8} \neq 0$ ⇔ pour a = $-\frac{5}{2}$, (1) est fausse

On déduit donc que 1 est solution de (1) et (2) d'où a = 1 et $\boxed{z_0 = 1}$

b- Résolution de l'équation (E)

Notons P(z) = z^3 + (3-8i) z^2 - (13 + 12i)z + 9 + 20i = 0

D'après a) on a P(1) = 0, d'ou P(z) = (z – 1)((az^2+ bz + c), avec a, b et c des complexes à déterminer.

P(z) = (z – 1) (az^2+ bz + c) = az^3 + (b-a) z^2 + (c – b)z – c

Par indentification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 - 8i \\ c - b = -1 - 12i \\ -c = 9 + 20i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 - 8i \\ c = -9 - 20i \end{cases}$$

P(z) = (z – 1)(z^2+ (4 - 8i)z -9 -20i)

(E) : (z – 1)(z^2+ (4 - 8i)z -9 -20i) = 0

⇔ z = 1 ou z^2+ (4 - 8i)z -9 -20i = 0

Résolution de l'équation : z^2+ (4 - 8i)z -9 -20i = 0

Δ = $(4-8i)^2$ - 4(-9 – 20i) = -12 + 16i = $(2+4i)^2$

Les racines carrées de Δ sont :2 + 4i ou -2 – 4i

$z_1 = \frac{-4+8i-2-4i}{2}$ = -3 +2i ; $z_2 = \frac{-4+8i+2+4i}{2}$ = -1 +6i

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{1 ; -3+2i ; -1+6i\}}$

3°) Z_A = -3 +2i ; Z_B = 1 ; Z_C = -1 +6i

a) Calculons $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{1+2i}{2-i} = \frac{5i}{5} = i \Leftrightarrow \boxed{\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i}$

Déduisons la nature du triangle ABC

$\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = |i| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AB = AC$

$\arg(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

AB = AC et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

b) Calculons l'affixe du point D

D est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2 + 4i. On a :

$Z_D = Z_B + 2 + 4i = 1 + 2 + 4i = 3 + 4i \quad \Leftrightarrow \boxed{Z_D = 3 + 4i}$

c) Nature du quadrilatère ABDC

Montrons d'abord que ABDC est un parallélogramme

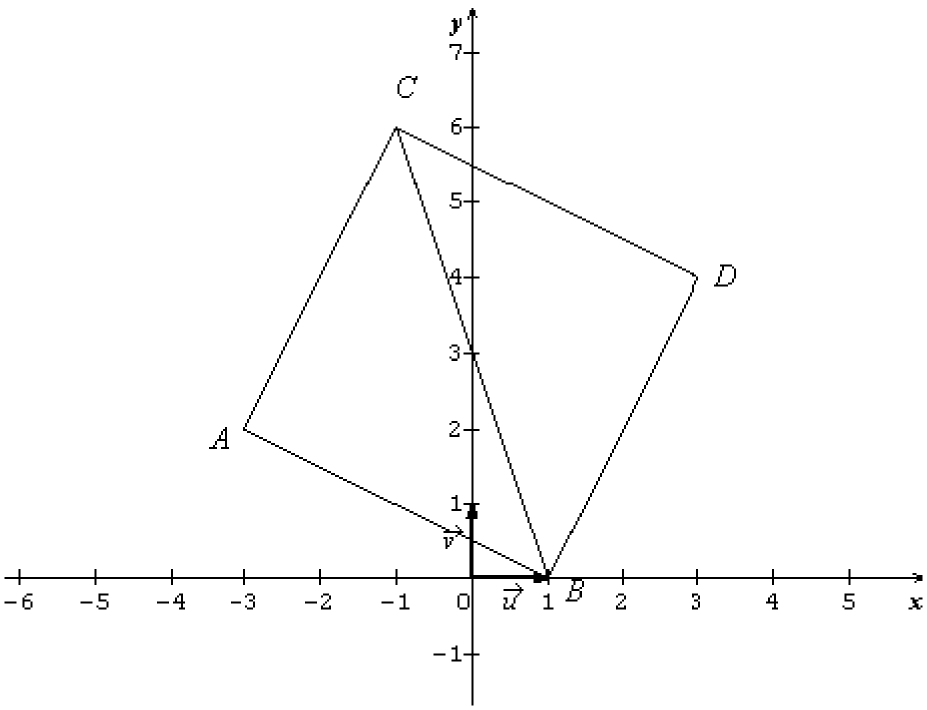
ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 1 + 3\text{-}2i = 4 - 2i$

$Z_{\overrightarrow{CD}} = Z_D - Z_C = 3 + 4i + 1 - 6i = 4 - 2i$

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et par conséquent ABDC est un parallélogramme.

Par ailleurs AB = AC et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, on en déduit que ABDC est un quadrilatère qui a 4 cotés égaux et 4 angles droits.



En conclusion le quadrilatère ABDC est un carré.

<u>EXERCICE II</u>

$(C) \begin{cases} x(t) = t - 2\sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad (t \in IR)$

1°) Montrons que M(t + 2π) est l'image de M(t) par une translation.

$M(t + 2\pi) = t_{\vec{u}}(M(t))$ si et seulement si $\overrightarrow{M(t)M(t + 2\pi)} = \vec{u}$

$M(t+2\pi) : \begin{cases} x(t+2\pi) = t + 2\pi - 2\sin(t+2\pi) = 2\pi + t - 2\text{sint} = 2\pi + x(t) \\ y(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) = cost = y(t) \end{cases}$

M(t)(x(t) ; y(t)) ; M(t+2π)(2π + x(t) ; y(t))

$\overrightarrow{M(t)M(t+2\pi)} \binom{2\pi + x(t) - x(t)}{y(t) - y(t)} \Leftrightarrow \overrightarrow{M(t)M(t+2\pi)} \binom{2\pi}{0}$ Par conséquent

M(t + 2π) est l'image de M(t) par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{2\pi}{0}$.

2°) Montrons que M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$M(-t) : \begin{cases} x(-t) = -t - 2\sin(-t) = -t + 2sint = -x(t) \\ y(-t) = \cos(-t) = \text{cost} = y(t) \end{cases}$

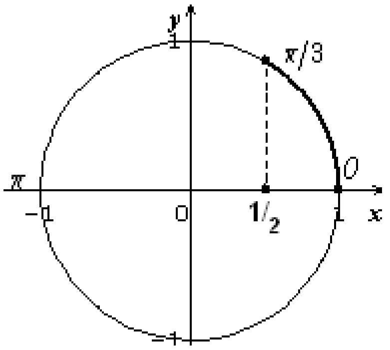
M(t)(x(t) ; y(t)) et M(-t)(-x(t) ; y(t)), alors M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

3°) Calcul de x'(t)

$x(t) = t - 2\sin t \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x'(t) = 1\text{-}2cost}}$

x'(t) ≤ 0 ⇔ 1-2cost ≤ 0

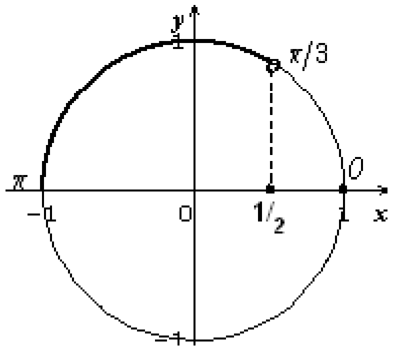
⇔ cost ≥ $\frac{1}{2}$



⇔ t ∈ [0 ; $\frac{\pi}{3}$]

x'(t) > 0 ⇔ 1-2cost > 0

⇔ cost < $\frac{1}{2}$



⇔ t ∈]$\frac{\pi}{3}$; π]

Par conséquent :

x'(t) ≤ 0 pour t ∈ [0 ; $\frac{\pi}{3}$] et x'(t) > 0 pour t ∈]$\frac{\pi}{3}$; π]

4°) Etude des variations de x et y sur [o ; π]

- <u>Variation de x</u>

x est décroissante sur [0 ; $\frac{\pi}{3}$] et croissante sur]$\frac{\pi}{3}$; π]

-<u>Variations de y</u>

y'(t) = -sint

pour t ∈[o ; π], sint ≥ 0 ⇔ y'(t) = -sint ≤ 0, alors y est décroissante

Tableau commun des variations

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
x'(t)	-1	-	0	+	3
y'(t)	0	-	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-	0
x(t)	0	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π
y(t)	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	-1

Tangentes

(T_0) : y = 1 ; $(T_{\frac{\pi}{3}})$: x = $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$; (T_π) : y = -1

5°) Construction de (C_1)

Point d'intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses

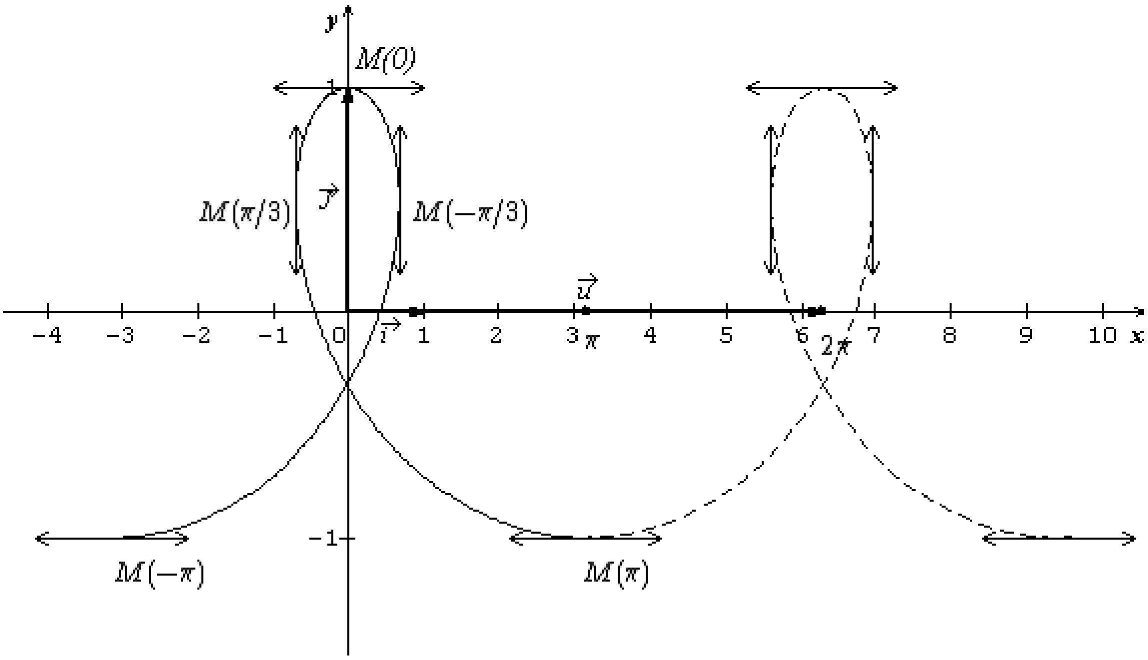
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) = 0 \end{cases}$$

$y(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ si $t \in [o ; \pi]$

$x = x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 2$

$(\frac{\pi}{2} - 2 ; 0)$ est le point d'intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses

On construit la partie de (C_1) pour $t \in [o ; \pi]$ puis on effectue la symétrie par rapport à (oy) pour obtenir (C_1).



6°) Comment obtenir la courbe (C_2)

$[-\pi\ ;\ 3\pi] = [-\pi\ ;\ \pi] \cup [\pi\ ;\ 3\pi]$

Pour obtenir (C_2), il suffit de faire la translation de (C_1) de vecteur $\vec{u}\binom{2\pi}{0}$.

PROBLEME

$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

PARTIE A : Etude de f et représentation

1°) Calcul des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x + 1 - xe^{x-1}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x + 1 - xe^{x}\times e^{-1}) = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x + 1 - xe^{x-1}) = +\infty - \infty$.(FI)

Levons l'indétermination

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(2 + \frac{1}{x} - xe^{x}\times e^{-1}) = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \end{cases}$

2°) Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe (Cf) en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-y) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-xe^{x-1}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-xe^{x}\times e^{-1}) = 0$, alors (Δ) : $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à (Cf)

Position de (Cf) par rapport à (Δ)

Etudions le signe de (f(x)-y)

$f(x)-y = -xe^{x-1}$

$\forall x \in IR$, $e^{x-1} > 0$, alors le signe de f(x)-y dépend de celui de $-x$. Par conséquent

-sur $]-\infty\ ;\ 0[$, (Cf) est au dessus de (Δ)

-sur $]0\ ;\ +\infty[$, (Cf) est en dessous de (Δ)

3°) a) Calcul de la dérivée f ' et la dérivée seconde f '' de f

$f'(x) = 2 - e^{x-1} - xe^{x-1} = 2 - (x+1)e^{x-1}$

$\boxed{f'(x) = 2 - (x+1)e^{x-1}}$

$f''(x) = -e^{x-1} - (x+1)e^{x-1} = -(x+2)e^{x-1}$

$\boxed{f''(x) = -(x+2)e^{x-1}}$

b) Variations de f '

$f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$

$\forall x \in IR$, $e^{x-1} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $-x-2$. Par conséquent

Pour $x \in]-\infty\ ;\ -2[$, $f''(x) > 0$,

Pour $x \in]-2\ ;\ +\infty[$, $f''(x) < 0$.

f ' est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ -2[$ et strictement décroissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	
$f'(x)$	2	↗	$2+e^{-3}$	↘	$-\infty$

c) Calcul de f '(1) et déduction du signe de f '(x).

f '(1) = 2 – 2 = 0 donc f '(1) = 0

- Pour x ∈]-∞ ; 1[, f '(x) ∈]0 ; 2+e^{-3} [⇔ f '(x) > 0

- Pour x ∈]1 ; +∞[, f '(x) ∈]-∞ ; 0[⇔ f '(x) < 0

- Pour x = 1 f '(x) = 0

d) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

4°) Sur]-∞ ; 1[, f est dérivable et strictement croissante. Elle réalise une bijection de]-∞ ; 1[sur]-∞ ; 2[qui contient 0 donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution β dans]-∞ ; 1[.

Sur] 1; +∞ [, f est dérivable et strictement décroissante. Elle réalise une bijection de]1 ; +∞ [sur] -∞ ; 2[qui contient 0 donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans] 1; +∞ [

Montrons que $1{,}9 \leq \alpha \leq 2$ et $-0{,}6 \leq \beta \leq -0{,}5$

$[1{,}9 ; 2] \subset]1 ; +\infty[$ et f(1,9) = +0,126 ; f(2) = -0,44

f(1,9)× f(2) < 0, alors 1,9 ≤ α ≤ 2.

$[-0{,}6 ; -0{,}5] \subset]-\infty ; 1[$ et f(-0,6) = -0,08 ; f(-0,5) = 0,11

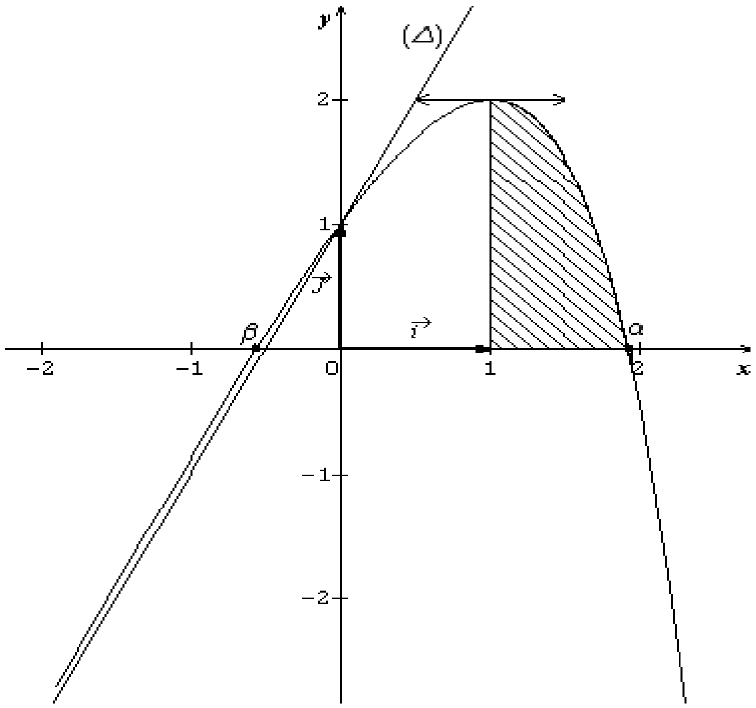
f(-0,6) × f(-0,5) < 0, alors -0,6 ≤ β≤ -0,5

5°) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1-xe^{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x} - e^{x-1}\right) = -\infty$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ **, alors (Cf) admet une branche parabolique de direction (Oy).**

Tracée de la courbe (Cf) et (Δ)



PARTIE B : Recherche d'une approximation de α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par

$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1°) Démontrons que f(x) = 0 équivaut à g(x) = x sur] 0 ; +∞ [

Pour tout x ∈] 0 ; +∞ [, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 - xe^{x-1} = 0$

$$\Leftrightarrow xe^{x-1} = 2x + 1 \Leftrightarrow e^{x-1} = 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

Or $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ .Donc pour tout x ∈] 0 ; +∞ [, $\boxed{\textbf{f(x) = 0 équivaut à g(x) = x}}$

2°) Etude des variations de g

$g'(x) = \frac{-1}{x(2x+1)} = \frac{-1}{2x^2+x} < 0$ pour tout x ∈] 0 ; +∞ [, alors g est strictement décroissante sur] 0 ; +∞ [.

3°) On pose I = [1,9 ; 2]

a) Montrons que pour tout x ∈ I, g(x) ∈ I

g(I) = g([1,9 ; 2]) = [g(2) ; g(1,9)] = [1,92 ; 1,93] ⊂ [1,9 ; 2]

g(I) ⊂ I, alors pour tout x ∈ I, g(x) ∈ I

b) Montrons que pour tout x ∈ I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

$g''(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^2} > 0$, pour tout x ∈] 0 ; +∞ [; alors g' est strictement croissante sur] 0 ; +∞ [.

On a donc

g'(I) = g'([1,9 ; 2]) = [g'(1,9) ; g'(2)] = [-0,109 ; $\frac{-1}{10}$], donc pour tout x ∈ I,

$-0,109 \leq g'(x) \leq \frac{-1}{10}$ d'où pour tout x ∈ I, $|g'(x)| \leq 0,109$, or $\frac{1}{9} \simeq 0,111 \geq 0,109$

On conclut donc que : pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ (CQFD)

4°) On définie la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$, pour tout $n \in IN$.

a) Montrons que pour tout $n \in IN$, $U_n \in I$

Démonstration par récurrence

Pour tout $n \in IN$, désignons par P(n) la propriété : $U_n \in I$

Vérifions que pour n = 0, P(n) est vraie

Pour n = 0, on a : $U_0 = 2 \in I$, **alors pour n = 0 P(n) est vraie**

Montrons que si pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie alors P(n+1) est aussi vraie

Supposons que pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie c'est-à-dire pour tout $n \in IN$, $U_n \in I$.

$U_n \in I \Leftrightarrow g(U_n) \in I$ (car pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$). Or $g(U_n) = U_{n+1}$ donc

$U_n \in I \Leftrightarrow U_{n+1} \in I$; d'où le résultat.

Conclusion

Pour n = 0, P(n) est vraie, et si pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie alors P(n+1) l'est aussi , par suite pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie c'est-à-dire : pour tout $n \in IN$, $U_n \in I$.

b) Démontrons que pour tout $n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$

Appliquons le théorème des accroissements finis :

Pour tout $x \in I$, $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$. Comme pour tout $n \in IN$, $U_n \in I$, posons $x = U_n$.

On a : $|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$, or $g(U_n) = U_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$, alors

$\boxed{\textbf{pour tout } n \in IN, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|}$

Démontrons que pour tout $n \in IN$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10}$

Démonstration par récurrence

Pour tout $n \in IN$, désignons par P(n) la propriété : $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10}$

Vérifions que pour n = 0, P(n) est vraie

Pour n = 0, $|U_0 - \alpha| = |2 - \alpha|$, or $1,9 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2 - \alpha \leq 0,1$

$\Leftrightarrow |2 - \alpha| \leq 0,1$ soit $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}$. On en déduit :

$|U_0 - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^0 \times \frac{1}{10}$, **donc pour n = 0 P(n) est vraie.**

Montrons que si pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie alors P(n+1) est aussi vraie.

Supposons que pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie c'est-à-dire pour tout $n \in IN$,

$|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10}$; alors on a :

$|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{9}|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^{n+1} \times \frac{1}{10}$. Or pour tout $n \in IN$,

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$, alors on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^{n+1} \times \frac{1}{10}$ c'est-à-dire

$|U_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^{n+1} \times \frac{1}{10}$ **; d'où le résultat.**

Conclusion

Pour n = 0, P(n) est vraie, et si pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie alors P(n+1) l'est aussi , par conséquent pour tout $n \in IN$, P(n) est vraie c'est-à-dire :

pour tout $n \in IN$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10}$

c) Déduisons que (U_n) est convergente

Pour tout n ∈ IN, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10} = 0$ **car** $0 < \frac{1}{9} < 1$**, On en déduit que la suite** (U_n) **est convergente et**

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$

PARTIE C

1°) Calcul de $J = \int_1^\alpha xe^{x-1}\,dx$

Intégration par parties

Posons : $\begin{cases} u'(x) = e^{x-1} \\ v(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{x-1} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$J = [xe^{x-1}]_1^\alpha - \int_1^\alpha e^{x-1}\,dx = [xe^{x-1} - e^{x-1}]_1^\alpha \Leftrightarrow \boxed{J = \alpha e^{\alpha-1} - e^{\alpha-1} = (\alpha - 1)\,e^{\alpha-1}}$

2°) a) Calcul de l'aire A

$A = \int_1^\alpha f(x)\,dx \times U.A = \int_1^\alpha (2x + 1 - xe^{x-1})\,dx \times U.A$

$= [\int_1^\alpha (2x + 1)\,dx - J] \times U.A = ([x^2 + x]_1^\alpha - J) \times U.A$

$\boxed{\mathbf{A = (\alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)\,e^{\alpha-1}) \times U.A}}$

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 - \alpha e^{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = 2 + \frac{1}{\alpha}$

$A = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)(2 + \frac{1}{\alpha}) = (\alpha - 1)(\alpha - 2) - (\alpha - 1)(2 + \frac{1}{\alpha})$

$A = (\alpha - 1)(\alpha + 2 - 2 - \frac{1}{\alpha}) \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{A(\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - \frac{1}{\alpha})}}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2004
Session Normale
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

Le plan complexe est muni repère orthonormé $(o; \vec{u}\,; \vec{v})$. Soit P(z) le polynôme défini par :
$P(z) = z^3 + (1\text{-}5i)\,z^2 - 4z + 16$ ou z désigne un nombre complexe.

1°) a) Montrer que l'équation P(z) = 0, admet une solution imaginaire pure z_0.

b) Achever la résolution de l'équation P(z) = 0. On appelle z_1, z_2 les deux autres racines, avec la partie réel de z_1 négative

c) Ecrire z_1,z_2, et z_0 sous forme trigonométrique.

2°) Soient A ; B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2, et z_0. Déterminer en radian la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AB})$, puis en déduire la nature du triangle ABC

3°) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $z_{A'}$; l'affixe de A' tel que A' = r(A)

b) Quelle est la nature du quadrilatère OACA'

EXERCICE II (4 points)

Un sac contient 5 jetons Rouges et 2 jetons blancs tous indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer au hasard un jeton du sac. Si le jeton est Rouge, le jeu s'arrête ; si non on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac. La mise est de 50F. Le tirage d'un jeton blanc rapporte 200F, tandis que celui d'un jeton Rouge ne rapporte rien.

Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque jeu associe le gain algébrique du joueur.

1°) a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Déterminer la fonction de répartition de X puis la représenter graphiquement.

2°) Soit A l'événement : ≪ Le joueur a un gain positif ≫. Montrer que $P(A) = \frac{2}{7}$

3°) Un joueur joue successivement, de façon indépendante, 5 jeux. Il remet à la fin de chaque jeu les jetons dans le sac. Soit Y la variable aléatoire réelle qui, à ces 5 jeux associe le nombre de fois ou l'événement A est réalisé.

Justifier que Y suit une loi binomiale et calculer la probabilité que le joueur obtienne au moins une fois un gain positif au cours des 5 jeux.

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction Numérique f définie par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et on désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ unité : 4cm

PARTIE A

1°) a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2°) a) Justifier que est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x l'expression f '(x)

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

3°) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera. Expliciter la bijection réciproque f^{-1}

b) Construire dans le même la courbe (Cf) et la courbe représentative (Γ) de f^{-1}. On justifiera le tracé de (Γ) sans étudier les variations de f^{-1}.

4°) a) soit λ > 0, calculer en cm^2, l'aire A(λ) de la partie du plan limitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations x = 0 et x = λ et y = 0

b) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

PARTIE B

Soit la fonction h définie par : $h(x) = 1- xe^{x} - x$

1°) Calculer pour tout réel x, les expressions h'(x) et h''(x) de la dérivée première et la dérivée seconde de h

2°) Etudier le sens de variation de h' et calculer h'(-2). En déduire le signe de h'

3°) a) Quel est le sens de variation de h ? Dresser son tableau de variations.

b) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α

et vérifier que α ∈ [0 ; 1]

4°) Montrer que α est solution de l'équation f(x) = x.

5°) soit I = [0 ; 1].

a) Montrer que pour tout x ∈ [0 ; 1] , f(x) est élément de I

b) Montrer que si x ∈ $[0\ ;\ 1]$ alors $(1+e^{-1})^2 \leq (1+e^{-x})^2 \leq 4$

c) En déduire que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq (\frac{e}{1+e})^2$

6°) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, U_n est élément de I

b) On pose $k = \frac{e}{1+e}$, montrer en utilisant l'inégalité de la moyenne que pour tout réel x de I, $|f(x) - \alpha| \leq k^2|x - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha|$ puis que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$

d) En déduire que U_n est convergente et préciser sa limite.

On donne $e \approx 2{,}72$ $e^{-1} \approx 0{,}37$ $e^{-0{,}5} \approx 0{,}61$ $e^{0{,}5} \approx 1{,}65$

Année 2004
Corrigé

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

On considère le polynôme :

$P(z) = z^3 + (1-5i)\,z^2 - 4z + 16$

1°) a- Montrons que l'équation $P(z) = 0$, admet une solution imaginaire pure z_0

Posons $z_0 = ib$, ou b est un réel non nul à déterminer.

On a: $P(z_0) = P(ib) = 0$

$P(ib) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 + (1-5i)(ib)^2 - 4(ib) + 16 = 0 \Leftrightarrow (-b^2 + 16) + i(-b^3 + 5b^2 - 4b) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + 16 = 0 \ (1) \\ -b^3 + 5b^2 - 4b = 0 \ (2) \end{cases}$$

(1) $-b^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 4 \Leftrightarrow S_1 = \{-4\,;4\}$

(2) $-b^3 + 5b^2 - 4b = 0 \Leftrightarrow b(b^2 - 5b + 4) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$ car $b \neq 0$

$\Delta = 9 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 3$; $b = 1$ ou $b = 4 \Leftrightarrow S_2 = \{1\,;4\}$

$S_1 \cap S_2 = \{4\} \Leftrightarrow b = 4$

On en déduit que $\boxed{z_0 = 4i}$

b- Achèvement de la résolution de l'équation $P(z) = 0$

$P(4i) = 0 \Leftrightarrow P(z) = (z-4i)(az^2 + bz + c)$; a, b et c des complexes à déterminer.

Méthode d'identification des coefficients

$P(z) = (z-4i)(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + (b - i4a)z^2 + (c - i4b)z - i4c$

Par identification on a:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - i4a = 1 - 5i \\ c - i4b = -4 \end{cases} \text{ et } -i4c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - i \\ c = 4i \end{cases}$$

$P(z) = (z-4i)(z^2 + (1-i)z + 4i)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 4i$ ou $z^2 + (1-i)z + 4i = 0$

$z^2 + (1-i)z + 4i = 0$; $\Delta = -18i$

Soit $\delta = x + iy \,/\, \delta^2 = -18i$. On a:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 18 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$ Donc $\boldsymbol{\delta = 3 - 3i}$ **ou** $\boldsymbol{\delta = -3 + 3i}$

$z_1 = \frac{-1+i-3+3i}{2} = -2+2i$; $z_2 = \frac{-1+i+3-3i}{2} = 1-i$; $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{4i\,;\ -2+2i\ ;\ 1-i\}}$

c-) Forme trigonométrique de z_0 ; z_1; z_2 .

$z_0 = 4i \Leftrightarrow \boxed{z_0 = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}$

$z_1 = -2+2i \Leftrightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$; $\arg(z_1) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \boxed{z_1 = 2\sqrt{2}\,(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))}$

$z_2 = 1-i \Leftrightarrow |z_2| = \sqrt{2}$; $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{2}\,(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))}$

2°) Soient A ;B ;C les points d'affixes respectives z_1; z_2; et z_0

Déterminons en radian la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AB})$

$(\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AB}) = \arg(\frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}) = \arg(\frac{2}{3}i) \Leftrightarrow \boxed{(\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})}$

Déduisons la nature du triangle ABC

$(\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$.

On en déduit que ABC est un triangle rectangle en A.

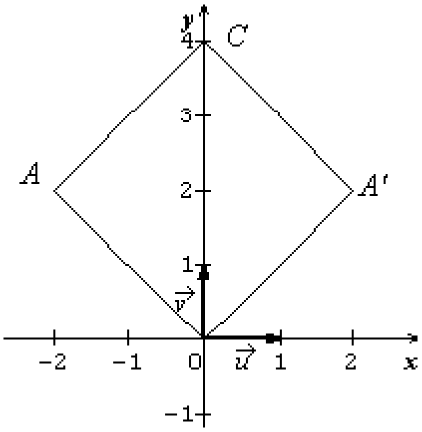
3°) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a- Calcul de $z_{A'}$.

r(A) = A' $\Leftrightarrow z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_A \Leftrightarrow z_{A'} = -i(-2 + 2i) = 2 + 2i$

$\Leftrightarrow \boxed{z_{A'} = 2 + 2i}$

b- Nature du quadrilatère OACA'



Comme A'= r(A) , on a: OA = OA' et $(\overrightarrow{OA}\,;\ \overrightarrow{OA'}) = -\frac{\pi}{2}$ Il suffit donc de montrer que OACA' est un parallélogramme.

OACA' est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'C}$

$z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = z_1 = -2+2i$; $z_{\overrightarrow{A'C}} = z_C - z_{A'} = 4i - (2+2i) = -2 + 2i$

$z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{A'C}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'C}$ **, alors OACA' est un parallélogramme**.

D'autre part, OA = OA' et $(\overrightarrow{OA}\,;\ \overrightarrow{OA'}) = -\frac{\pi}{2}$ donc le quadrilatère OACA' a 4 cotés égaux et 4 angles droits

Conclusion

Le quadrilatère OACA' est un carré

EXERCICE II

Premier essaie :

Rouge (R) : P(R) =5/7

Blanc (B) : P(B) = 2/7

Si le premier essaie donne un jeton blanc, alors le joueur a droit à un deuxième essaie

Deuxième essaie :

Rouge (R) : P(R) = 5/6

Blanc (B) : P(B) = 1/6

Les résultats possibles de ce jeux sont donc : R ; BR ou BB

1°) a- Les valeurs prises par X sont :

$\Omega = \{R\,;BR\,;BB\}$; $X(\Omega) = \{-50\,;\ 200\,;\ 400\}$

b- La loi de probabilité de X

P(R) = $\frac{5}{7}$; P(BR) = $\frac{2}{7} \times \frac{5}{6}$; P(BB) = $\frac{2}{7} \times \frac{1}{6}$

x_i	-50	150	350	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

c- Fonction de répartition de X

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = p(X \leq x)$

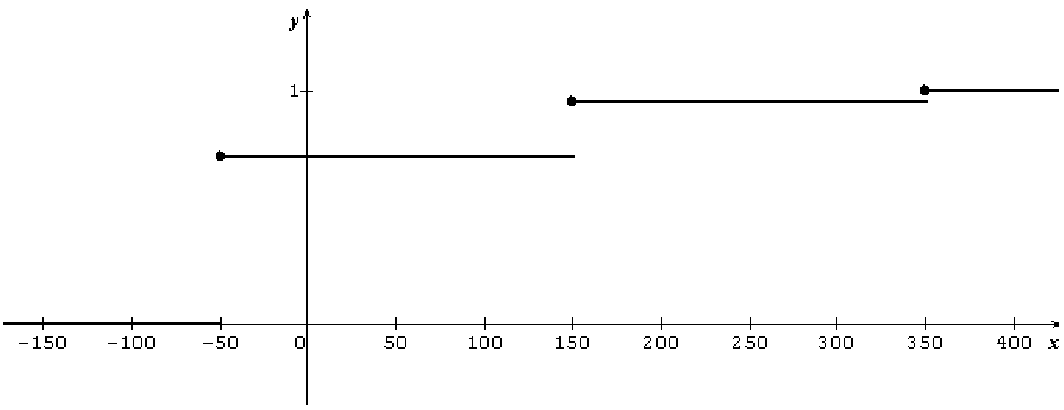
-pour $x \in]-\infty ; -50[$; F(x) = 0

- pour $x \in [-50 ; 150[$; F(x) = $\frac{5}{7}$

- pour $x \in [150 ; 350[$; F(x) = $\frac{20}{21}$

- pour $x \in [350 ; +\infty[$; F(x) = 1

Représentation de la fonction de répartition



2°) A : ≪ Le joueur a un gain positif ≫

A = $\overline{(X = -50)}$ ⟺ P(A) = 1- P(X = -50) = 1- $\frac{5}{7}$

Donc $\boxed{\mathbf{P(A) = \frac{2}{7}}}$ CQFD

3°) Un joueur effectue successivement de façon indépendante 5 jeux.

Justifions queY suit une loi binomiale.

Un jeu est une épreuve de Bernoulli, le succès est l'événement A et l'échec $\overline{A}$

Y suit donc une loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{2}{7}$

Calculons la probabilité que le joueur obtienne au moins une fois un gain positif. C'est la probabilité de l'évènement (Y≥1).

$P(Y\geq1) = 1- P(Y<1) = 1- P(Y=0) = 1 - C_5^0\left(\frac{2}{7}\right)^0\left(\frac{5}{7}\right)^5 \iff \boxed{\mathbf{P(Y\geq1) = \frac{13682}{16807} \approx 0,814}}$

PROBLEME

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

PARTIE A

1°) a- Justifions que f est définie sur $\mathbb{R}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 + e^{-x} \neq 0\}$

$1 + e^{-x} \neq 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

b- Calcul des limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+1-1}{1+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 - \frac{1}{1+e^{-x}})$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{1+e^{-x}}) = 0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 0$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)

2°) a- Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f étant le quotient de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}$ alors est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathbf{f'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}}$

b- Sens de variation de f

$\forall \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $(1 + e^{-x})^2 > 0$ donc f'(x) < 0 et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation

x	$-\infty$ $+\infty$
f'(x)	-
f(x)	1 ↘ 0

3°) a- Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J.

f est continue sur $\mathbb{R}$, car dérivable sur cet ensemble et est strictement décroissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]0 ; 1[$

Explicitons la fonction réciproque f^{-1}

Soit $y \in]0 ; 1[$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = y \Leftrightarrow (1-y)\, e^{-x} = y$

$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = -\ln(\frac{y}{1-y}) \Leftrightarrow x = \ln(\frac{1-y}{y}) = f^{-1}(y)$

$\mathbf{f^{-1} :]0 ; 1[\to \mathbb{R}}$

$\mathbf{x \mapsto f^{-1}(x) = \ln(\frac{1-x}{x})}$

b- Construction de (C f) et de (Γ)

Asymptotes

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, alors la droite d'équation y = 1 est une asymptote horizontale à (C f)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à (C f)

Points d'intersection avec l'axe des ordonnées

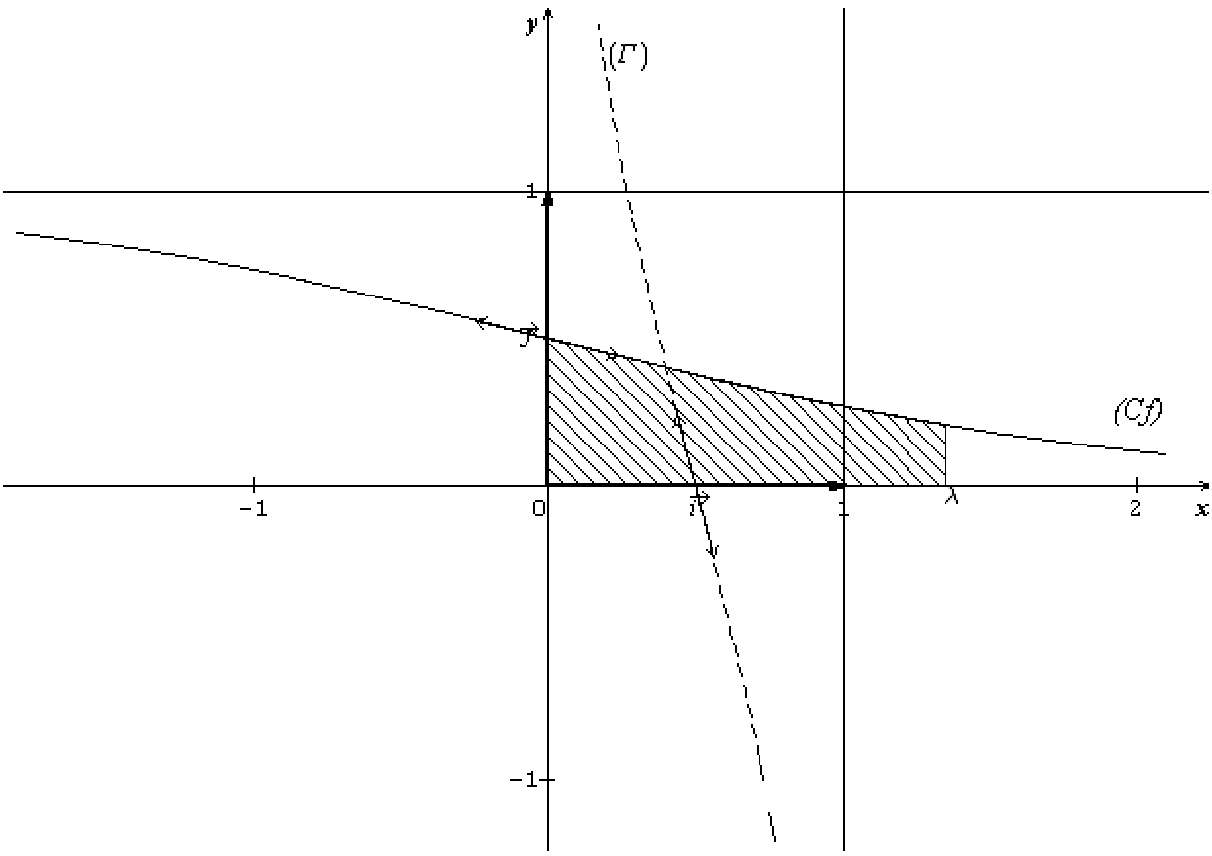
$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{(C\,f) \cap (oy) = \left\{(0 ; \frac{1}{2})\right\}}}$

Tangente à (C f) au point $(0 ; \frac{1}{2})$

(T) : y = f'(0)(x – 0) + f(0) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{(T) : y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}}$

Unité graphique 4cm

(C f) et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x



4°) a- Calcul de l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx.$ UA = $\int_0^\lambda \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx.$ UA $= [-\ln(1+e^{-x})]_0^\lambda.$ UA

$\mathcal{A}(\lambda) = (-\ln(1+e^{-\lambda}) + \ln 2).$ UA = $\ln(\frac{2}{1+e^{-\lambda}})$. UA

UA = 4cm × 4cm = 16cm^2 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathcal{A}(\lambda) = 16\ln(\frac{2e^{\lambda}}{1+e^{\lambda}})\ \mathrm{cm}^2}$

b- Calcul de la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$.

$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} 16\ln(\frac{2}{1+e^{-\lambda}}) = 16\ln 2$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 16\ln 2}$

PARTIE B

On considère h(x) = 1- xe^x - x

1°) Calcul de h'(x) et h''(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{h'(x) = -1 - (x+1)\, e^x}}$ et $\boxed{\mathbf{h''(x) = -(x+2)\, e^x}}$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de h''(x) dépend de celui de (–x-2) .

On en déduit que

h' est strictement croissante sur]-∞ ; -2[et strictement décroissante sur]-2 ;+∞[

h' atteint son maximum pour x = -2 donc

Pour tout ∈ ℝ , h'(x) ≤ h'(-2) or h'(-2) = $e^{-2} - 1 < 0$ alors pour tout x ∈ ℝ , h'(x) < 0.

3°) a- Sens de variation de h

x ∈ ℝ , h'(x) < 0 , alors h est strictement décroissante sur ℝ .

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
h'(x)	-	
h(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$

h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R}) =]-\infty ; +\infty[$. $0 \in]-\infty ; +\infty[$ donc l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α dans $]-\infty ; +\infty[$.

Vérifions que $\alpha \in [0 ; 1]$

$[0 ; 1] \subset]-\infty ; +\infty[$ et de plus $h(0) = 1$, $h(1) = -e^1$ c'est-à-dire $h(0) \times h(1)<0$, alors $\alpha \in [0 ; 1]$.

4°) Montrons α est solution de l'équation f(x) = x

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x + xe^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x - xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1 - xe^{x} - x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - xe^{x} - x = 0$ (car $e^{-x} \neq 0$)

f(x) = x ⇔ h(x) = 0, d'où les deux équations ont même solution . On en déduit que α est solution de l'équation h(x) = 0.

5°) I = [0 ; 1]

a- Montrons que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$

$\mathbf{f(I) = f([0 ; 1]) = [f(1) ; f(0)] = [\frac{e^{-1}}{1+e^{-1}} ; \frac{1}{2}] = [0{,}27 ; 0{,}5] \subset I}$ **donc pour tout x ∈ I , f(x) ∈ I.**

b- Montrons que si $x \in I$, $(1 + e^{-1})^2 \leq (1 + e^{-x})^2 \leq 4$

$x \in [0 ; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + e^{-1} \leq 1 + e^{-x} \leq 2$

$\mathbf{x \in [0 ; 1] \Leftrightarrow (1 + e^{-1})^2 \leq (1 + e^{-x})^2 \leq 4}$ CQFD

c- Déduisons que :

Pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq (\frac{e}{1+e})^2$

$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \Leftrightarrow |f'(x)| = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$x \in [0 ; 1] \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1}$ (1)

$x \in [0 ; 1] \Leftrightarrow (1 + e^{-1})^2 \leq (1 + e^{-x})^2 \leq 4 \Leftrightarrow \mathbf{\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+e^{-x})^2} \leq \frac{1}{(1+e^{-1})^2}}$ (2)

En faisant le produit membre à membre des égalités (1) et (2) on a :

$\mathbf{\frac{e^{-1}}{4} \leq \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \leq \frac{1}{(1+e^{-1})^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{e})^2} = \frac{e^2}{(1+e)^2} = (\frac{e}{1+e})^2}$ **donc Pour tout x ∈ I ,** $\mathbf{|f'(x)| \leq (\frac{e}{1+e})^2}$

6°) Soit $(U_n)_{n \geq 0}$, la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1=f(U_n),n \in \mathbb{N}} \end{cases}$

a- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

Démonstration par récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P(n) la propriété : $U_n \in I$

i)Vérifions que pour n = 0, P(n) est vraie

Pour n = 0, $U_0 = \frac{1}{2} \in I$; **alors pour n = 0 , P(n) est vraie**

ii) Montrons que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, P(n) est vraie , alors P(n+1) est aussi vraie.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P(n) est vraie . On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$U_n \in I$ et $f(U_n) = U_{n+1}$
$U_n \in I \Leftrightarrow f(U_n) \in I$ (car $\forall\ x \in I$, $f(x) \in I$) ; Or $f(U_n) = U_{n+1}$
$U_n \in I \Leftrightarrow U_{n+1} \in I$; d'où le résultat

Conclusion

Pour n = 0, P(n) est vraie et si pour tout $\in \mathbb{N}$, P(n) est vraie , alors P(n+1) l'est aussi par conséquent pour tout n $\in \mathbb{N}$, P(n) est vraie c'est-à-dire pour tout n $\in \mathbb{N}$: $U_n \in I$

b- On pose $k = \frac{e}{1+e}$

$\forall\ x \in [0\ ;\ 1]$, $|f'(x)| \leq (\frac{e}{1+e})^2 \Leftrightarrow |f'(x)| \leq k^2$

Inégalité des accroissements finis

$\forall\ x \in [0\ ;\ 1]$, $|f(x) - f(\alpha)| \leq k^2|x - \alpha|$, or $f(\alpha) = \alpha$ alors

On a : $\boxed{\forall\ x \in [0\ ;\ 1],\ \ |f(x) - \alpha| \leq k^2|x - \alpha|}$

c- Déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha|$ puis que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$

- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha|$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$, posons $x = U_n$, dans la relation précédente. On a :
$|f(U_n) - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha|$, Or $f(U_n) = U_{n+1}$, alors
pour tout n $\in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha|$

-Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$

Démonstration par récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P(n) la propriété : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$

Vérifions que pour n = 0, P(n) est vraie

Pour n = 0, $|U_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

$\alpha \in [0\ ;\ 1] \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}(k^2)^0$, **alors pour n = 0, P(n) est vraie**

Montrons que si pour tout n $\in \mathbb{N}$, P(n) est vraie , alors P(n+1) est aussi vraie.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P(n) est vraie c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$.

On a : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n} \Leftrightarrow k^2|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n+2} = \frac{1}{2}k^{2(n+1)}$

Or $|U_{n+1} - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha|$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|U_{n+1} - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2(n+1)}$, d'où le résultat.

Conclusion

Pour n = 0, P(n) est vraie et si pour tout $\in \mathbb{N}$, P(n) est vraie , alors P(n+1) l'est aussi par conséquent pour tout n $\in \mathbb{N}$, P(n) est vraie c'est-à-dire

$\forall\ n \in \mathbb{N}: |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$

d-Déduisons que (U_n) est convergente

$\lim\limits_{n \to +\infty} k^{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} (k^2)^n = 0$ car $0 < k^2 < 1$, par suite

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2003
Session Normale
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

Dans une famille donnée, on admet qu'une naissance donne un garçon, une fille ou des jumeaux. Une naissance donne dans 30% des cas un garçon et dans 50% des cas une fille. On admet que le sexe de l'enfant ne dépend pas des naissances précédentes.

1°) a) Quelle est la probabilité pour qu'une naissance donne des jumeaux dans la famille ?

b) Calculer la probabilité pour que les trois premières naissances donnent des filles et la quatrième donne un garçon.

2°) On suppose qu'il y a n naissances dans la famille.

a) Calculer en fonction de n, la probabilité P_n d'avoir au moins une naissance donnant des jumeaux.

b) Déterminer le nombre minimale n_0 d'enfants pour que P_n soit supérieur ou égal à 0,97

3°) On suppose qu'il y a trois naissances dans la famille et l'on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants possibles issus des trois naissances.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X

On donne $\frac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}8)} \approx 15{,}95$.

EXERCICE II (4 points)

1°) Soit A ; B ; C trois points non alignés de l'espace

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2°) Soient (Δ) et (Δ') deux droites de même vecteur directeur $\vec{u}$ et H un point de (Δ)

On désigne par H' le projeté de H sur (Δ')

a) Démontrer que pour tout point A de (Δ) et tout point A' de (Δ'), $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$

b) En déduire que : $HH' = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

c) Application numérique : soient A (-1 ; 2 ; 5) et A'(4 ; -1 ; 9) ; soient (Δ) et (Δ') les droites de vecteur directeur $\vec{u}$ (-2 ; 2 ; 1) contenant respectivement A et A'. Calculer la distance de (Δ) à (Δ').

PROBLEME (12 points)

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = (x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$; unité graphique : 2cm

1°) a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Préciser les asymptotes s'il y a lieu.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

c) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique.

Préciser l'abscisse de ce point

2°) a) Donner une équation de la tangent (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

b) On veut préciser la position de (C) par rapport à (T). On pose y = l'équation de (T) et on pose h(x) = f(x) - φ(x)

Calculer h'(x) et h''(x)

Etudier les variations de la fonction h' et en déduire le signe de h'(x) ; puis par un raisonnement analogue, déterminer le signe de h(x).

Préciser alors la position de (C) par rapport à (T)

3°) a) Calculer f(2) et f(4)

b) Tracer (T) puis construire (C)

PARTIE B

1°) Déterminer les réels a et b pour que la fonction F définie sur ℝ par :

$F(x) = (ax + b)\, e^{-\frac{1}{2}x}$ soit une primitive de f sur ℝ

2°) Soit λ un réel supérieur ou égal à -4. Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la surface limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

x = -4 et x = λ

Calculer $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

3°) a) Déterminer les réels α ; β ; γ pour que la fonction G définie sur ℝ par :

$G(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$ soit une primitive de g définie sur ℝ par :

$g(x) = (x^2 + 8x + 16)e^{-x}$

b) Calculer en cm^3 le volume V(λ) du solide engendré par la rotation de la surface définie autour de l'axe des abscisses.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} V(\lambda)$

PARTIE C

Soit k la fonction définie sur ℝ par : $k(x) = |x + 4|e^{-\frac{1}{2}x}$

1°) Expliquer comment obtenir à partir (C) de la courbe représentative (C') de k. Construire (C') dans le même repère que (C). (On représentera (C') en pointillés.)

2°) A l'aide du graphique, donner en fonction du paramètre m le nombre de solutions de l'équation dans ℝ, $|x + 4|e^{-\frac{1}{2}x} = m$

On donne : $e \approx 2{,}7$; $e^{-1} \approx 0{,}4$; $e^{-2} \approx 0{,}13$; $e^{2} \approx 7{,}3$

Année 2003
Corrigé

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1°) a- La probabilité pour qu'une naissance donne des jumeaux est : 0,2

b- La probabilité pour que les trois premières naissances donnent des filles et la quatrième donne un garçon est : $\boxed{(0,5)^3 \times 0,3 = 0,375}$

2°) On suppose qu'il y a n naissances dans la famille

a- Calcul de la probabilité P_n d'avoir au moins une naissance donnant des jumeaux

Soit A l'évènement : ≪ Aucune des naissances ne donne des jumeaux ≫

$P_n = 1 – P(A) = 1 - C_n^0(0,2)^0(0,8)^n \Leftrightarrow$ $\boxed{P_n = 1- (0,8)^n}$

b- Déterminons le nombre minimal n_0 d'enfants pour que P_n soit supérieur ou égal à 0,97.

$P_n \geq 0,97 \Leftrightarrow 1- (0,8)^n \geq 0,97 \Leftrightarrow (0,8)^n \leq 0,03 \Leftrightarrow n\ln(0,8) \leq \ln(0,03)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,03)}{\ln(0,8)}$ car $\ln(0,8) < 0 \Leftrightarrow n \geq 15,95 \Leftrightarrow$ $\boxed{n_0 = 16}$

3°) La loi de probabilité de X

Valeurs prises par X. On suppose qu'il y a 3 naissances successives dans la famille.

Nombre de naissance donnant des jumeaux	0	1	2	3
Valeurs de X	3	4	5	6

$P(X=3) = C_3^0(0,2)^0(0,8)^3 = 0,512$

$P(X=4) = C_3^1(0,2)^1(0,8)^2 = 0,384$

$P(X=5) = C_3^2(0,2)^2(0,8)^1 = 0,096$

$P(X=3) = C_3^3(0,2)^3(0,8)^0 = 0,008$

Loi de probabilité de X

x_i	3	4	5	6	Total
$P(X=x_i)$	0,512	0,384	0,096	0,008	1

b- Calcul de l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

$\boxed{E(X) = 3,6}$; $V(X) = E(X^2) – (E(X))^2 = 13,44 – 12,96 \Leftrightarrow$ $\boxed{V(X) = 0,48}$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,48} = \sqrt{\frac{48}{100}} \Leftrightarrow$ $\boxed{\sigma_X = \frac{2\sqrt{3}}{5}}$

EXERCICE II

1°) A, B, C sont trois points non alignés de l'espace

Déterminons l'ensemble des points M tel que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

Si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, alors on a :

$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}).\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}$, or $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}).\overrightarrow{AM} = 0$ car

$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}) \perp \overrightarrow{AM}$ par suite on a :

$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow M \in (ABC)$

L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est alors le plan (ABC).

2°) (Δ) et (Δ') sont deux droites de même vecteur directeur $\vec{u}$ et H ∈ (Δ)

a- Démontrons que pour tout point A de (Δ) et tout point A' de (Δ')

$\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$; H' est le projeté orthogonal de H sur (Δ').

D'après la relation de Chasles on a :

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}$ donc

$\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}) \wedge \vec{u}$

$= \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{H'A'} \wedge \vec{u}$ Or

$\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{H'A'} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires de même que $\overrightarrow{H'A'}$ et $\vec{u}$.

Par suite $\boxed{\overrightarrow{\mathbf{AA'}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{HH'}} \wedge \vec{\mathbf{u}}}$ (CQFD)

b- Déduisons que : HH'$= \dfrac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

$\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}\|$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HH'}\| \times \|\vec{u}\| \times \sin(\overrightarrow{HH'}; \vec{u})$ or $\overrightarrow{HH'} \perp \vec{u}$

Donc $\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HH'}\| \times \|\vec{u}\| = HH' \times \|\vec{u}\| \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{HH'} = \dfrac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}}$

c- Application

A(-1 ; 2 ; 5) ; A'(4 ; -1 ; 9) ; $\vec{u}$(-2 ; 2 ; 1)

Calculons la distance de (Δ) à (Δ')

Soit H un point de (Δ), H' son projeté orthogonal sur (Δ')

$d\big((\Delta) ; (\Delta')\big) = HH' = \dfrac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{AA'}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{-11\vec{i} -13\vec{j} + 4\vec{k}}$

$\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{d((\Delta) ; (\Delta')) = \sqrt{34}}}$

PROBLEME

PARTIE A

$f(x) = (x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$, définie sur ℝ, (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; unité graphique : 2cm

1°) a- Calcul des limites

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{f(x) = -\infty}}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+4) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times 0$ (F.I)

Levons l'indétermination

Posons $X = -\frac{1}{2}x$, on a : x = -2X $\lim\limits_{x\to+\infty} X = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} (-2X+4)e^X = \lim\limits_{X\to-\infty} -2Xe^X + 4e^X$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f(x) = 0}}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0 \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases}$

Asymptote éventuelle

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de +∞.

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{x+4}{x})\, e^{-\frac{1}{2}x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x+4)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty \end{cases}$

Interprétation géométrique

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de -∞.

b- Etude du sens de variation de f

$f'(x) = (\frac{-x-2}{2})\, e^{-\frac{1}{2}x}$

Sens de variation

Signe de $f'(x)$

Pour tout x ; $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de (-x-2). Par suite :

Pour x∈]-∞ ; -2[, $f'(x) > 0$,

Pour x∈]-2 ; +∞[, $f'(x) < 0$.

Sens de variation de f

f est strictement croissante sur]-∞ ; -2[et strictement décroissante sur]-2 ; +∞ [

Tableau de variation

x	-∞		-2		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
f(x)	-∞	↗	2e	↘	0

c- Montrons que (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique

Sur]-∞ ; -2[, f est continue et strictement croissante , elle réalise une bijection de]-∞ ; -2[sur]-∞ ;2e[. 0 ∈]-∞ ;2e[, alors l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans]-∞ ; -2[.

Par ailleurs pour tout x ∈ [-2 ; +∞[, f(x) ∈]0 ; 2e] ⟺ f(x) ≠ 0 d'où (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point dont l'abscisse est dans]-∞ ; -2[.

Calculons l'abscisse de ce point

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+4)e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0$ car $e^{-\frac{1}{2}x} \neq 0 \Leftrightarrow x = -4$

L'abscisse de ce point est -4. (C) ∩ (ox) = $\{(-4\,;0)\}$

2°) a- Equation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0

(T) : y = f'(0)(x-4) + f(0)

f'(0) = -1 et f(0) = 4 et $\boxed{\textbf{(T) : y = -x + 4}}$

b- On pose $\varphi(x) = -x + 4$ et $h(x) = f(x) - \varphi(x)$

Calculons h'(x) et h''(x).

$h'(x) = f'(x) + 1 \iff \boxed{\mathbf{h'(x) = 1 - (\frac{-x-2}{2})\, e^{-\frac{1}{2}x}}}$

$h''(x) = f''(x) \iff \boxed{\mathbf{h''(x) = \frac{x}{4} e^{-\frac{1}{2}x}}}$

<u>Etude du sens de variation de h' et signe de h' puis sens de variation de h et signe de h.</u>

$\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, alors le signe de h'' dépend de celui de $\frac{x}{4}$

- Pour x $\in]-\infty\,;0[$, h''(x) < 0,

-Pour x $\in]\,0\,;+\infty\,[$, h''(x) > 0.

h' est strictement décroissante sur$]-\infty\,;0[$ et strictement croissante sur$]\,0\,;+\infty\,[$.

x	$-\infty$	0	
h''(x)	-	0	+
h'(x)	$\searrow$	0	$\nearrow$
h'(x)	+	0	+
h(x)	$\nearrow$	0	$\nearrow$
h(x)	-	0	+

- Pour x $\in]-\infty\,;0[$, h(x) < 0

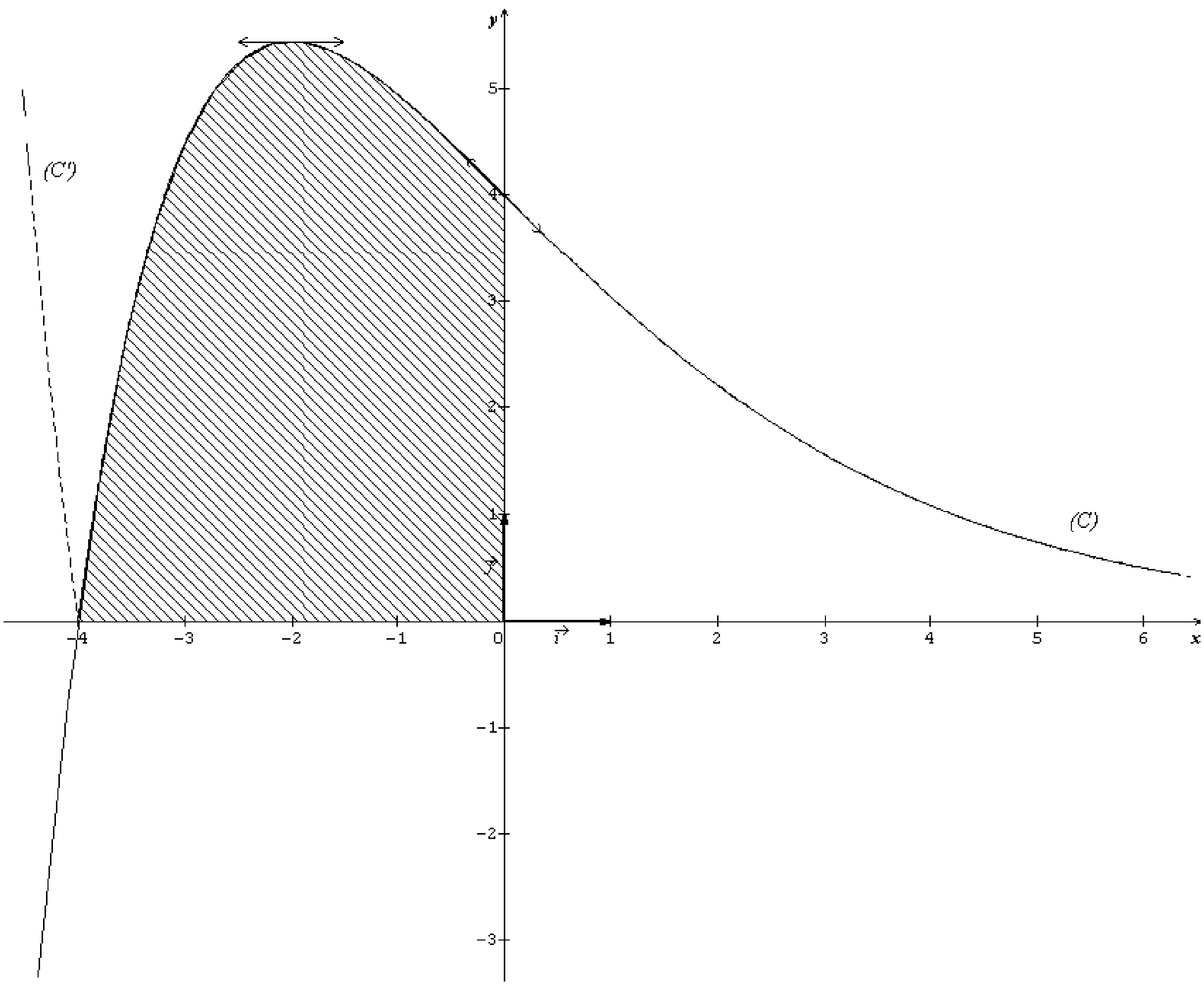
- Pour x $\in]\,0\,;+\infty\,[$, h(x) > 0 et h(0) = 0

<u>Position de (C) par rapport à (T)</u>

Sur$]-\infty\,;0\,[$, (C) est en dessous de (T)

Sur$]\,0\,;+\infty\,[$, (C) est au dessus de (T)

3°) a- Calcul de f(2) et f(4)



PARTIE B

1°) Détermination des réels a et b

F est une primitive de f sur ℝ si et seulement si F'(x) = f '(x)

F(x) = (ax + b) $e^{-\frac{1}{2}x}$ ⟺ F'(x) =$\left(\frac{-ax+2a-b}{2}\right)$ $e^{-\frac{1}{2}x}$

Par identification

$\begin{cases} \frac{-a}{2} = 1 \\ \frac{2a-b}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -12 \end{cases}$ et $\boxed{\mathbf{F(x) = (-2x - 12)\, e^{-\frac{1}{2}x}}}$

2°) Calcul de l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{-4}^{\lambda} f(x)dx$ × U.A = $[F(x)]_{-4}^{\lambda}$ × UA = (F(λ) – F(4)) × UA

$\mathcal{A}(\lambda)$ = $(4e^2 - 2(\lambda + 6)\, e^{-\frac{\lambda}{2}}) \times 4cm^2$;

$\boxed{\mathbf{\mathcal{A}(\lambda) = (16e^2 - 8(\lambda + 6)\, e^{-\frac{\lambda}{2}})\ cm^2}}$ et $\boxed{\mathbf{\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 16e^2}}$

3°) a- g(x) = $(x^2 + 8x + 16)e^{-x}$, G(x) = $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$

Déterminons α ; β ; γ pour que G soit une primitive de g sur ℝ

G est une primitive de g sur ℝ si et seulement si G'(x) = g(x).

G'(x) = $(-\alpha x^2 + (2\alpha - \beta)x + \beta - \gamma)e^{-x} = (x^2 + 8x + 16)e^{-x}$

Par identification

$\begin{cases} -\alpha = 1 \\ 2\alpha - \beta = 8 \\ \beta - \gamma = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -10 \\ \gamma = -26 \end{cases}$ et $\boxed{\mathbf{G(x) = (-x^2 - 10x - 26)e^{-x}}}$

b- Calcul de volume V(λ)

$V(\lambda) = \pi\int_{-4}^{\lambda} f^2(x)dx \times UV = \pi\int_{-4}^{\lambda} g(x)dx \times UV = \pi[G(x)]_{-4}^{\lambda} \times UV$

$V(\lambda) = \pi\,(2e^4 - (\lambda^2 + 10\,\lambda + 26)e^{-\lambda}) \times 8cm^3$

$\boxed{\mathbf{V(\lambda) = \pi\,(16e^4 - 8\,(\lambda^2 + 10\,\lambda + 26)e^{-\lambda})cm^3}}$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathbf{V(\lambda) = 16\pi e^4}}$

PARTIE C

$k(x) = |x+4|e^{-\frac{1}{2}x}$

1°) Expliquons comment obtenir à partir de (C), la courbe (C' ')

$k(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x)\ si\ f(x) \leq 0 \\ f(x)\ si\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

D'après la représentation graphique de (C)

$f(x) \leq 0$ Pour x ∈]-∞ ; -4]

$f(x) \geq 0$ Pour x ∈[-4 ; +∞[

Donc **k(x)** = $\begin{cases} \boldsymbol{-f(x)\ si\ x\ \in]-\infty\ ;\ -4]} \\ \boldsymbol{f(x)\ si\ x\ \in [-4\ ;\ +\infty[} \end{cases}$

Par conséquent :

-sur]-∞ ; -4], (C) et (C' ') sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses

-sur [-4 ; +∞[, (C) et (C' ') sont confondues

2°) Résolution graphique de l'équation, $x \in \mathbb{R}$, $|x+4|e^{-\frac{1}{2}x} = m$

$|x+4|e^{-\frac{1}{2}x} = m \Leftrightarrow k(x) = m$

Le nombre de solution de cette équation, est le nombre de point d'intersection de (C' ') avec la parallèle d'équation y = m

-pour m ∈]−∞ ; 0[, l'équation n'a pas de solution

-pour m = 0, l'équation a une solution ;

-pour m ∈]0 ; 2e[, l'équation a 3 solutions ;

-pour m = 2e , l'équation a 2 solutions ;

-pour m ∈]2e ; +∞[, l'équation a une solution

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2002
Session Normale
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(*Les calculatrices ne sont pas autorisées*)

<u>EXERCICEI</u> (4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm . On désigne par A le point d'affixe 2, par B le point d'affixe 2i et par Ω le point d'affixe 1+ i . On considère l'application f qui, à tout nombre complexe z différent de 2, associe le nombre complexe : $f(z)=\dfrac{iz+2}{z-2}$.

1) On pose z = x + iy et $f(z)$ = X + iY avec x, y, X , Y réels

a) Exprimer X et Y en fonction de x et y

b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit réel et représenter cet ensemble.

2) Soit C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{3\pi}{4}$.

a) Déterminer l'affixe Z_C du point C

b) déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{O\Omega} ; \overrightarrow{OC})$ En déduire que les points Ω ; O ; C sont alignés.

3) On pose z' = $f(z)$

a) Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer pour z' différent de i, z en fonction de z'.

b) M est le point d'affixe z (z différent de 2) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i). Montrer que $OM = 2\dfrac{M'D}{M'E}$ où D et E sont les points d'affixes respectives -1 et i .

c) Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 2 privé du point A, son image M'appartient à une droite fixe que l'on définira graphiquement.

<u>EXERCICEII</u> (4 points)

Une urne contient n boules noires et 3n boules blanches.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne . On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages possibles. Calculer la probabilité P_n de tirer une boule de chaque couleur.

2) On tire une boule de l'urne , on l'y replace ; puis on tire à nouveau une boule de l'urne ; on suppose qu'il y a équiprobabilité de tirages possibles . Calculer la probabilité de tirer une boule de chaque couleur.

3) Quelle est la limite de P_n lorsque n tend vers + ∞. A partir de quelle valeur de n la différence $P_n - \dfrac{3}{8}$ est – elle inférieur à $\dfrac{1}{100}$?

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x - x\ln(-x); si\ x < 0 \\ 0\ ; si\ x = 0 \\ xe^{-\frac{1}{x}}\ ; si\ x > 0 \end{cases}$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$).Unité graphique 2cm.

PARTIEA

1) Montrer que la fonction est continue sur IR

2) Etudier les limites de f en - ∞ et en + ∞ .

3) Etudier la dérivabilité de f en 0.Donner une interprétation graphique de ce résultat.

4) Etudier les variations de f ;

5) a) Etudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en - ∞ . Que peut on en déduire pour la courbe (Cf) ?

b) Montrer que la droite (D) d'équation y = x-1 est asymptote à la courbe (Cf) au voisinage de + ∞. (On pourra poser X = $-\frac{1}{x}$).

6) Construire la courbe (Cf) et la droite (D). On prendra le tangentes et demi-tangentes aux points d'abscisses : – e ; -1 ; 0).

PARTIE B

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx$.

1) En étudiant le signe de f sur $\left[-e;-\frac{1}{n}\right]$, montrer que $U_n \geq 0$; pour tout $n \in IN$.

2) Sans calculer explicitementU_n, déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$. En déduire que la suite (U_n) est croissante.

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$\int_{-\frac{1}{n}}^{-e} x\ln(-x)dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{n^2} + \frac{\ln(n)}{2n^2}$. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

Donner une interprétation graphique de U_n.

4) Calculer la limite (si elle existe) de U_n quand n tend vers +∞.

En déduire l'aire , en cm²,de la partie du plan délimitée par (Cf), les axes des coordonnées et la droite d'équation x = - e .

PARTIE C

On considère le mouvement d'un mobile m dont les coordonnées en fonction du temps sont :

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{e^{-t}}{t} \end{cases} ; t > 0$

1) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile M ;

2) Construire (en pointillées) dans le même repère que (C) la trajectoire du mobile M. On donne : e =2,72 ; e² =7,39 ; $\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Année 2002
Corrigé

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

$z_A = 2$; $z_B = i$ et $z_\Omega = 1 + i$

Pour tout $z \neq 2$, $f(z) = \frac{iz+2}{z-2}$

1°) On pose $z = x + iy$, $f(z) = X + iY$; x, y, X, Y des réels

a) Expressions de X et Y en fonction de x et y

Pour tout $(x ;y) \neq (2 ;0)$, on a :

$$f(z) = \frac{i(x+iy)+2}{x+iy-2} = \frac{(-y+2)+ix}{(x-2)+iy} = \frac{[(-y+2)+ix][(x-2)-iy]}{(x-2)^2+y^2} = \frac{2y+2x-4+i(y^2-2y+x^2-2x)}{(x-2)^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{2y+2x-4}{(x-2)^2+y^2} + i\frac{y^2-2y+x^2-2x}{(x-2)^2+y^2} = X + iY$$

D'où $\boxed{\mathbf{X = \frac{2y+2x-4}{(x-2)^2+y^2}}}$ et $\boxed{\mathbf{Y = \frac{y^2-2y+x^2-2x}{(x-2)^2+y^2}}}$; $(x ;y) \neq (2 ;0)$

b) Déduisons l'ensemble des points M d'affixe z tel que f(z) soit réel.

f(z) est réel si et seulement si $Im(f(z)) = 0$

$Im(f(z)) = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2-2y+x^2-2x}{(x-2)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + x^2 - 2x = 0$ car $(x ;y) \neq (2 ;0)$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 + (x-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

L'ensemble des points M d'affixes z tel que f(z) soit réel est l'ensemble des points du cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}$ privé du point A.

2°) Soit C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$

a) Déterminons l'affixe z_C du point C

$z_C = e^{-i\frac{3\pi}{4}}z_A = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(2) \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{z_C = -\sqrt{2}(1+i)}}$

b) Déterminons la mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{O\Omega} ; \overrightarrow{OC})$.

$(\overrightarrow{O\Omega} ; \overrightarrow{OC}) = \arg(\frac{z_C}{z_\Omega})$, or $\frac{z_C}{z_\Omega} = -\sqrt{2}$ d'où $\arg(\frac{z_C}{z_\Omega}) = \pi[2\pi]$.

On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{O\Omega} ; \overrightarrow{OC}) = \pi[2\pi]}$

$(\overrightarrow{O\Omega} ; \overrightarrow{OC}) = \pi[2\pi]$, alors *les points* Ω ;O ;C sont alignés

3°) a) Vérifions que i n'a pas d'antécédent par f

$z' = f(z) = i \Leftrightarrow \frac{iz+2}{z-2} = i \Leftrightarrow iz + 2 = iz - 2i$

$\Leftrightarrow$ **2 = -2i est impossible, donc i n'a pas d'antécédent par f**

Exprimons z' en fonction de z pour $z' \neq i$

Pour $z' \neq i$; on : $z' = \frac{iz+2}{z-2} \Leftrightarrow z'(z-2) = iz + 2 \Leftrightarrow z'z - 2z' = iz + 2 \Leftrightarrow z(z' - i) = 2z' + 2$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{z = \frac{2(z'+1)}{z'-i}}} \; ; \; z' \neq i$$

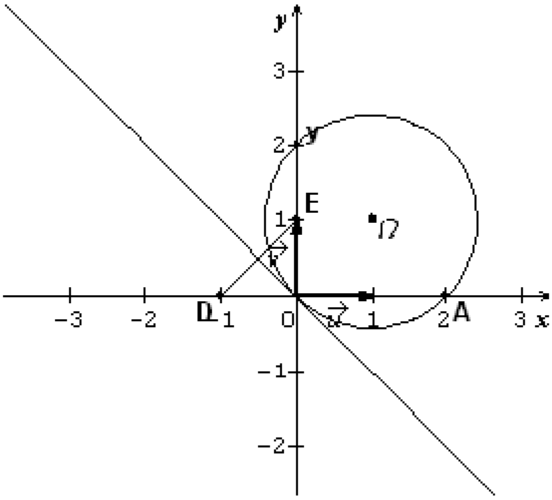
b) Montrons que : $OM = 2.\frac{M'D}{M'E}$ avec $z_D = -1$; $z_E = i$

$$z = 2\frac{z'+1}{z'-i} = 2\frac{z'-z_D}{z'-z_E} \Leftrightarrow |z| = 2\left|\frac{z'-z_D}{z'-z_E}\right| \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{OM = 2.\frac{M'D}{M'E}}}$$

c) M décrit le cercle de centre O et de rayon 2 privé de A. Déterminons l'ensemble décrit par M' :

M ≠ A et OM = 2 ⇔ 2 = 2.$\frac{M'D}{M'E}$⇔ $\frac{M'D}{M'E}$ = 1⇔ M'D = M'E

M' décrit la médiatrice du segment [ED]



EXERCICE II

1°) Calculons la probabilité P_n de tirer une boule de chaque couleur ; tirage simultané de deux boules

Card(Ω) = $C_{4n}^2 = \frac{(4n)!}{2!(4n-2)!} = \frac{4n\times(4n-1)}{2}$ = 2n(4n – 1)

$P_n = \frac{C_n^1\times C_{3n}^1}{8n^2-2n} = \frac{n \times 3n}{8n^2-2n} = \frac{3n^2}{8n^2-2n} = \frac{3n}{8n-2}$

$\boxed{\mathbf{P_n = \frac{3n}{8n-2}}}$

2°) Tirage successif de deux boules avec remise

Calculons la probabilité de tirer une boule de chaque couleur.

Card(Ω) = $(4n)^2 = 16n^2$

Soit A :≪ Tire une boule de chaque couleur ≫

P(A) = $\frac{2\times n \times 3n}{16n^2} = \frac{6n^2}{16n^2} = \frac{6}{16}$; $\boxed{\mathbf{P(A) = \frac{3}{8}}}$

3°) Limite de P_n lorsque n tend vers +∞

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P_n = \frac{3}{8}}}$

Déterminons la valeur de n à partir de laquelle la différence P_n- $\frac{3}{8}$ est inférieur à $\frac{1}{100}$

$P_n - \frac{3}{8} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow P_n < \frac{1}{100} + \frac{3}{8} \Leftrightarrow P_n < 0{,}385 \Leftrightarrow \frac{3n}{8n-2} < 0{,}385 \Leftrightarrow \frac{3n-0{,}385(8n-2)}{8n-2} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3n-3{,}08n+0{,}77}{8n-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{-0{,}08n+0{,}77}{8n-2} < 0$

$\Leftrightarrow -0{,}08n + 0{,}77 < 0$ (car 8n – 2 > 0 pour tout n non nul.)

$\Leftrightarrow n > \frac{0{,}77}{0{,}08} \Leftrightarrow n > 9{,}625$

La valeur de n à partir de laquelle la différence P_n- $\frac{3}{8}$ est inférieur à $\frac{1}{100}$ est n =10.

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x - x\ln(-x) \text{ si } x < 0 \\ 0 \quad\quad \text{si } x = 0 \\ xe^{-\frac{1}{x}} \quad\quad \text{si } x > 0 \end{cases}$

PARTIE I

1°) Montrons que f est continue sur IR

f est continue sur IR*, étudions la continuité de f en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x - x\ln(-x))$

Posons X = -x ; $\lim\limits_{x \to 0^-} X = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{X \to 0^+} (-X + X\ln(X)) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, alors f est continue en 0.

On n'en déduit que f est continue sur IR.

2°) Etudions la limite de f en -∞ et en +∞.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - x\ln(-x)) = \lim\limits_{X \to +\infty} (-X + X\ln(X)) = \lim\limits_{X \to +\infty} X(-1+\ln X)$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{X \to +\infty} X = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} (-1 + \ln X) = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = +\infty \times 0$ F.I

Changement de variable

Posons $X = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{X}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0^-$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to 0^-} -\frac{1}{X}e^X = \frac{-1}{0^-} = +\infty$, alors $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3°) Etudions la dérivabilité de f en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \ln(-x)) = \lim\limits_{X \to 0^+} (1 - \ln X) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f'_d(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ alors f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique de ce résultat

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$, alors (Cf) admet à gauche de 0 une demi-tangente verticale d'équation x = 0

$f'_d(0) = 0$, alors (Cf) admet à droite de 0 une demi-tangente d'équation y = 0.

Le point (0 ;0) est un point anguleux de (Cf).

4°) Etude des variations de f

Si x < 0, f '(x) = 1 – ln(-x) – 1 = -ln(-x) ⇔ **f '(x) = – ln(-x)**

Signe de f '(x)

f '(x) > 0 ⇔ – ln(-x) > 0 ⇔ ln(-x) < 0 ⇔ -x < 1 ⇔ x > -1

-Pour x ∈]-1 ;0[, f '(x) > 0, et Pour x ∈]-∞ ;-1[, f '(x) < 0.

Sens de variation de f pour x < 0

f est strictement croissante sur]-1 ;0[et strictement décroissante sur]-∞ ;-1[.

Si x > 0, f '(x) = $\frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}} > 0$, pour tout x > 0, **alors f est strictement croissante sur]0 ; +∞[**

En conclusion

f est strictement croissante sur]-1 ;0[et sur]0 ; +∞[et strictement décroissante sur]-∞ ;-1[

4°) a) Calculons la limite en -∞ de $\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1 - \ln(-x)) = \lim\limits_{X\to+\infty}(1 - \ln X) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$ **(Cf) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de -∞**

b) Montrons que (D) : y = x – 1 est une asymptote au voisinage de +∞.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1) = \lim\limits_{X\to0}(-\frac{1}{X}e^{X} + \frac{1}{X} + 1)$

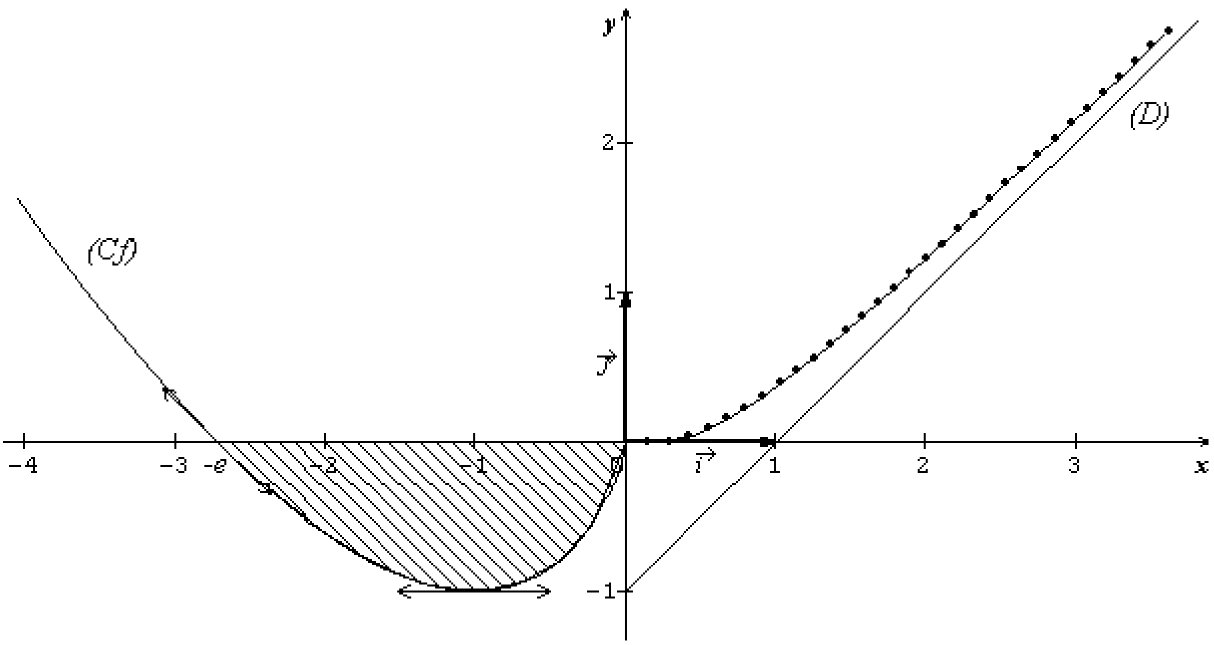
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{X\to0}(-\frac{e^{X}-1}{X} + 1) = -1 + 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$, alors (D) : y = x – 1 est une asymptote oblique à (Cf) au voisinage de +∞

6°) Construction de la courbe de (Cf).

Tangente au point x = -e

f '(-e) = -lne = -1, f(-e) = 0 ⇔ (T) : y = -1(x + e) ⇔ $\boxed{\textbf{(T) : y = -x – e}}$



PARTIE II

Pour n ∈ IN, on pose $U_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx$

1°) Montrons que $U_n \geq 0$, pour tout n ∈ IN

D'après la représentation graphique de (Cf), on remarque que pour x ∈[- e ; 0], f(x) ≤ 0.

Pour tout n ∈ IN, [-e ; $-\frac{1}{n}$] ⊂ [-e ; 0], alors pour tout x ∈ [-e ; $-\frac{1}{n}$], f(x) ≤ 0 d'où

$\int_{-e}^{-\frac{1}{n}} f(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow U_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx = -\int_{-e}^{-\frac{1}{n}} f(x)dx \geq 0$

Donc $U_n \geq 0$, pour tout n ∈ IN.

2°) Déterminons le signe de $U_{n+1} - U_n$

$U_{n+1} - U_n = \int_{-\frac{1}{n+1}}^{-e} f(x)dx - \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{n+1}}^{-e} f(x)dx + \int_{-e}^{-\frac{1}{n}} f(x)dx$

$U_{n+1} - U_n = \int_{-\frac{1}{n+1}}^{-\frac{1}{n}} f(x)dx = -\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n+1}} f(x)dx \geq 0$ car $\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n+1}} f(x)dx \leq 0$

Par conséquent pour tout n ∈ IN, $U_{n+1} - U_n \geq 0$

On en déduit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3°) Calculons $\int_{-\frac{1}{n}}^{-e} x\ln(-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Posons $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$\int_{-\frac{1}{n}}^{-e} x\ln(-x)dx = [\frac{x^2}{2}\ln(-x)]_{-\frac{1}{n}}^{-e} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{-e} xdx$

$= [\frac{x^2}{2}\ln(-x) - \frac{x^2}{4}]_{-\frac{1}{n}}^{-e}$

$\boxed{\int_{-\frac{1}{n}}^{-e} x\ln(-x)dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4n^2} + \frac{\ln(n)}{2n^2}}$

Déduisons l'expression de U_n en fonction de n

$U_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} (x - \ln(-x))\, dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} xdx - \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} x\ln(-x)dx$

$= [\frac{x^2}{2}]_{-\frac{1}{n}}^{-e} - (\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4n^2} + \frac{\ln(n)}{2n^2})$; $\boxed{U_n = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4n^2} - \frac{\ln(n)}{2n^2}}$

<u>Interprétation graphique de U_n</u>

$U_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx = -\int_{-e}^{-\frac{1}{n}} f(x)dx = \int_{-e}^{-\frac{1}{n}} -f(x)dx$

U_n est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -e et $x = -\frac{1}{n}$

4°) Calcul de la limite de U_n quand n tend vers +∞

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{e^2}{4}}$

Déduisons l'aire du domaine hachuré

$A = -\int_{-e}^{0} f(x)dx \times U.A = \lim_{n\to+\infty} -\int_{-e}^{-\frac{1}{n}} f(x)dx \times U.A = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx \times U.A$

$A = (\lim_{n\to+\infty} U_n) \times U.A = \frac{e^2}{4} \times U.A.$; $U.A = 4cm^2$ et donc $\boxed{A = e^2 cm^2}$

<u>PARTIE III</u>

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{e^{-t}}{t} \end{cases} t > 0$

1°) Equation de la trajectoire du mobile M

$x = x(t) = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$; $y = y(t) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = xe^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$ $\boxed{y = xe^{-\frac{1}{x}} \text{ avec } x > 0}$

2°) **La trajectoire du mobile M est la partie de (Cf) correspondant à x > 0**

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2001
Session Normale
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2)pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICEI (4 points)

Une masse m, mobile sur un axe (O ;$\vec{\imath}$) a sa position représentée sur cet axe par le point M. Cette masse est soumise à une force d'attraction F telle que l'abscisse y(t) du point M exprimée comme fonction du temps, vérifie l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{9\pi^2}{4} y = 0$$

1) Donner la solution générale de cette équation différentielle.

2) a) Montrer que la solution vérifiant les conditions initiales y(0) = 1 et y'(0) = - $\frac{3\pi}{2}$,

s'exprime pour t ≥0 par : $y(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$.

b) Déterminer le nombre réel α compris entre 0 et 1 et que pour t ≥ 0,

$$y(t) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{3\pi}{2}(t+\alpha)\right]$$

3) En utilisant la question 2)b.

a) Donner la valeur positive de t pour laquelle le point M passe pour la première fois au point O.

b) Combien de fois le point M passe t-il en O dans l'intervalle de temps [0 ; 4].

EXERCICEII (4 points)

Dans une loterie, on distribue deux séries de billets : A et B.
La série A comporte 12 billets dont 4 gagnants.
La série B comporte 15 billets dont 5 gagnants.
Une personne achète 3 billets dont 2 de la série A et 1 de la série B. On suppose tous les choix équiprobables.

1) Quelle est la probabilité qu'un seul des 3 billets soit gagnant ?

2) Quelle est la probabilité que 2 au moins des 3 billets soient gagnants ?

3) Tout billet gagnant de la série A gagne 2500 F et tout billet gagnant de la série B gagne 5000 F. On Désigne par X la variable aléatoire qui associe à l'achat de 3 billets (2 de A et 1 de B) le gain réalisé.

a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance Mathématique E(X) et la variance V(X) de X. Déduisez-en l'écart type.

PROBLEME (12 points)

Soit f : IR →IR, $x \mapsto \begin{cases} -x+\frac{3}{2}-\frac{x}{x^2+1} \; ; si\ x \in \;]-\infty;1] \\ (x-1)e^{-x+1}\ si\ x\ \in\ ]1;+\infty[\end{cases}$

PARTIE A

1) a) Montrer que pour tout x de] - ∞ ; 1 [, $f(x)=\dfrac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}$.

b) Résolvez dans IR l'équation : $f(x) = 0$.

2) On admet que f est dérivable sur]- ∞ ; 1 [et sur] 1 ; + ∞[

a) Justifier la continuité de f sur IR.

b) Etudier la dérivabilité de f au point 1. Interpréter graphiquement ce résultat. Sur quel sous ensemble D de IR f est –elle dérivable ?

c) Calculer $f'(x)$ pour tout x de D.

d) Etudier les variations de f. Calculer les limites de f en - ∞ et en + ∞ , puis dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que (Cf) admet une asymptote oblique (D) en - ∞ dont vous préciserez une équation.

b) Etudier la position de (Cf) par rapport à (D) sur] - ∞ ; 1].

4) a) Donner une équation de la tangente (T) à (Cf) au point A d'abscisse 0.

b) Etudier la position de (Cf) par rapport à (T) sur] - ∞ ; 1].

c) Déterminer le point B de (Cf) d'abscisse a, a <1 , en lequel la tangente (Δ) est parallèle à la droite (D).

5) Dans le repère (O ;$\vec{i}$;$\vec{j}$), placer les points A et B. Tracez les tangentes à (Cf) au point d'abscisse 1, puis tracez (D) ; (T) ; (Δ) et (Cf).

PARTIE B

Soit g la restriction de f à l'intervalle]- ∞ ; 1].

1) a) Montrer que g est une bijection de] - ∞ ; 1] sur un intervalle que vous préciserez.

b) Sans expliciter la bijection réciproque g^{-1} de g, dresser son tableau de variations.

2) Construisez dans le repère (O ;$\vec{i}$;$\vec{j}$) la courbe $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1}, en expliquant la construction.

3) Calculer en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par (Cf), la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ et les axes du repère.

Année 2001
Corrigé

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

$y'' + \frac{9\pi^2}{4}y = 0$

1°) Donnons la solution générale de cette équation différentielle

$\boxed{\mathbf{y = A\cos(\frac{3\pi}{2}t) + B\sin(\frac{3\pi}{2}t) \quad (A \text{ et } B \text{ des réels}) \; ; t \geq 0}}$

2°) a) Montrons que la solution vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{3\pi}{2}$ est

$y(t) = \cos(\frac{3\pi}{2}t) - \sin(\frac{3\pi}{2}t) \; ; t \geq 0$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow A = 1$

$y'(t) = -\frac{3\pi}{2}A\sin(\frac{3\pi}{2}t) + \frac{3\pi}{2}B\cos(\frac{3\pi}{2}t)$

$y'(0) = -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}B = -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow B = -1$

$\boxed{\mathbf{y(t) = \cos(\frac{3\pi}{2}t) - \sin(\frac{3\pi}{2}t) \; ; t \geq 0}}$

b) Déterminons le réel α compris entre 0 et 1 tel que, pour $t \geq 0$, $y(t) = \sqrt{2}\cos[\frac{3\pi}{2}(t + \alpha)]$

Pour $t \geq 0$, $y(t) = \cos(\frac{3\pi}{2}t) - \sin(\frac{3\pi}{2}t) = \sqrt{2}\,[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{3\pi}{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{3\pi}{2}t)]$

$= \sqrt{2}\,[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{3\pi}{2}t)] = \sqrt{2}\,[\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{3\pi}{2}t) - \sin\frac{\pi}{4}\sin(\frac{3\pi}{2}t)]$

$= \sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$ donc $\boxed{\mathbf{y(t) = \sqrt{2}\cos[\frac{3\pi}{2}(t + \frac{1}{6})] \; ; t \geq 0 \;\; \text{d'où } \alpha = \frac{1}{6}}}$

3°) a) Donnons la valeur positive de t pour laquelle M passe pour la première fois au point O.

M passe au point O si et seulement si $y(t) = 0$

$y(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos[\frac{3\pi}{2}(t + \frac{1}{6})] = 0 \Leftrightarrow \cos[\frac{3\pi}{2}(t + \frac{1}{6})] = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}(t + \frac{1}{6}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{6} + \frac{2k}{3}$

$t \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2k}{3} \geq -\frac{1}{6} \Leftrightarrow 4k \geq -1 \Leftrightarrow k \geq \frac{-1}{4}$; k étant un entier, alors $k \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\mathbf{t = \frac{1}{6} + \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{N}}}$

M passe par O pour la première fois si k = 0

$\boxed{\mathbf{\text{Si } k = 0, t = \frac{1}{6}}}$

b) Déterminons le nombre de fois que le point M passe par O dans l'intervalle de temps [0 ; 4]

$t \in [0 ; 4] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{6} + \frac{2k}{3} \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq \frac{2k}{3} \leq 4 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq \frac{2k}{3} \leq \frac{23}{6} \Leftrightarrow -1 \leq 4k \leq 23$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{23}{4} \Leftrightarrow -0{,}25 \leq k \leq 5{,}75 \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

$t \in [0 ; 4] \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Le point M passe 6 fois par le point O dans l'intervalle de temps [0 ; 4]

EXERCICEII

1°) la probabilité pour qu'un seul des 3 billets soit gagnant.

$Card(\Omega) = C_{12}^2 \times C_{15}^1 = 990$

Soit P_1 cette probabilité

$P_1 = \frac{C_4^1\,C_8^1C_{10}^1C_5^0 + C_5^1C_{10}^0C_8^2C_4^0}{990} = \frac{390}{990} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$; $\boxed{\mathbf{P_1 = \frac{13}{33}}}$

2°) La probabilité pour que 2 au moins des 3 billets soient gagnants

Soit P_2 cette probabilité

$P_2 = \frac{C_4^2\,C_8^0C_{10}^1C_5^0 + C_4^1\,C_{18}^1C_5^1 + C_4^2C_8^0C_5^1C_{10}^0}{990} = \frac{450}{990} = \frac{45}{99}$; $\boxed{\mathbf{P_2 = \frac{5}{11}}}$

3°) a) Ensemble des valeurs prises par X.

$X(\Omega) = \{0; 2500; 5000; 7500; 10000\}$

b) La loi de probabilité de X

$P(X=0) = \frac{C_8^2C_4^0C_{10}^1C_5^0}{990} = \frac{280}{990} = \frac{28}{99}$

$P(X=2500) = \frac{C_4^1\,C_8^1C_{10}^1C_5^0}{990} = \frac{320}{990} = \frac{32}{99}$

$P(X=5000) = \frac{C_4^2C_8^0C_{10}^1C_5^0 + C_4^0C_8^2C_{10}^0C_5^1}{990} = \frac{200}{990} = \frac{20}{99}$

$P(X=7500) = \frac{C_4^1\,C_8^1C_5^1C_{10}^0}{990} = \frac{160}{990} = \frac{16}{99}$

$P(X=10000) = \frac{C_4^2C_8^0C_5^1C_{10}^0}{990} = \frac{30}{990} = \frac{3}{99}$

x_i	0	2500	5000	7500	10000	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{28}{99}$	$\frac{32}{99}$	$\frac{20}{99}$	$\frac{16}{99}$	$\frac{3}{99}$	1

3°) Calculons E(X); V(X) et σ_X.

$\boxed{\mathbf{E(X) = \frac{10.000}{3}}}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1.900.000.000}{99} - (\frac{10.000}{3})^2 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{V(X) = \frac{800.000.000}{99}}}$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma_X = \frac{20.000}{33}\sqrt{\frac{2}{11}}}}$

PROBLEME

PARTIE A

1°) a-Montrons que pour tout x de] $-\infty$; 1 [; $f(x) = \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}$: pour tout x de]$-\infty$; 1 [;

$f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{-2x(x^2+1)+3(x^2+1)-2x}{2(x^2+1)} = \frac{-2x^3-2x+3x^2+3-2x}{2(x^2+1)} = \frac{-2x^3+3x^2-4x+3}{2(x^2+1)}$

Factorisons par $-2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$

$-2(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + 3 = -2 + 3 - 4 + 3 = -6 + 6 = 0$, alors 1 est une racine de ce polynôme.

Division euclidienne.

$-2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$	$x - 1$
$\underline{2x^3 - 2x^2}$	$-2x^2 + x - 3$
$x^2 - 4x + 3$	
$\underline{-x^2 + x}$	
$-3x + 3$	
$\underline{3x - 3}$	
0	

On en déduit que : $-2x^3 + 3x^2 - 4x + 3 = (x-1)(-2x^2 + x - 3)$

D'où $\boxed{\mathbf{f(x) = \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}}}$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation f(x) = 0

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-2x^2+x-3) = 0$ car $2(x^2+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $-2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $-2x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = -23 < 0$, alors $-2x^2 + x - 3 \neq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$. Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\boxed{\mathbf{S = \{1\}}}$

2°) a) Continuité sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur] -∞ ; 1 [et sur]1 ; +∞ [car par hypothèse, elle est dérivable sur chacun de ces intervalles. Il suffit donc d'étudier la continuité au point 1.

$f(1) = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)e^{-x+1} = 0e^0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, alors f est continue au point 1. Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Dérivabilité au point 1.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2x^2 + x - 3) = -4$, alors $\mathbf{f'_g(1) = -4}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{-x+1} = 1$, alors $\mathbf{f'_d(1) = 1}$

$f'_g(1) = -4 \neq f'_d(1) = 1$, alors f n'est pas dérivable au point 1

Interprétation graphique de ce résultat

$f'_g(1) = -4$, alors (C f) admet à gauche du point 1, une demi-tangente de coefficient directeur -4. (T_g) : y = -4x + 4

$f'_d(1) = 1$, alors (C f) admet à droite du point 1, une demi-tangente de coefficient directeur 1. (T_d) : y = x-1

Le point (1 ; 0) est un point anguleux pour (C f)

Déterminons l'ensemble D de dérivabilité de f

D'après les résultats du b)

D =] -∞ ; 1 [U] 1 ; +∞ [$=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

c) Calcul de f'(x) pour $x \in D$

Pour $x \in]-\infty ; 1[$; $f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}$

$f'(x) = -1 - \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2+1)^2-(-x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4-2x^2-1+x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4-x^2-2}{(x^2+1)^2}$

$\boxed{\mathbf{f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}}}$; $x \in]-\infty;1[$

Pour $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = (x-1)e^{-x+1}$

$f'(x) = e^{-x+1} - (x-1)e^{-x+1} = (1-x+1)e^{-x+1}$

$\boxed{\mathbf{f'(x) = (-x+2)e^{-x+1}}}$; $x \in]1; +\infty[$

d) Etude des variations de f

Signe de f '(x) sur D

- Pour x ∈] -∞ ; 1 [; f '(x) = $-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$

∀ x ∈] -∞ ; 1 [,$(x^2+1)^2 > 0$, x^4>0, x^2>0 et 2>0, alors f '(x) = $-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} < 0$,

f '(x) = $-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$ < 0, ∀ x ∈] -∞ ; 1 [

- Pour x ∈] 1; +∞ [, f '(x) = (-x+2)e^{-x+1}

∀ x ∈] 1; +∞ [, e^{-x+1}>0, alors le signe de f '(x) dépend de celui de –x + 2. Par conséquent :

Pour x ∈] 1; 2 [, f '(x) > 0

Pour x ∈] 2; +∞ [, f '(x) < 0

Sens de variations de f

f est strictement décroissante sur] -∞ ; 1 [puis sur] 2; +∞ [et strictement croissante sur] 1; 2 [.

Calcul des limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+3x^2-4x+3}{2(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$; alors $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{-x+1} = +\infty \times 0$ F.I

Levons l'indétermination

Posons X = x-1 ; $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Tableau de variation

x	-∞		1		2		+∞
f '(x)		-	-4 ‖ 1	+	0	-	
f(x)	+∞	↘	0 ‖ 0	↗	e^{-1}	↘	0

3°) Montrons que (C f) admet une asymptote oblique (D) en -∞

Au voisinage de -∞, f(x) = -x + $\frac{3}{2}$ - $\frac{x}{x^2+1}$

Soit (D) : y = -x + $\frac{3}{2}$. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}$ (f(x)-y)

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-y) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-x}{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-x}{x^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-1}{x}) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}$ (f(x)-y) = 0, alors (D) : y = -x + $\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C f) au voisinage de -∞

Etudions la position de (C f) par rapport à (D).

Etudions le signe de (f(x)-y) sur] -∞ ; 1]

f(x)-y = $\frac{-x}{x^2+1}$

∀ x ∈] -∞ ; 1], x^2+1>0, alors le signe de (f(x)-y) dépend de celui de –x. Par conséquent :

Pour x ∈] -∞ ; 0[, f(x)-y > 0 et pour x ∈] 0 ; 1], f(x)-y < 0

On en déduit que :

Sur] -∞ ; 0[, (C f) est au dessus de (D) et sur] 0 ; 1], (C f) est en dessous de (D)

4°) a) Equation de la tangente (T) à au point A d'abscisse 0

(T) : y = f '(0)(x – 0) + f(0) ; f '(0) = -2 ; f(0) = $\frac{3}{2}$ et $\boxed{\textbf{(T) : y = -2x + } \frac{3}{2}}$

b) Position de (C f) par rapport à (T)

Etudions le signe de (f(x)-y) avec y = -2x + $\frac{3}{2}$

f(x)-y = -x + $\frac{3}{2}$ - $\frac{x}{x^2+1}$ + 2x - $\frac{3}{2}$ = x - $\frac{x}{x^2+1}$ = $\frac{x^3+x-x}{x^2+1}$

f(x)-y = $\frac{x^3}{x^2+1}$, x ∈] -∞ ; 1].

∀ x ∈] -∞ ; 1], $x^2+1>0$, alors le signe de (f(x)-y) dépend de celui de x^3. Par Conséquent : **Pour x ∈] -∞ ; 0[, f(x)-y < 0 et Pour x ∈] 0 ; 1], f(x)-y > 0**

On en déduit que : **Sur] -∞ ; 0[, (C f) est en dessous de (T)**

Sur] 0 ; 1], (C f) est au dessus de (T)

c) Déterminons les coordonnées du point B d'abscisse a ou la tangente (Δ) à (C f) est parallèle à (D).

(Δ) : y = f '(a)(x – a) + f(a) ; a<1

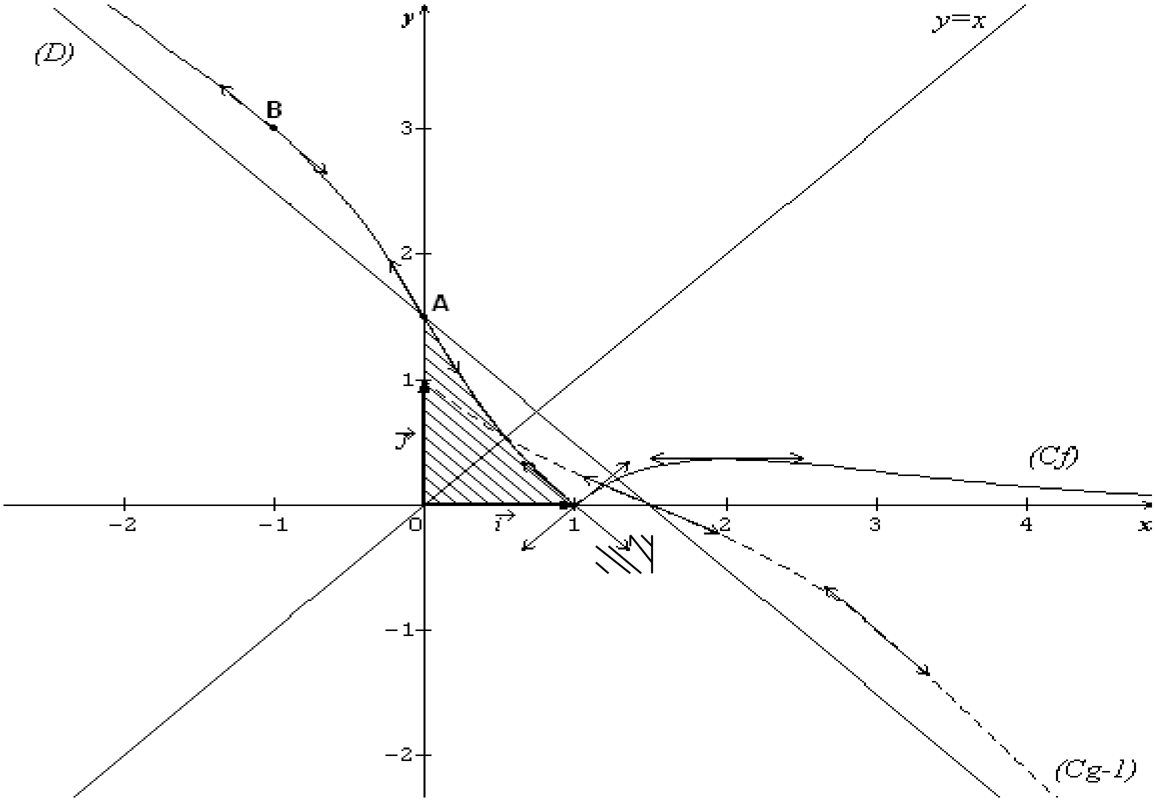
(Δ) ∥ (D) ⇔ f '(a) = -1⇔ $-\frac{a^4+a^2+2}{(a^2+1)^2}$ = -1⇔ $a^4+a^2+2-(a^2+1)^2=0$

⇔ $a^4+a^2+2-a^4-2a^2-1=0$ ⇔ $-a^2+1=0$ ⇔ a = ±1 ; or a<1 donc a = -1

f(a) = f(-1) = 3

On en déduit que : $\boxed{\textbf{B(-1 ; 3)}}$

Construction de (C f)



PARTIE B

g est la restriction de f sur] -∞ ; 1].

1°) a) Montrons que g est une bijection sur] -∞ ; 1].

D'après l'étude de la partie A, g est continue et strictement décroissante sur] -∞ ; 1], alors elle réalise une bijection de] -∞ ; 1] sur f(] -∞ ; 1]) =[0 ; +∞[.

b) Tableau de variation de g^{-1}

g et g^{-1} ont le même sens de variation, par conséquent, g^{-1} est strictement décroissante sur [0 ; +∞ [car g est strictement décroissante sur] -∞ ; 1]

x	0	+∞
$(g^{-1})'(x)$	-	
$(g^{-1})(x)$	+∞ ↘	1

2°) Construction de (C g^{-1})

(C g^{-1}) et (C f) sont symétriques par rapport à la première bissectrice sur] -∞ ; 1]. Voir graphique.

3°) Calcul d'aire

$A = \int_0^{3/2} f(x)dx \times UA = (\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{3/2} f(x)dx) \times UA$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (-x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1})\, dx = [-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^1$

$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = 1- \frac{1}{2}\ln 2}$

$\int_1^{3/2} f(x)dx = \int_1^{3/2} (x-1)e^{-x+1}dx$

Intégration par parties

Posons $\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v'(x) = e^{-x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x+1} \end{cases}$

$\int_1^{3/2} f(x)dx = [-(x-1)e^{-x+1}]_1^{3/2} + \int_1^{3/2} e^{-x+1}dx$

$\int_1^{3/2} f(x)dx = [-(x-1)e^{-x+1} - e^{-x+1}]_1^{3/2} = [(-x+1-1)e^{-x+1}]_1^{3/2}$

$= [-xe^{-x+1}]_1^{3/2} = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1$

$A = (1- \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1)\, UA = \frac{4-\ln 2-3e^{-\frac{1}{2}}}{2} \times UA$; $UA = 4cm^2$ alors

$\boxed{\mathbf{A = 2(4 - \ln 2 - 3e^{-\frac{1}{2}})\ cm^2}}$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2000
Session Normale
Durée : 4 heures
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE I (4 points)

Le tableau suivant donne pour chaque année, le nombre de naissances enregistrées dans une Mairie :

Années	1988	1990	1992	1994	1996	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de naissances y_i	374	A	334	312	B	266

Lors d'un déménagement de cette mairie, les registres des années 1990 et 1996 ont été égarés, de sorte que le nombre de naissance de ces années restent introuvables. Mais un stagiaire qui était affecté avant la perte des documents avait permis d'obtenir par la méthode de MAYER par regroupement des trois premiers points et des derniers point du nuage, la droite d'ajustement de y en fonction de x d'équation : y = -22x +397.

1) A combien peut on estimer le nombre de naissances lors de l'année 1995 ?

2) On suppose que l'évolution des naissances reste semblable au cours des années à venir.

a) Quel sera le nombre de naissances au cours de l'année 2000 ?

b) A partir de quelle année y aura- t-il deux fois moins de naissances qu'en 1988 ?

3) Déterminer A et B .

EXERCICEII (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u},\vec{v}$) on donne les points A et B d'affixes $Z_A = 2 + 2i$ et $Z_B = (1+\sqrt{3}) + i(3+\sqrt{3})$.

1) Ecrire le nombre complexe $Z = \frac{Z_A}{Z_B}$ sous forme algébrique.

2) a) Déterminer OA et AB. Vérifier que OB = $2(1+\sqrt{3})$.

b) Déterminer en radian, la mesure principale de ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OA}$) et de ($\vec{u}$;$\overrightarrow{OB}$). En déduire une mesure en radians de l'angle ($\overrightarrow{OA}$;$\overrightarrow{OB}$)

3) En utilisant les questions précédentes, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) a) Déterminer l'affixe du point D image de A dans la rotation de centre O et d'angle

$\alpha = 2(\overrightarrow{OA} ;\overrightarrow{OB})$

b) Quelle est la nature du quadrilatère OABD ? Justifier votre réponse. (pour la figure on prendra $\sqrt{3} = 1{,}7$).

PROBLEME (12 points)

PARTIE A

Soit la fonction numérique g définie sur] 1 ; + ∞[par : g(x) = $\dfrac{x}{2x-1} - \ln(x-1)$ où , ln désigne la fonction logarithme népérien.

1) Etudier le sens de variation de g.

2) a) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une unique solution α dans] 1 ; + ∞[.

b) Montrer que $2 < \alpha < 3$.

3) En déduire le signe de g sur] 1 ; + ∞[.

PARTIE B

On considère la fonction f sur] 1 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{2\ln(x-1)}{x^2 - x}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère (O ;$\vec{i}$;$\vec{j}$) .Unité graphique : 2cm sur (x'O x) ; et 4cm sur (y'O y) .

1) Calculer les limites de f en 1 et en + ∞. Interpréter les résultats .

2) a) Montrer que pour tout x de] 1 ; + ∞ [, $f'(x) = \dfrac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2} \times g(x)$.

En déduire les variations de f.

b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$ et dresser le tableau de variation de f.

3) Construire la courbe (C).

PARTIE C

On se propose de donner un encadrement de l'aire A exprimer en cm² de l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $\begin{cases} 2 \le x \le \frac{5}{2} \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x ≥ 2 on a : $\dfrac{1}{(x-1)^2} \le \dfrac{2}{x^2-x} \le \dfrac{1}{x-1}$

b) En déduire que pour tout x ≥ 2, $\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} \le f(x) \le \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)}$.

2) a) Calculer I = $\int_2^{\frac{5}{2}} \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)} dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer J = $\int_2^{\frac{5}{2}} \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$.

3) a) Déduire de ce qui précède un encadrement de K = $\int_2^{\frac{5}{2}} f(x) dx$.

b) Exprimer A en fonction de K, puis en déduire un encadrement de A.

On donne ln(2) = 0,69 et ln(3) = 1,09 , α = 2,85 et $f(\alpha) = 0{,}25$

Année 2000
Corrigé

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE I

1°) l'estimation du nombre de naissances lors de l'année 1995.

x = $\frac{4+5}{2}$ = 4,5 ; y(4,5) = -22×4,5 + 397 = 298

Le nombre de naissances lors de l'année 1995 peut être estimé à 298

2°) a) Nombre de naissances au cours de l'année 2000

x = 7 ; y(7) = -22×7 + 397 = 243

Le nombre de naissances au cours de l'année 2000 est 243

b) Calcul de l'année à partir de la quelle il y aura deux fois moins de naissances qu'en 1988

Le nombre de naissances en 1988 est 374

$2y \leq 374 \Leftrightarrow y \leq \frac{374}{2} \Leftrightarrow y \leq 187 \Leftrightarrow -22x + 397 \leq 187 \Leftrightarrow -22x \leq -210$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{210}{22} \Leftrightarrow x \geq 9{,}54 \Leftrightarrow x = 10$

Calcul de l'année :

1986 + 2×10 = 2006

C'est à partir de l'année 2006 qu'il y aura deux fois moins de naissances qu'en 1988

3°) Calcul de A et B

A = -22×2 + 397 ⇔ $\boxed{A = 353}$; B = -22×5 + 397 ⇔ $\boxed{B = 287}$

EXERCICE II

$Z_A = 2 + 2i$; $Z_B = (1+\sqrt{3}) + i(3+\sqrt{3})$

1°) Ecrivons le complexe $Z = \frac{Z_A}{Z_B}$ sous forme algébrique

$$Z = \frac{2+2i}{(1+\sqrt{3}) + i(3+\sqrt{3})} = \frac{(2+2i)[(1+\sqrt{3}) - i(3+\sqrt{3})]}{(1+\sqrt{3})^2 + (3+\sqrt{3})^2} = \frac{(2+2i)(1+\sqrt{3}) - i(2+2i)(3+\sqrt{3})}{16+8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{3}+2i+i2\sqrt{3} - i(6+2\sqrt{3}+6i+i2\sqrt{3})}{16+8\sqrt{3}} = \frac{2+2\sqrt{3}+2i+i2\sqrt{3} - 6i - i2\sqrt{3}+6+2\sqrt{3})}{16+8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{3}+6+2\sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3} + 2)}{16+8\sqrt{3}}$$

$$Z = \frac{8+4\sqrt{3} - 4i}{16+8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3} - i}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} - \frac{i(4-2\sqrt{3})}{16-12} = \frac{1}{2} - i\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$Z = \frac{1}{2} - i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$$

$$\boxed{\mathbf{Z = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)}}$$

2°) a) Déterminer OA et AB

$OA = |Z_A| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \boxed{OA = 2\sqrt{2}}$

$AB = |Z_B - Z_A| = \left|(-1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\right| = \sqrt{(-1+\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8}$

$\boxed{AB = 2\sqrt{2}}$

Vérifions que OB = 2 (1+ $\sqrt{3}$)

$OB = |Z_B| = |(1+\sqrt{3}) + i(3+\sqrt{3})| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (3+\sqrt{3})^2}$

$OB = \sqrt{16 + 8\sqrt{3}} = 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 2|1+\sqrt{3}| \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{OB = 2\,(1+\sqrt{3})}}$

b) Déterminons en radians, la mesure principale de $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OA})$ et $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OB})$

$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OA}) = \arg(Z_A) = \arg(2+2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\boxed{(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \arg(Z_B) = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \arg(Z_B) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\boxed{(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]}$$

Déduisons une mesure en radian de$(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$

$(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}\,;\vec{u}) + (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OB}) = -(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OA}) + (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OB})$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\boxed{(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})}$$

3°) Déterminons les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

D'après 1°) $Z = \frac{Z_A}{Z_B} = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$

D'après 2°) $\arg(Z) = (\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$|Z| = \left|\frac{Z_A}{Z_B}\right| = \frac{OA}{OB} = \frac{2\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{1-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-2}$

$\mathbf{|Z| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

La forme trigonométrique de Z s'écrit :

$Z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

La forme algébrique de Z s'écrit : $Z = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$

Par identification des deux formes d'écritures on a :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 1 \\ (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Or $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$; donc $\boxed{\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}}$

4°) a) Déterminons l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle

$\alpha = 2(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$

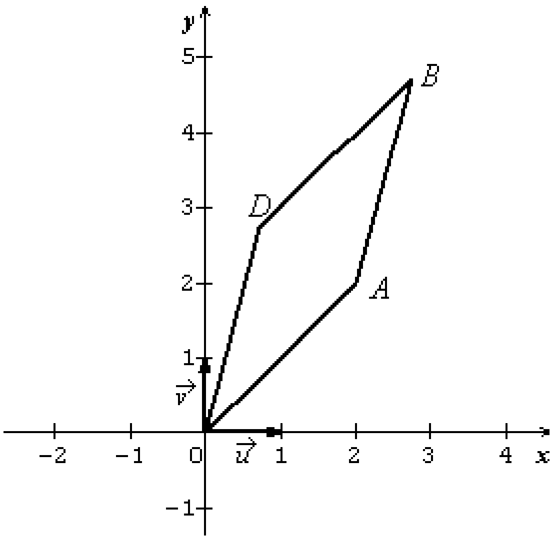
$\alpha = 2(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = 2\times\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$Z_D = e^{i\frac{\pi}{6}}Z_A = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})(2 + 2i)$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})(2 + 2i) = \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - 1$

$\boxed{\mathbf{Z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})}}$

b) Nature du quadrilatère OABD



D est l'image de A par une rotation de centre O, alors OA = OD.

D'après 2°) a) OA = AB = $2\sqrt{2}$, alors on a :

OA = AB = OD = $2\sqrt{2}$.

Calculons BD:

BD = $|Z_D - Z_B| = |-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$

D'où on a : OA = AB = OD = BD. **Les 4 cotés du quadrilatère sont égaux par conséquent OABD est un losange**.

PROBLEME

PARTIE A

Soit $g(x) = \frac{x}{2x-1} - \ln(x-1)$; $D_g =]1\,;+\infty[$

1°) Etude des variations de g.

Dérivée

$g'(x) = \frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(2x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$

$g'(x) = \frac{-(x-1)-(2x-1)^2}{(x-1)(2x-1)^2} = \frac{-x+1-4x^2+4x-1}{(x-1)(2x-1)^2}$

$\boxed{\mathbf{g'(x) = \frac{-4x^2+3x}{(x-1)(2x-1)^2}}}$

Signe de g'(x) sur]1 ; +∞ [

$\forall$ x ∈]1 ; +∞[, $x - 1 > 0$ et $(2x-1)^2 > 0$, alors le signe de g'(x) dépend de celui de $-4x^2 + 3x$.. Par conséquent :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
$-4x^2+3x$		-	0	+	0	-		-	
$g'(x)$								-	

$\forall$ x ∈] 1 ; +∞ [, g'(x) < 0

Sens de variations

Sur] 1 ; +∞ [, g est strictement décroissante.

2°) a) Montrons que l'équation g(x) = 0 a une unique solution α dans] 1 ; +∞ [

D'après 1°) g est continue et strictement décroissante sur] 1 ; +∞ [, elle réalise une bijection de] 1 ; +∞ [sur g( ] 1 ; +∞ [ ) =] $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to 1+} g(x)$ [=] -∞ ; +∞[

Car on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; et $\lim\limits_{x \to 1+} g(x) = +\infty$

0 ∈] -∞ ; +∞ [, alors l'équation g(x) = 0 a une unique solution α dans] 1 ; +∞ [

b) Montrons que 2 <α<3

$g(2) = \frac{2}{3} > 0$; $g(3) = \frac{3}{5} - \ln 2 < 0$

g(2) × g(3) < 0, alors 2 <α<3

3°) Déduisons le signe de g sur]1 ; +∞ [

Tableau de variations

x	1	α	+∞
$g'(x)$		-	
g(x)	+∞	0	-∞

Pour x ∈] 1 ; α [, g(x) > 0 et Pour x ∈] α ; +∞ [,g(x)<0

PARTIE B

On considère $f(x) = \frac{2\ln(x-1)}{x^2-x}$; D_f =] 1 ; +∞ [

1°) Calculons les limites de f en 1 et en +∞.

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{2\ln(x-1)}{x^2-x} = \lim_{x \to 1+} \frac{2}{x^2-x} \times \ln(x-1) = -\infty$$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty}$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1+} \frac{2}{x^2-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1+} \ln(x-1) = \lim\limits_{x \to 0+} \ln X = -\infty, avec\ X = x-1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x-1)}{x^2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} \times \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0$$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0; X = x-1 \end{cases}$

Interprétation des résultats

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale de (C f)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale de (C f)

2°) a) Montrons que pour tout x de] 1 ; +∞ [, $f'(x) = \frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2} \times g(x)$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x-1} \times (x^2-x) - 2(2x-1)\ln(x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{2x - 2(2x-1)\ln(x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{2(2x-1)(\frac{x}{2x-1} - \ln(x-1))}{(x^2-x)^2}$$

$$= \frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2}\left[\frac{x}{2x-1} - \ln(x-1)\right] \text{ or } \frac{x}{2x-1} - \ln(x-1) = g(x)$$

D'où $f'(x) = \frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2} \times g(x)$

b) Déterminons les variations de f.

Signe de f '(x)

$\forall$ x $\in$] 1 ; +∞ [,$\frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2}$ > 0, alors le signe de f '(x) dépend de celui de g(x). D'où d'après la partie A

Pour x ∈] 1 ; α [, f '(x) > 0

Pour x ∈] α ; +∞ [, f '(x) < 0

Sens de variations

f est strictement croissante sur] 1 ; α [et strictement décroissante sur] α ; +∞ [

c) Montrons que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$

$f(\alpha) = \frac{2\ln(\alpha-1)}{\alpha^2-\alpha}$; or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2\alpha-1} - \ln(\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1) = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$

Donc $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha(\alpha-1)(2\alpha-1)} = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$

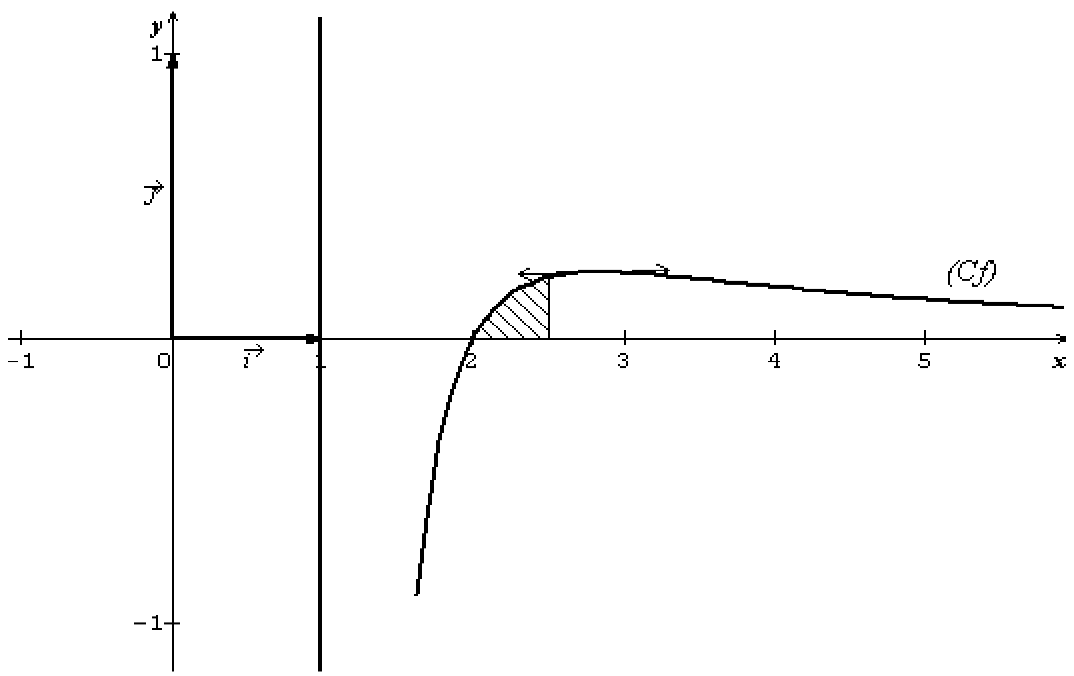
$$\boxed{\mathbf{f(\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}}}$$

<u>Dressons le tableau de variations de f</u>

x	1		α		+∞
f '(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ -∞	↗	f(α)	↘	0

3°) Construction de la courbe (C f)

(C f) ∩ (ox) = {(2; 0)}



PARTIE C

1°) a) Montrons que pour tout $x \geq 2$: $\frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1}$

Etudions le signe de la différence $\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2-x}\right)$

$\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-x-2(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2-x)} = \frac{-x^2+3x-2}{(x-1)^2(x^2-x)}$

$\forall x \geq 2$, $(x-1)^2 > 0$ et $x^2 - x > 0$, alors le signe de cette différence dépend de celui de $-x^2+3x-2$

Par conséquent :

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$-x^2+3x-2$	- 0 + 0 -

$\forall x \geq 2$; $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{\frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{x^2-x}}$ (*)

Etudions le signe de $\left(\frac{2}{x^2-x} - \frac{1}{x-1}\right)$

$\frac{2}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1)-(x^2-x)}{(x^2-x)(x-1)} = \frac{2x-2-x^2+x}{(x^2-x)(x-1)} = \frac{-x^2+3x-2}{(x^2-x)(x-1)}$

$\frac{2}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = \frac{-(x-2)(x-1)}{(x^2-x)(x-1)} = \frac{-x+2}{(x^2-x)}$

$\forall x \geq 2$, $x^2 - x > 0$, alors le signe de cette différence dépend de celui de $-x + 2$. Par conséquent.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$-x+2$	+ 0 -

$\forall x \geq 2$; $\frac{2}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{\frac{2}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1}}$ (**)

$$\begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{x^2-x} \\ \frac{2}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{\frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1}}}$$

b) Déduisons que pour tout $x \geq 2$: $\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

Pour tout $x \geq 2$ on a : $\frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1}$

$\forall x \geq 2$, $x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x-1) \geq 0$; par suite

$\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} \leq \frac{2\ln(x-1)}{x^2-x} \leq \frac{\ln(x-1)}{x-1}$, or $\frac{2\ln(x-1)}{x^2-x} = f(x)$

D'où $\boxed{\mathbf{\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln(x-1)}{x-1}}}$

2°) a) Calculons $I = \int_2^{5/2} \frac{\ln(x-1)}{x-1} dx$

$I = \int_2^{5/2} \frac{\ln(x-1)}{x-1} dx = I = \int_2^{5/2} \frac{1}{x-1} \times \ln(x-1)\, dx$

Posons $u(x) = \ln(x-1)$; $u'(x) = \frac{1}{x-1}$ donc

$\frac{1}{x-1} \times \ln(x-1) = u'(x) \times u(x)$ d'où

$I = \left[\frac{1}{2}(\ln(x-1))^2\right]_2^{5/2} = \frac{1}{2}(\ln(\frac{3}{2}))^2$

$\boxed{\mathbf{I = \frac{1}{2}(\ln\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2)^2}}$

b) Calculons J = $\int_2^{5/2} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\,dx$

<u>Intégration par parties</u>

Posons $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \\ v(x) = \ln(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{-1}{x-1} \\ v'(x) = \frac{1}{x-1} \end{cases}$

$J = \int_2^{5/2} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\,dx = [-\frac{\ln(x-1)}{x-1}]_2^{5/2} + \int_2^{5/2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

$= [-\frac{\ln(x-1)}{x-1} - \frac{1}{x-1}]_2^{5/2}$

$J = -\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\ln\frac{3}{2} = \frac{1-2(\ln 3-\ln 2)}{3}$

$\boxed{\mathbf{J = \frac{1-2(\ln 3-\ln 2)}{3}}}$

3°) a) Encadrement de K = $\int_2^{5/2} f(x)\,dx$

$\forall\, x \geq 2\,;\ \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln(x-1)}{x-1}$, alors

$\int_2^{5/2} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\,dx \leq \int_2^{5/2} f(x)dx \leq \int_2^{5/2} \frac{\ln(x-1)}{x-1}\,dx$

$J \leq K \leq I \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{\frac{1-2(\ln 3-\ln 2)}{3} \leq K \leq \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2)^2}}$

AN: $\boxed{\mathbf{0{,}06 \leq K \leq 0{,}08}}$

b) A = $\int_2^{5/2} f(x)\,dx \times UA$

Exprimons A en fonction de K

$A = K \times UA \Leftrightarrow A = 4K$ car $UA=4cm^2$

$\boxed{\mathbf{\frac{4}{3}[1 - 2(\ln 3 - \ln 2)\,] \leq A \leq 2(\ln 3 - \ln 2)^2}}$

AN : $\boxed{\mathbf{0{,}24 \leq A \leq 0{,}32}}$