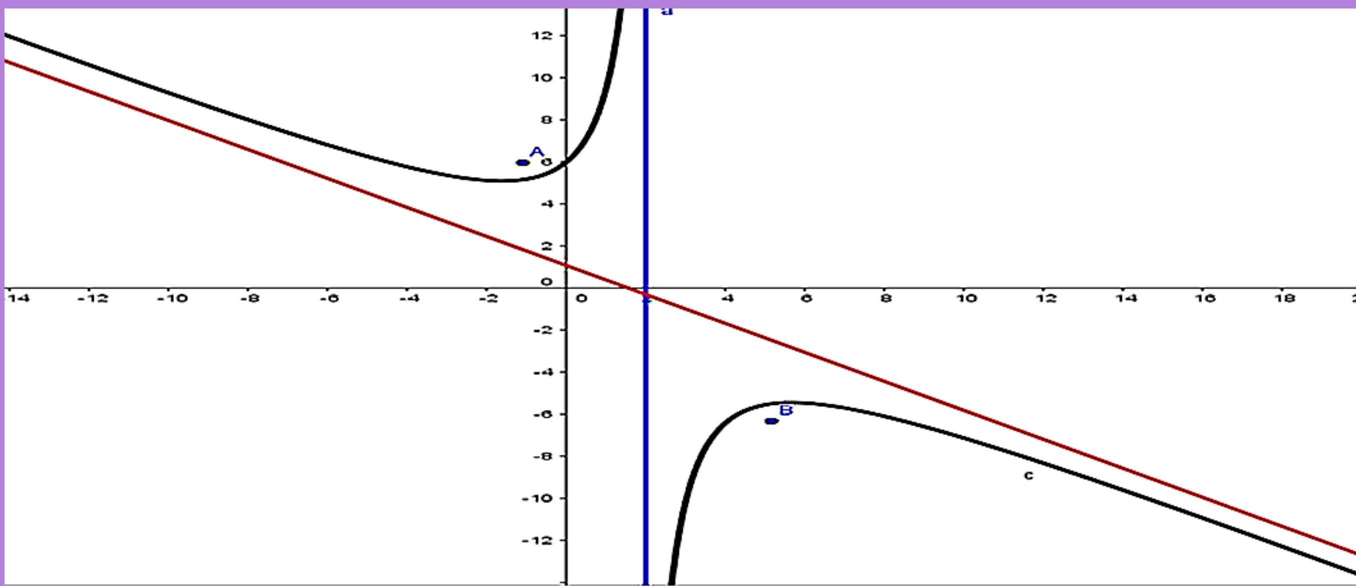
Travail – Persévérance – Réussite

Le Scorpion

MATHEMATIQUES 1ère C

- COURS BIEN ÉLABORÉ
- CORRIGÉ (EXERCES + COMPETENCES)
- CORRIGÉ PROBATOIRE C-E 2020 à 2023

$$Kerf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$



Kaka Dairou

Tél: (+237)695-76-24-75

WhatsApp: (+237)681-44-66-17

Le Scorpion

République du Cameroun

Collection le Scorpion

Mathématiques 1ère C & E

Je remercie le tout puissant (Soub Hana Wata Ala) le maître de l'univers. Gloire à Allah mon maître qui m'a à tout donner et continue de me donner. Louange à Allah qui Sans lui je ne serai pas à ce niveau, et qui m'a donné la force de concevoir ce document. Je te Glorifie et te Glorifierais toujours. Je te rends Grâce pour les bienfaits que tu fais pour moi et ma famille.

Une dédicace à tous mes collègues du LYCEE BILINGUE DE NGONG.

"Tout le monde est un géni ; si vous jugez le poisson sur sa capacité à grimper un arbre, il passera toute sa vie à croire qu'il est stipude" Albert Einstein

M. KAKA Dairou

Enseignant de mathématiques

Tel : 695-76-24-75

WhatsApp 681-44-69-17

maxwellkadaflis@Gmail.com

AVANT-PROPOS

Ce fascicule conforme a : Approche par les Compétences avec Entrée par une Situation de Vie (APC/ESV) est destiné à tout amoureux de la mathématique, particulièrement aux élèves de la classe de 1ère C & E

Il n'a pas la prétention de se substituer au cours du professeur. Son objectif est tout

Simplement de faciliter à ses utilisateurs, une bonne assimilation de leurs leçons et une

Chaque chapitre se présente de la manière suivante

- - L'essentiel du cours. Chaque notion importante du chapitre ;
- - De multiple exercices a de niveau de difficulté varie, avec certaines compétences ;
- - Une proposition détaillée de solution aux exercices proposés ;
- - Les 04 derniers sujets au PROBAIORE C & E.

Je vous souhaite que cet ouvrage apporte à ses différents utilisateurs toute l'aide qu'ils désirent. L'œuvre humaine n'étant jamais parfait, toute suggestion, toute critique positive et négative serait la bienvenue.

Chers enseignant et élèves nous vous souhaitons bon usage

L'auteur

Alphabet grec et symboles usuels

minuscules		*éq. latin*	*MAJUSCULES*	
alpha	α	a,A	(A)	ALPHA
bêta	β	b,B	(B)	BÊTA
gamma	γ	g,G	Γ	GAMMA
delta	δ	d,D	Δ	DELTA
epsilon	ε, ϵ	e,E	(E)	EPSILON
zêta	ζ	z,Z	(Z)	ZÊTA
êta	η	ê,Ê	(H)	ÊTA
thêta	θ,ϑ	th,TH	Θ	THÊTA
iota	ι	i,I	(I)	IOTA
kappa	$\kappa, \varkappa$	k,K	(K)	KAPPA
lambda	λ	l,L	Λ	LAMBDA
mu	μ	m,M	(M)	MU
nu	ν	n,N	(N)	NU
xi	ξ	x,X	Ξ	XI
omicron	(o)	o,O	(O)	OMICRON
pi	π, ϖ	p,P	Π	PI
rhô	ρ, ϱ	r,R	(P)	RHÔ
sigma	σ, ς	s,S	Σ	SIGMA
tau	τ	t,T	(T)	TAU
upsilon	υ	u,U	(Y), Υ	UPSILON
phi	φ, ϕ	ph,PH	Φ	PHI
chi	χ	ch,CH	(X)	CHI
psi	ψ	ps,PS	Ψ	PSI
oméga	ω	o,O	Ω	OMÉGA

(les parenthèses indiquent que la graphie des lettres est comme celle latine)

★ ***à ne pas confondre*** ★

a, α, x, n (a, alpha, iks, ène)
ν, v, υ (nu, vé, upsilon)
υ, u, μ (upsilon, u, mu)
σ, o (sigma, o)
η, n (êta, ène)
χ, x (chi, iks)
ρ, p (rhô, pé)

$Z, 2$ (zède, deux)
$\mathfrak{z}, 3$ (zède, trois)
$1, l, I$ (un, èle, i)
$o, \circ$ (o, *ronde*)
$O, 0$ (o, zéro)

$\varepsilon, \in$ (epsilon, *appartient à*)
δ, d, ∂ (delta, dé, *dé ronde*)
$C, \subset$ (cé, *est inclus dans*)
$M, \Pi, \cap$ (ème, pi, *inter*)
$U, \cup$ (u, *union*)

On pourra utiliser :

1. les lettres $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{S}$ de l'alphabet gothique (m, p, q, A, M, P et S) ;
2. la première lettre $\aleph$ (*aleph*) de l'alphabet hébreu.

Quelques abréviations

standard

ssi	si et seulement si
i. e. (*id est*), **c.-à-d.**	c'est-à-dire, en d'autres termes
e. g. (*exempli gratia*)	par exemple
c. q. f. d.	*c*e qu'il fallait démontrer

personnelles

$\mathbf{p^T}$	propriété
$\mathbf{p^o}$	proposition
th	théorème
cor	corollaire

$\mathbf{déf^o}$	définition
rq	remarque
eg	exemple
ceg	contre-exemple

Dictionnaire français : *TLF* (Trésor de la Langue Française)
Dictionnaire de synonymes : *CRISCO* (université de Caen)

TABLE DES MATIÈRES

SUJETS + CORRIGÉS D'EXAMENS

CHAPITRE 1 : ÉQUATIONS, INÉQUATIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ DANS IR

LECON 1 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS IR

1- Discriminant d'un polynôme du second degré

a) Définition

On considère le polynôme du second degré P tel que: $P(x) = ax^2 + bx + c$ **où** $a \neq 0$.

On appelle discriminant du polynôme P le nombre réel noté Δ défini par: $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$.

b) Propriété

On considère le polynôme du second degré P tel que: $P(x) = ax^2 + bx + c$, **où** $a \neq 0$, **et** Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux zéros distincts x_1 *et* x_2 tels que: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  La forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, P admet un zéro double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

  Dans ce cas la forme factorisée de $P(x)$ est : $P(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de zéro et P n'est pas factorisable.

2-- Equations du second Degré

Définition

On appelle équation du second degré, toute équation de la forme : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$, *où* $a, b, et\ c$ **sont des nombres réels** *et* $a \neq 0$.

Résolution d'une équation du second degré

- **Résolution algébrique**

  Résoudre l'équation du second degré $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$ revient à déterminer les zéros éventuels du polynôme du second degré P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P le polynôme du second degré définie par: $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b\ et\ c$ sont des nombres réels et $a \neq 0$ et Δ son discriminant.

- , le polynôme P a deux zéros distincts x_1 *et* x_2. *(on suppose que* $x_1 < x_2$ *)*

On obtient le tableau de signes suivant:

	Si $\Delta > 0$					
x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$	*Signe de a*	0	*Signe de – a*	0	*Signe de a*	

	Si $\Delta = 0$,		
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	*Signe de a*	0	*Signe de a*

	Si $\Delta < 0$	
x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	*Signe de a*	

b) Définition d'une inéquation du second degré

Soit P un polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in IR^3$ avec $a \neq 0$.

Toute inéquation de l'un des types ci-dessous est appelée inéquation du second degré.

$x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) < 0$; $x \in \mathbb{R}, P(x) \leq 0$

c) Résolution d'une inéquation du second degré

*Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation de l'un des types ci-dessus revient **à étudier le signe du polynôme $P(x)$**, puis trouver **l'intervalle ou les intervalles** correspondants à l'ensemble des solutions de l'inéquation.*

Exercice d'application

Résous dans $\mathbb{R}$, les inequations suivantes:

1) $2x^2 - 5x + 3 < 0$; 2) $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$; 3) $x^2 + x + 2 > 0$

Solution

1) Résolution de l'inéquation $2x^2 - 5x + 3 < 0$

On considère le polynôme P tel que : $P(x) = 2x^2 - 5x + 3.$

On calcule le **discriminant** du polynôme **P.** $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$

Le polynôme **P** admet **deux zéros**: $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$ *et* $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

Pour $x \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$, $P(x) < 0$ Donc $S_{\mathbb{R}} = \left]1; \frac{3}{2}\right[$

2) **Résolution** de l'inéquation $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$;

On considère le polynôme **Q** tel que: $Q(x) = -x^2 - 4x - 4.$

On calcule le discriminant du polynôme Q.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 16 - 16 = 0$

Le polynôme Q admet un **zéro double** : $x_0 = \frac{4}{-2} = -2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$Q(x)$		−	0	−	

Pour $x \in \{-2\}, Q(x) \geq 0$ $S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$

3) **Résolution** de l'inéquation $x^2 + x + 2 > 0$;

On considère le polynôme R tel que : $R(x) = x^2 + x + 2.$

On calcule le discriminant du polynôme R. $\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$

Le polynôme R **n'admet pas de zéro** . On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$R(x)$		+	

Pour $x \in \mathbb{R}, R(x) > 0$ $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

d) Équation du type $ax^2 + bx + k = 0$ ou k dépend d'un paramètre

Soit l'équation $ax^2 + bx + k = 0 (a \neq 0)$. d'inconnu x et k est fonction du parametre

Pour résoudre une équation du type: $x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + k = 0$ $(a \neq 0)$. On peut procéder de la façon suivante:

- *Calcculer le discriminant de $x^2 + bx + k = 0$ en fonction du parametre m.*
- *Etudier le signe de ce discriminant suivant les valeur du paramètre m.*
- *Determiner suivant les valeurs du paramètre m l'ensemble solution de l'équation.*

Exercice d'application

Résolvons dans ℝ, l'equations paramétrique suivant :$-x^2-2x-m=0$,

- On considère le polynôme **Q** tel que: $Q(x)=-x^2-2x-m$.
- On calcule le discriminant du polynôme **Q.**
- $\Delta=(-2)^2-4\times(1)\times(m)=4(m+1)$
- **Racine** et **signe** de Δ,

$\Delta=0 \Leftrightarrow 4(m+1)=0 \;\; ie\; m=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$Q(x)$	$-$		$+$

✓ **Si** $m<-1$ *alors* $\Delta<0$ *et l'équation* **n'admet pas de solution dans IR. S=∅**

✓ **Si** $m=-1$ *alors* $\Delta=0$ *et l'équation* admet **une seule solution dans IR:** : $x_0=-\frac{(-2)}{2X1}=1$

✓ *Si* $m>1$ *alors* $\Delta>0$ *et l'équation admet* ***deux solutions dans IR;*** $x_0=\frac{2+2\sqrt{m+1}}{2}=1+\sqrt{m+1}$ *et* $x_1=\frac{2-2\sqrt{m+1}}{2}=1-\sqrt{m+1}$ $S=\{1-\sqrt{m+1};1+\sqrt{m+1}\}$

Signe et factorisation du trinôme ax^2+bx+c $(a\neq0)$

Discriminant $\Delta=b^2-4ac$	Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Factorisation du trinôme ax^2+bx+c	Signe du trinôme ax^2+bx+c
$\Delta>0$	L'équation admet deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $S=\{x_1;x_2\}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$; ax^2+bx+c: Signe de a 0 Signe contraire de a 0 Signe de a (on suppose que $x_1<x_2$)
$\Delta=0$	L'équation admet une unique solution qui est $x_0=\frac{-b}{2a}$. $S=\{x_0\}$	$a(x-x_0)^2$	x: $-\infty$ … x_0 … $+\infty$; ax^2+bx+c: Signe de a 0 Signe de a
$\Delta<0$	L'équation n'admet aucune solution dans IR $S=\phi$	Le trinôme n'admet pas de factorisation dans IR	x: $-\infty$ … $+\infty$; ax^2+bx+c: Signe de a

LECON 2 : SYSTEMES D'EQUATIONS A DEUX INCONNUES SE RAMENANT AU SECOND DEGRE DANS ℝ

I- Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 1

Tous système de deux equations a deux inconnues réelles **(y; z)** de la forme $\begin{cases} y+z=S \\ yz=P \end{cases}$ **se** ramène une equation du type $X^2+SX+P=0$ *dans* ℝ,

- $S^2-4P<0$ alors le système **n'admet pas** de solution dans IR^2.
- **Si** $S^2-4P=0$, alors le système **admet un seul couple** de solution $\left\{\left(\frac{S}{2};\frac{S}{2}\right)\right\}$.
- **Si** $S^2-4P>0$, alors le système **admet deux couples** de solutions **S=**$\{(X_1;X_2);(X_2;X_1)\}$,

Ou $X_1;X_2$ sont les solutions dans IR de l'eq$\mathcal{O}$ $X^2+SX+P=0$

Propriété 2

Si l'équation du second degré (E), $ax^2+bx+c=0$ *possède deux solutions* X_1 *et* X_2. ($X_1 \neq X_2$). *alors:*

- $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *et l* $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
- *est* $\Delta = (a)^2(S^2 - 4P)$

Exercice d'application

Détermine deux nombres réels s'ils existent dont leur somme est -3 *et leur produit est* -4 *et deuire la solution du* ***systeme*** *(S)* $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$

II- Equations bicarrées

a) Définition

On appelle ***équation bicarrée une*** *équation du type :,* $ax^4+bx^2+c=0$, *où* $(a,b,c) \in IR^3$ *et* $a \neq 0$

b) Résolution d'une équation bicarrée

méthode

Pour résoudre une équation du type: $x \in \mathbb{R}, ax^4+bx^2+c=0$ $(a \neq 0)$. *On peut procéder de la façon suivante:*

- On pose: $X = x^2$;
- On résout l'équation du second degré : $aX^2+bX+c=0$;

On résout, s'il y lieu, les équations d'inconnue x du type $x^2 = X$.(X étant solution de l'équation $aX^2+bX+c=0$)

Exercice d'application. *Résous dans* $\mathbb{R}$, *l'équation suivante*: $2x^4-3x^2+1=0$

Solution :

Posons : $X = x^2$. *L'équation devient* : $2X^2-3X+1=0$.

On a : $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times 1 = 9-8 = 1$, *les solutions de l'équation* $2X^2-3X+1=0$ *sont :*

$$X_1 = \frac{3-1}{2} = 1; \qquad X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

On obtient : $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$$\boxed{S_{IR} = \{1;-1;\sqrt{2};-\sqrt{2}\}}$$

LECON 3 : POLYNÔMES DU TROISIÈME DEGRÉ

I- POLYNÔMESDU TROISIÈME DEGRÉ

A- Définition

Tout polynôme de la forme $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ **(a ≠ 0,(b, c et d)** ∈IR³ est appelé polynôme de degré **3.**

- ***Racine d'un polynôme:***

Le nombre x_0 est une racine du polynôme **p**, signifie que $P(x_0) = 0$

Exemple: on considère le polynôme p *definie par* $P(x) = 2x^3+5x^2+4x+1$. Vérifier que -1 est une racine du polynôme P.

Solution : on a $P(1) = -2+5-4+1 = 3-3 = 0$, d'où -1 est une racine du polynôme P

$\boxed{P(x) \text{ peut s'écrire sous la Forme } (x-1)(ax^2+bx+c) = 0}$

✓ α étant une racine de P, ce polynôme peut donc s'écrire sous la forme $\boxed{P(x) = (x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$.cette forme nous permet de factoriser le polynôme $p(x)$.

NB: si une fraction $\frac{a}{b}$ est une racine de P, alors on peut faire la division euclidienne du polynôme P par $(x - \frac{a}{b})$

Résolution d'équations de degré 3

a) Méthode par identification des coefficients

Exemple: soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3-6x^2+5x+12$ ou X est un réel quelconque.

a- Calculer $p(3)$. Que traduit ce résultat?

b- Mettre $P(x)$ sous la forme $P(x)= (x-3)(x^2+bx+c)$ ou **b** et **c** sont les réels à Déterminer.

c- Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$.

Solution :

a- $P(3) = 3^3-6(3)^2+5(3)+12 = 27-54+15+12 = -27+27 = 0$ d'où $p(3) = 0$. Ce résultat traduit que 3 est racine du polynôme P.

b- Mettons $P(x)$ sous la forme $P(x)=(x-3)(x^2+bx+c)$. On a :

$P(x) = x^3+bx^2+cx-3x^2-3bx-3c = x^3+(b-3)x^2+(c-3b)-3c$. Par identification des coefficients, on a $\begin{cases} b-3=-6 - b=-3 \\ C-3b = 5 - c = -4 \\ -3c = 12 \end{cases}$. Donc $\boxed{P(x) = (x-3)(x^2-3x-4)}$.

c- Résolvons l'équation $P(x) = 0$. On a : $(x-3)(x^2-3x-4) = 0$ signifie que $(x-3) = 0$ *ou* $(x^2-3x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ *ou* $(x^2-3x-4) = 0$. Calculons le discriminant ; on a :

$\Delta = (-3)^2-4(1)(-4) = 9+16 = 25 > 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ *et* $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$

D'où $S = \{-1; 3; 4\}$

b) Division euclidienne :

Exemple: Soit le polynôme **P** défini par $P(x) = 2x^3+3x^2-3x-2$

1- Montrez que 1 est racine de **P**

2- Ecrire **P** sous la forme $(x - 1)(x^2+bx+c)$ ou b et c sont des réels à déterminer

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2-3x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} 2x^3-2x^2 \quad\quad\quad & 2x^2+5x+2 \\ \hline 5x^2-3x \quad\; & \\ 5x^2-5x \quad\; & \\ \hline 2x-2 & \\ 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Solution:

1- Montrons que -1 est racine de P

$P(1) = 2(1)3 + 3(1)2 - 3(1) - 2 = 0$. D'où 1 est racine du polynôme P.

2- Ecrivons P sous la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$

On cherche maintenant à factoriser $P(x) = 2x^3+3x^2-3x-2$ par $(x - 1)$ Utilisons la méthode de la division euclidienne/

Donc $\boxed{P(x) = (x-1)(2x^2+5x+2)}$

C- INEQUATIONS DE DEGRE 3

Une **inéquation du troisième degré** est une **inéquation** se ramenant à la forme $ax^3+bx^2+cx+d \geq 0$ ($<$ ou, $>$ et $\leq$)

Méthode de résolution

Pour résoudre ce type d'inéquation on procède de la manière suivante

- On détermine les racines de son polynôme associé,
- On dresse son tableau de signe,
- L'intervalle ou la réunion d'intervalles solution est celle du signe de l'inégalité

Exemple :

résolvons l'inéquation (x): $2x^3+3x^2-3x-2<0$

On sait que 1 est racine du polynôme et on trouve $P(x) = (x-1)(2x^2+5x-2) = (x+2)(2x+1)(x-1)$

a- Dressons le tableau de signe de P(x)

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+		+		+
$2x+1$	-		-	0	+		+
$x-1$	-		−		−	0	+
$P(x)$ 0	−	0	+	0	−	0	+

Pour $P(x) < 0, S =]-\infty, -2[\cup \left]-\frac{1}{2}, -1\right[$. $pour$ $P(x) = 0$,

LECON 4 : EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES DANS IR

I- *EQUATIONS IRRATIONNELLES DANS IR*

1- *Résolution d'une équation irrationnelle du type*: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$

méthode

- ✓ **Pour résoudre une équation irrationnelle du type** : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} = Q(x)$ **on peut**
- ✓ **Utiliser l'équivalence suivante :** $\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = (Q(x))^2 \end{cases}$.
- ✓ **L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.**

II- EQUATIONS IRRATIONNELLES DANS IR

1- *Résolution d'une inéquation irrationnelle du type*: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$.

Méthode de resolution

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} < Q(x)$ on peut utiliser l'équivalence suivante : $\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < (Q(x))^2 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système

2- *Résolution d'une inéquation irrationnelle du type*: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

■ *Méthode de résolution*

Pour résoudre une inéquation irrationnelle du type: $x \in \mathbb{R}, \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ *on peut utiliser l'équivalence suivante :*

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq (Q(x))^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \right)$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des solutions du système.

Exercices commentés

Exercice 1

Etudie le signe de chacun des polynômes suivants, connaissant leurs zéros éventuels:

$P(x) = 2x^2 - 8x + 6$, les zéros de P sont **1 et 3;**

1) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q n'a pas de zéro ;
2) $R(x) = -x^2 + 10x - 25$, le zéro de R est 5.

Solution

1) $\boldsymbol{P(x) = 2x^2 - 8x} + 6$, les zéros P sont **1** et **3,** le ***discriminant*** Δ de **P** est ***positif*** $(\Delta > 0)$.
Le coefficient de x^2 est $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{a > 0}$. On obtient le tableau de signes suivant :

- Pour $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, $P(x) > 0$,
- Pour $x \in]1; 3[$, $P(x) < 0$
- Pour $x \in \{1; 3\}$, $P(x) = 0$.

x	$-$	1		3	$+\infty$
P	$+$	0	$-$	0	$+$

2) $Q(x) = -2x^2 - 8x - 11$, Q ***n'a pas de zéro;*** *car* $\Delta < 0$.

Le coefficient $\boldsymbol{a}$ *de* $\boldsymbol{x^2}$ *est* $\boldsymbol{a = -2}$ *et* $a < 0$.

On obtient le tableau de signes suivant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Q(x) < 0}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$Q($	$-$	

3) $\boldsymbol{R(x) = -x^2 + 10x - 25}$, *le zéro de R est* ***5. Car*** $\Delta = 0$

Le coefficient a *de* x^2 *est* $a = -1$ *et* $a < 0$.

On obtient donc le tableau de signe suivant:

Pour $x \in]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$, $R(x) < 0$,

Pour $x \in \{5\}$, $R(x) = 0$.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$R(x)$	$-$	0	$-$

Exercice 2 **Résous dans** $\mathbb{R}$**, l'équation** $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$.

Solution

$$\sqrt{x^2 - 1} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; +\infty[\\ x^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; +\infty[\\ x = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[\cap \left\{-\frac{5}{4}\right\} . \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

Exercice 3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2 + 5x + 3} < 2x + 1$

Solution

$$\sqrt{x^2+5x+3} < 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+3 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x^2+5x+3 < (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]1; +\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]1; +\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]1; +\infty\right[\quad \text{Donc} \quad S_{\mathbb{R}} = \left]1; +\infty\right[$$

Exercice 4 . **Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\sqrt{2-x} \geq x+4$**

Solution

$$\sqrt{2-x} \geq x+4 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq (x+4)^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+4 \leq 0 \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \in [-4; +\infty[\\ x \in [-7; -2] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in]-\infty; 2] \\ x \in]-\infty; -4] \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x \in [-4; -2] \text{ ou } x \in]-\infty; 2] \cap]-\infty; -4]) \Leftrightarrow x \in [-4; -2] \cup]-\infty; -4]$$

L'ensemble des solutions est : $]-\infty; -2]$.

Exercice.4

Par la méthode du discriminant, résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes:

1) $-2x^2+5x+3=0$ 2) $9x^2+4x+5=0=$ 3) $\sqrt{2}x^2+(1-\sqrt{2})x-1=0$

Corrigé

1) $\Delta = 49$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-1}{2}; 3\right\}$

2) $\Delta = -164$ $S_{\mathbb{R}} = \phi$ 3) $\Delta = 3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right\}$

Exercice 5

Résous dans IR l' équation suivante : $x^2+1=\sqrt{5-x^2}$

Corrigé

$x^2+1=\sqrt{5-x^2} \Leftrightarrow (x^2+1)^2=5-x^2$ car $x^2+5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0$ posons $X=x^2$ l'équation devient:

$X^2+3X-4=0$; $\Delta = 25$; $X_1=-4$; $X_2=1$ on a

$x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ *et* $x=-1$ $S=\{-1,1\}$

Exercice 6 :

Déterminer les nombres x et y tels que : $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

Corrigé

$\begin{cases} x+y=2 \ (1) \\ x^2+y^2=34 \ (2) \end{cases}$ **En élevant l'équation (1) au carré on obtient:** $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=4 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre on obtient : $xy = -15$ *on a* $\begin{cases} x+y=2 & (S) \\ xy=-15 & (P) \end{cases}$

x et y sont solutions **de** $x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = 64$ et donc $X_1 = 5$ et $X_2 = -3$ **On a** $x = 5$ **ou** $y = -3$ **ou a** $x = -5$ **ou** $y = 3$ **S=**$\{(5;-3);\}$,

Exercice .7

a) Vérifie que : A = $\sqrt{3}$ *+ 2 et B = -* $\sqrt{3}$*+ 2 sont inverses l'un de l'autre.*

b) Vérifie que A + B = 4

c) Déduis-en **(sans calcul mais en justifiant**) *les solutions de l'équation* ***(E): x² = 4x – 1***

d)deuire les solution des inequation suivantes $(E) < 0$; $(E) \leq 0$; $(E) > 0$ *et* $(E) \geq 0$

Corrigé

a- $A \times B = (\sqrt{3} + 2)(-\sqrt{3} + 2) = -3 + 4 = 1$ *alors A et B* **sont inverses** *l'un de l'autre*

b- $A + B = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2 = 4$

c- $A + B = 4$ *et* $A \times B = 1$ donc A et B **sont solutions** de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.

d- *Dressons le tableau de signe de E*

- Pour $E(x) > 0, S =]-\infty, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, +\infty[$
- Pour $E(x) < 0, S =]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$,
- Pour $E(x) \geq 0, S =]-\infty, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, +\infty[$,
- Pour $E(x) < 0, S = [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}]$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$E(x)$		+	0	−	0	+	

Exercice 8

L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à 360 m².
Si on augmente sa longueur **L** de 6m et sa largeur ℓ *de 6m, alors l'aire est alors égale à 630m².*
Détermine les dimensions de ce jardin.

CORRIGÉ

$$L \times \ell = 360 \text{ et } (L+6)(\ell+6) = 630 \Leftrightarrow L \times \ell + 6(L+\ell) + 36 = 630$$

On a L+ℓ= 39 Soit S=39 et P= 360 donc L et ℓ sont solutions de l'équation x²-39x+360=0

Δ= 81 et $L = 24$ et $\ell = 14$

COMPÉTENCE 1

Lors d'une visite d'entreprise, les élèves de laclasse de 1ère scientifique *ont été informés que dans cette entreprise, le coût de production de* **t** *objets et les frais d'entretien sont donnés en milliers de francs CFA par la formule* $C(t) = 0,1t2 + 10\,t + 1500$ *et que chaque objet est vendu à* **87.000 F.** *le chef d'entreprise* ***Mr Maxwell*** *affirme que pour maintenir le bénéfice supérieur ou égal à* **12.832.500 F,** *le nombre d'objets q à produire doit être compris* **entre 310 et 460.** *Les élèves doivent vérifier si l'agent a raison ou pas.*

Tache A l'aide d'une production argumentée, dis si l'agent a raison.

Corrigé

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon équations et inéquations dans ℝ pour cela nous allons:

- le bénéfice en fonction du nombre d'objets fabriqué
- déterminer le nombre d'objet pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 12.832.500 F
- puis conclure

Le bénéfice est : $87.000t - C(t) en milliers de FCFA$

On résout donc l'inéquation : $87.000t - (0,1t^2 - 10t + 1500) \times 1000 \geq 12.832.500$

$\Leftrightarrow -0,1t^2 + 77t - 14332,5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow t^2 - 770t + 143325 \leq 0$

$\Delta = (-770)^2 - 4 \times 143325 = 140^2$ *et* $t_1 = \dfrac{770+140}{2} = 455$ *et* $t_2 = \dfrac{770-140}{2} = 315$

L'inéquation devient : $(t-315)(t-455) \leq 0$ *d'où* $t \in [315;455]$

Pour que le bénéfice soit supérieur à 12.832.500 FCFA il faut que le nombre d'objets **t** soit compris entre *315 et 455 or* $[315;455] \subset [310;460]$.

Donc Mr Maxwell a raison

COMPÉTENCE 2

Une entreprise produit des voitures qu'elle commercialise. Le coût de fabrication (en milliers de FCFA) d'une voiture est de 5 millions de FCFA. Cet entreprise produit x voitures et la fonction qui modélise les prévisions pour la vente de ces x voitures est donnée par $Pv(x) = x^3 + 4002x^2 + 8000x - 10000000$. On s'intéresse au bénéfice, c'est-à-dire à la différence entre la recette et le coût de fabrication. Lorsque cette différence est setrictement positive, on dit que la production est rentable. Déterminer la quantité de voitures à produire pour que la production soit rentable.

Taches

On considère l'inéquation (I) : $x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000 \geq 0$

Et le polynôme polynôme P(x) definie par $P(x) = x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000$.

1- Montrer que $P(x) = (x-1000)(x+5000)(x+2)$.

2- Dresser le tableau de signe du polynôme p ; puis en déduire dans R l'enssemble solution de (I).

3- En déduire la solution de (I).

Solution:

1.Montrons que $P(x) = (x-1000)(x+5000)(x+2)$.

On a $(x-1000)(x+5000)(x+2) = (x-1000)(x^2+5002x+10000)$

$= x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000$

$= x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000$.

$= P(x)$

Tableau de signe du polynôme **P(x).**

On a $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -5000$ *ou* $x = -2$ *ou* $x = 1000$. Ainsi le tableau de signe **de P(x)** est le suivant :

x	$-\infty$		-5000		-2		1000		$+\infty$
$x-1000$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	

$x + 5000$	-	0	+	|	+	|		+
$x + 2$	-	|	-	0	+	|		+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0		+

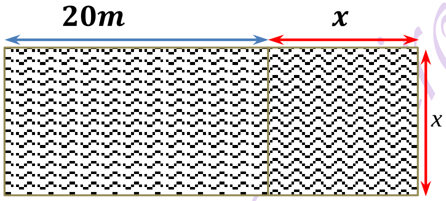
L'inéquation $P(x) \leq 0$ a pour ensemble solution **S = [−5000, −2] et [1000, +∞[.**

Solution de la situation problème. Le coût de fabrication (en milliers de FCFA) de x voitures est modélisé par la fonction par $Cp(x) = 5000000x$ et le prix de vente de x voitures est donnée par $Pv(x) = x3 + 4002x2 + 8000x + 10000000$. Pour que la production soit rentable, il faut que l'inéquation $Pv(x) - Cp(x) \geq 0$. Ainsi on a l'inéquation

$x^3 + 4002x^2 - 4992000x - 10000000 > 0$. Ainsi, la production sera rentable lorsque cette entreprise produira ***plus de 1000 voitures.***

COMPÉTENCE 3

Une coopérative scolaire possède un terrain rectangulaire pour produire des tomates. Pour augmenter sa production, le bureau de la coopérative décide d'agrandir son espace en achetant une parcelle de forme carrée et mitoyenne au terrain. Le côté de la parcelle a la même mesure que la largeur du terrain. Afin de clôturer l'espace totale de production, ils se proposent de calculer le périmètre. Cependant, ils se souviennent que la longueur du terrain initial est de 20 mètres et la superficie de l'ensemble est de 525 mètres carrés. Il te sollicite pour déterminer le côté de la parcelle à acheter.



A l'aide d'une production argumentée, réponds à la préoccupation du bureau.

SOLUTION

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser nos connaissances de la leçon équations et inéquations dans IR. Pour cela, nous allons :

- Réaliser une mise en équation
- Déterminer la mesure de la largeur
- Calculer le périmètre du nouvel espace

Avec l'achat de la parcelle, la nouvelle longueur est : L = 20 + x ; la largeur l reste inchangée l = x.

L'aire du nouvel espace = L× l = (20 + x) x = $x^2 + 20x$= 525

On obtient donc : $x^2 + 20x - 525 = 0$

On obtient une équation du second degré à résoudre :

$$x^2 + 20x - 525 = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (20)^2 - 4 \times 1 \times (-525) = 2500$$

$\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{-20+\sqrt{2500}}{2}$ *et* $x_2 = \frac{-20-\sqrt{2500}}{2}$ $\quad$ $x_1 = 15$ *et* $x_2 = -35$

La mesure est positive, donc la largeur est 15 mètres.

La nouvelle longueur est $L = 20 + 15 = 35$ $\quad$ Le périmètre : $P = 2\times(35 + 15) = 100\ m$

CHAPITRE 2 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS LES $\mathbb{R}^2$ ET DANS $\mathbb{R}^3$

I- SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

1- *Définition et méthode de déterminant ou formule de CRAMER*

On considère un système (Σ) de deux équations linéaires deux inconnues $(x;y)$: (Σ): $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' *et* c' sont des nombres réels.

$\boxed{D_s = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.}$; $\boxed{D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b.}$ $\boxed{D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.}$

2- *Propriété*

On considère un système (Σ) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x;y)$:(Σ) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où $(a,b) \neq (0,0)$ *et* $(a',b') \neq (0,0)$.

- Si $\boxed{D_s \neq 0. S = \left\{\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)\right\}}$.
- Si $\boxed{D_s = 0. D_x \neq 0 \text{ et } D_y \neq 0}$ alors Le système (Σ) ***n'admet pas de solution***.
- Si $\boxed{D_s = 0. D_x = 0 \text{ et } D_y = 0}$ alors Le système (Σ) ***admet une infinité*** : $S = \{(x;y)/ax+by=c\}. ou\ S = \{(x;y)/a'x+b'y=c'\}$

LEÇON 2 : SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS LINEAIRES DANS

I- SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS LINEAIRES A TROIS INCONNUESDANS $\mathbb{R}^3$

1- Définition

On appelle système **linéaire de trois équations** à trois inconnues $(x;y;z)$, un système du type : $\begin{cases} ax+by+cz=m \\ a'x+b'y+c'z=m' \\ a''x+b''y+c''z=m'' \end{cases}$ où $(a,b,c,a',b',c',a'',b'',c'',m,m' et\ m'') \in \mathbf{IR}^{12}$.

2- Résolution d'un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Méthode

Pour résoudre un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Par substitution ;
- Par la méthode du Pivot de Gauss.

EXERCICE D'APPLICATION

EXERCICES D'APLLICATIONS 1

Résoudre les systèmes de plus de deux équations dans solutions $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{1-}\ (S_{11}):\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x-4y-11=0 \\ -2x+7y+3=0 \end{cases};\quad \mathbf{2-}\ (S_{22}):\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x-4y-7=0 \\ -x+3y+1=0 \end{cases};\quad (S_{33}):\begin{cases} 3x-5y+2=0 \\ -6x+10y-4=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases}.$$

Solution

1- Considérons le système (S) constitué des 2 premier équations : $\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x-4y-11=0 \end{cases}$

$D_s=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=$ **(-4) (1)−(3) (-1) =-1** $\neq$ **0** . Apres résolution on obtient **S=** $\{(5;1)\}$.

On vérifie si ce couple est solution de la troisième équation $(-2)(5)+(7)(1)=-10+7=-3$

D'où le couple $(5;1)$ est la solution du système (S_{11}) de trois équations à deux inconnues.

2- Considérons le système constitué des **2** premier équations (S') $\begin{cases} 2x-5y-5=0 \\ x+4y-7=0 \end{cases}$

$Ds=\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=(4)(1)-(3)(-5)=9\neq 0$. Apres résolution on obtient **S=** $\{(3;1)\}$

On vérifie si ce couple est solution de la troisième équation $(-1)(3)+(3)(1)=-3+3=0\neq 1$.
Donc le système (S_{22}) de trois équations à deux inconnues n'admet pas de solution.

3- Considérons le système constitué des 2 premier équations $(S'')\begin{cases} 3x-5y+2=0 \\ -6x+10y-4=0 \end{cases}$

$D_s=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}=(3)(10)-(-6)(-5)=0.$

$D_x=\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=(-2)(10)-(4)(-5)=0.$ $\quad Dy=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}=(4)(3)-(-6)(-2)=12-12=0$

Les deux équations sont équivalentes à l'équation $3x-5y+2=0$.

On résout dans ce cas le système $(S''')\begin{cases} 3x-5y+2=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases}$. $D_s=11\neq 0. D_x=-14. D_y=-4$

D'où le couple $\left(-\frac{14}{11};\frac{4}{11}\right)$ est la solution du système (S_{33}) de trois équations à deux inconnues.

a- *Resolution Par substitution*

Exemple **:** Résous le système suivant par la méthode de substitution :$(\sum_1)\begin{cases} x-2y-3z=-9 \\ 2x+5y-3z=0 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y-3z=-9 \\ 2x+5y-3z=0 \\ x+y+2z=9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y+3z-9 \\ 2(2y+3z-9)+5y-3z=0 \\ 2y+3z-9+y+2z=9 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y+3z-9 \\ 9y+3z=18 \\ 3y+5z=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y+3z-9 \\ 3y+z=6 \\ 3y+5z=18 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y+3z-9 \\ z=6-3y \\ 3y+5(6-3y)=18 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2y+3z-9 \\ z=6-3y \\ -12y=-12 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=1 \\ z=3 \\ x=2 \end{cases}$$ **Donc :** $\boxed{S_{IR^3}=\{(2;1;3)\}}$

b- résolution la méthode du pivot de Gauss

Exemple : Résous le système suivant par la méthode de pivot de Gauss : $(\Sigma_2)\begin{cases} x-5y-7z=3 \\ 5x+3y+z=3 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-5y-7z=3 & (L_1) \\ 5x+3y+z=3 & (L_2) \\ 3x+y-2z=-1 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & (L_1) \\ 0+28y+36z=-12 & (L'_2)=(L_3)-5(L_1) \\ 0+16y+19z=-10 & (L'_3)=(L_3)-3(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & (L_1) \\ 14y+18z=-6 & (L'_2) \\ 16y+19z=-10 & (L'_3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & (L_1) \\ 14y+18z=-6 & (L_2) \\ 0-22z=-44 & (L''_3)=14\ (L'_3)-16\ (L'_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=-3 \\ x=2 \end{cases}$$ Donc $\boxed{S_{IR^3}=\{(2;-3;2)\}}$

APPLICATION 2

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants

$$(S_3)\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=9 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

Considérons $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} 3x+3y=6 \\ 2x-3y=9 \end{cases} \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$

Par suite $y=-1$

Vérifions si le couple $(3;-1)$ est solution de (S_3)

$x+2y=1$

$3-2=1$

$1=1$ Vrai

$$\boxed{S=\{(3;-1)\}}$$

$(S_4) : \begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ 2x+y+z=-2 \end{cases}$

On peut fixer y ; soit

$\begin{cases} 2x-3y=2-y \\ 2x+z=-2-y \end{cases}$

Alors $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2-y & -3 \\ -2-y & 1 \end{vmatrix} = -4-4y$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2-y \\ 2 & -2-y \end{vmatrix} = -8$

$\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -\frac{4+4y}{8} = -\frac{1+y}{2} \\ y = \frac{\Delta z}{\Delta} = -1 \end{cases}$

$\boxed{S = \left\{(x, y, z)/x = -\frac{1+y}{2}; -1\right\}}$

$(S_5) : \begin{cases} mx+2y-z=m \\ 2x+my-2z=2 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$

Fixons z ; soit

$\begin{cases} mx+2y=m+z \\ 2x+my=2+2z \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2-4$

Discussion :

Si $\Delta = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

Pour $m=2$, On a : $\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 2x+2y-2z=2 \end{cases}$

Discussion :

Si $\Delta = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

Pour $m=2$, On a : $\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 2x+2y-2z=2 \end{cases}$

Soit en fixant x

$\begin{cases} 2y-z=2-2x \\ -2y+2z=-2+2x \end{cases}$

En faisant la somme, on trouve $z=0$

Par suite $y=1-x$

Soit $\boxed{S = \{(x; 1-x; 0), x \in \mathbb{R}\}}$

Pour $m=-2$, On a :

$\begin{cases} -2x-z=-2-2y \\ 2x-2z=2+2y \end{cases}$ En fixons y

En faisant la somme $z=0$

Alors $x=1+y$

$\boxed{S = \{(y+1, y, 0); y \in \mathbb{R}\}}$

Si $\Delta \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+z & 2 \\ 2+2z & m \end{vmatrix} = m^2+mz-4-4z$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m+z \\ 2 & 2+2z \end{vmatrix} = 2z(m-1)$

Ainsi $\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} + \frac{m^2+mz-4-4z}{m^2-4} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2(m-1)z}{m^2-4} \end{cases}$

$\boxed{S = \left\{\left(\frac{m^2+mz-4z-4}{m^2-4}; \frac{2(m-1)y}{m^2-4}; z\right); z \in \mathbb{R}\right\}}$

$(S_6) \begin{cases} x+2y^2+3z^3=7 \\ 2x+3y^2+4z^3=11 \\ x-y^2-z^3=0 \end{cases}$

Il suffit de poser $X=x$ $Y=y$ avec $y \geq 0$ et $Z=z^3$

On a : $\begin{cases} X+2Y+3Z=7 \\ 2X+3Y+4Z=11 \\ X-Y-Z=0 \end{cases}$

Soit par pivot de gauss

$\begin{cases} X+2Y3Z=7 \\ -Y-2Z=-3 \\ Z=1 \end{cases}$

Par suite $Z=1$ $Y=1$ $Z=2$

Alors $X=x=2 \Rightarrow x=2$

$Y=y^2=1 \Rightarrow y=\pm$

$Z=z^3=1 \Rightarrow z=1$

D'où : $\boxed{S = \{(2,1,1); (2,-1,1)\}}$

__Exercice 4__

$(S) \begin{cases} 3x-y=15 \\ \frac{1}{2}x-y=5 \end{cases}$

1- Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -3+\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -15+5 = -10$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{vmatrix} = 15-\frac{15}{2} = \frac{15}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-10}{-\frac{5}{2}} = \frac{20}{5} = 4 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\frac{15}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{15}{5} = -3 \end{cases}$

D'où : $\boxed{S = \{(4; -3)\}}$

2- Déduction de

$(S') \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{1}{y} = 15 \\ \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} \left(\frac{1}{x-1}\right)(3) - \frac{1}{y} = 15 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)(1) - \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$

Dans la même collection