COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2023-2024
Département de Mathématiques	CONTROLE	Date : Samedi, 24 Février 2024
Classe : T[le] D & TI	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Coef : 04 ; Durée : 04h00

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,5pts)

Exercice 1 (5pts)

1- Le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$,

a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $(E): z^2+\left(\sqrt{3}+i\right)z+1=0$ **(0,5pt)**

b. Ecrire les solutions z_1 et z_2 de (E) sous forme trigonométrique **(0,5pt)**

2- Tout en déterminant les contraintes, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes.

a. $(\ln x)^2+\ln x-6=0$; **(0,75pt)**

b. $(0.8)^n \leq 0{,}1; n\in\mathbb{N}$. **(0,5pt)**

3- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant :

a. $\begin{cases} x-y=\frac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}$ **(0,75pt)**

4- On pose $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$, $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$

a. Calculer $A+B$; **(0,5pt)**

b. Calculer $A-B$ à l'aide d'une intégration par parties ; **(1pt)**

c. Déduire des questions 1 et 2, les valeurs de A et B. **(0,5pt)**

Exercice 2 (6.5pts)

1- On considère la suite (u_n) des réels strictement positifs, définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ \ln(u_{n+1})=1+\ln(u_n) \end{cases}$;

a. Montrer que $u_{n+1}=eu_n$, préciser la nature de la suite (u_n) ; **(0,5pt)**

b. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et préciser sa limite ; **(0,5pt)**

c. Exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n ; **(0,5pt)**

d. Exprimer $\sum_{k=0}^{n}\ln(u_k)$ en fonction de n, en déduire le calcul de $u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$ en fonction de n. **(0,5pt)**

2- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right) si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

a. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. f est-elle dérivable en 0 ? **(0,5pt)**

b. Etudier le sens de variations de f et étudier la limite de f en $+\infty$; **(0,5pt)**

c. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x)=0$ dans $[e;+\infty[$; **(0,5pt)**

d. Soit T la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation de T. **(0,5pt)**

e. Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite T dans un repère ortho normal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; **(0,5pt)**

f. Soit $\alpha\in]0;e]$. On pose $I(\alpha)=\int_\alpha^e f(x)dx$;

i. Montrer que $I(\alpha)=-\frac{5e^3}{36}+\frac{11\alpha^3}{36}-\frac{\alpha^3}{6}\ln\alpha$ à l'aide d'une intégration par parties pour $\alpha\in]0;e]$; **(1pt)**

ii. Calculer la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ; **(0,5pt)**

iii. En déduire l'aire de la partie d du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$ **(0,5pt)**

Exercice 3 (4pts) (uniquement pour la série D)

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x)=x-n-n\frac{\ln x}{x}$. On note (C_n)sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan d'unité sur les axes $2cm$.

Partie I

On pose pour tout entier naturel n non nul g_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g_n(x)=x^2-n+n\ln x$

1- Etudier le sens de variation de g_n , et dresser son tableau de variation; **(0,75pt)**

2-

   a. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in [1; e]$.; **(0,5pt)**
   b. En déduire suivant les valeurs de x, le signe de $g_n(x)$ sur $]0; +\infty[$. **(0,5pt)**

Partie II

1- Calculer les limites de f_n à droite de 0 et en $+\infty$ **(0,5pt)**

2- Montrer que pour tout $x > 0, f_n{}'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$ et en déduire le sens de variation de f_n; **(0,75pt)**

3-

   a. Montrer que la droite (D_n) d'équation $y = x - n$ est asymptote à (C_n) **(0,5pt)**
   b. Etudier la position relative de (C_n) et (D_n) **(0,5pt)**

<u>Exercice 3</u> (4pts) (uniquement pour la série TI)

1- Soit n un nombre entier relatif. On pose $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$;

   a. Montrer que $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres pairs ; **(0,5pt)**
   b. Ecrire α_n comme produit de deux polynômes de degré 2 ; **(0,5pt)**
   c. En déduire que α_n n'est pas un nombre premier. **(0,5pt)**

2- Parmi les nombres suivants, cite deux qui sont premiers : 649 ; 1 001 ; 1 999 ; 71 487 ; 257 323. **(0,5pt)**

3- Déterminer les couples $(x; y)$ de chiffres tels que le nombre d'écriture décimale $724xy$ soit divisible par 9 ; **(1pt)**

4- Déterminer tous les couples d'entiers naturels a et b tels que $a + b = 60$ et $pgcd(a; b) = 12$. **(1pt)**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5pts)

Le couple $NGONO - MBIA$, très ambitieux, décide de prêter 5 000 FCFA à leur voisin PALISSON. Le prêt fait l'objet d'intérêts composés au taux mensuel de 6%. Ils espèrent que leur voisin remettra l'argent suffisamment tard pour leur permettre de réaliser leur grand rêve, celui d'acheter une belle paire de bagues avec leurs noms gravés dessus et dont le prix est de 12 000 FCFA « indiscutable ». Palisson rembourse tout l'argent dû après 1an et 3 mois ;. (On rappelle qu'un capital est placé à intérêts composés lorsque les intérêts de chaque période sont incorporés au capital pour l'augmenter progressivement et porter intérêts à leur tour).

Pour l'échange des bagues, ils prévoient faire une cérémonie haute en couleur avec jeu de lumière. Ils contactent ainsi un électricien qui leur dit qu'il lui manque des appareils de mesure pour déterminer la **''valeur efficace''** de l'intensité du courant sans laquelle il ne peut gérer la cérémonie. Leur ami MANON leur rappelle alors que l'intensité du courant est donnée par la fonction $i: t \to I_{max} \sin(\omega t)$, où I_{max} est un réel positif et ω désigne la pulsation du signal ; avec t dans l'intervalle$\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$. (On rappelle que la valeur efficace d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est égale à la racine carrée de la valeur moyenne de f^2 sur l'intervalle $[a; b]$. On donne $I_{max} = 32A$.

Toujours pour la même cérémonie, ils contactent un ingénieur forage pour l'alimentation en eau. Après de longues négociations il leur propose de creuser un forage dont le coût sera de 5 000 FCFA pour le premier mètre, 5 800 FCFA pour le deuxième mètre et 800 FCFA de plus que le précédent pour chaque mètre supplémentaire. Il trouve de l'eau à 20 mètres du sol.

1- Le couple pourra-t-il réaliser son rêve? **(1,5pt)**

2- Quelle valeur doivent-ils donner à l'électricien ? **(1,5pt)**

3- Quel est le coût du forage ? **(1,5pt)**